3. SAYISAL ÇÖZÜMLEMEDE HATALAR VE HATA ÖLÇÜTLERİ

Sayısal çözümlemede, hatalar bir girdi bilgileri de dahil algoritmanın çözümünde uygulanan her işlem adımında farklı şekillerde oluşurlar. Bunlar, bir algoritma içinde,

Input(Girdi) Ünitesinde oluşan hatalar	→	İşlem Ünitesinde oluşan hatalar	→	Output Ünitesinde Hataların Toplam Etkisi

şeklinde ele alınabilirler.

Sayısal çözümlemede *input* veri hataları kadar bilgi işleme ünitesinde oluşan diğer hatalarla da uğraşılmaktadır. Bu nedenle, nümerik analizde hatalar; input veri hataları ve algoritmalarda yapılan işlem hataları diye iki kısımda ele alınabilirler. Output yani çıktı ünitesinde elde edilmiş hatalar ise; girdi ve bilgi işleme ünitelerinde oluşan hataların bir işlenen algoritmaya göre sonuç değerleri üzerindeki toplam etkileri olmaktadır. Bu durum, hataların yayılması olarak adlandırılır.

Sayısal çözümlemede *input* veri hatalarına iki şekilde rastlanmaktadır. Bunlardan biri; bir işlem algoritmasında *input* bilgilerinin denemeler sonucunda elde edilmiş örnekleme yada gözlem değerleri olması durumunda oluşan hatalar, bir diğerinin de; bir işlem algoritmasında *input* verilerinin kesme ve yuvarlatma hatalarını içeren yuvarlatılmış sayılardan olması durumunda karşılaşılan hatalar olması halıdır. Bu hatalardan her biri, özellikleri gereği farklı şekillerde ele alınarak incelenebilirler.

3.1 INPUT VERİ VEYA ÖLÇÜ HATALARI

Sayısal çözümlemede *input* veri hatalarına ilgili ölçü hataları, sayısal işlem algoritmalarında deneysel gözlem değerlerinin*(ölçülerin)* veri olarak kullanıldığı durumlarda rastlanılmaktadır. Bu hatalar, daha çok ortamdan, aletten ve kişilerden kaynaklanırlar. Bunlardan her biri bir deneysel sonucu, veya veriyi farklı karakterde etkilerler. Özellikleri gereği, farklı şekillerde ele alınabilirler. Bunlar,

1) Kaba hatalar,
2) Sistematik hatalar,
3) Düzensiz hatalar

olarak başlıca üç gruba ayrılabilirler. Bunlardan sistematik hatalar, karakterleri gereği, kendi aralarında da;

2-a) Sabit sistematik hatalar,
2-b) Tek taraflı sistematik hatalar,

2-b) Çift taraflı sistematik hatalar

şeklinde üç gruba ayrılabilirler.

Kaba hatalar, deneysel verilerdeki büyük yanılmaları temsil etmektedir. Bunlar daha çok deneyi yapan kişiden veya aletlerdeki kalibrasyon bozukluklarından kaynaklanırlar. Kalibrasyonu tam bir aletin kullanılması halinde, bu hatalar; deney sayısını artırmakla ve verilerin karşılaştırılmaları neticesinde fark olunabilirler.

İkinci tür hatalar sistematik karakterlidir, bunlar daha çok, deneyde kullanılan aletlerden ve ortam koşullarından kaynaklanırlar. Sabit karakterli olanları, genellikle aletlerden kaynaklanmaktadır. Aletlerin uygun şekilde kullanılmaları ile, bir diğer deyişle, uygun deney yöntemleri kullanılarak giderilebilirler. Tek taraflı olan sistematik karakterli hatalar ise; değerce farklı ancak işaretçe sabit yönde sonuçları etkilerler. Genelde, kişi yada ortamdan kaynaklanırlar. Bunlar, hiçbir zaman tam giderilemezler, deney sayısını ve şeklini artırarak azaltabilirler. Çift taraflı sistematik hatalar, genelde ortamdan kaynaklanırlar. İşaretçe ve miktarca farklı olurlar. Hataya neden olan parametrenin bulunup etkileri hesaplandıktan sonra verilerden özel hesaplamalar yoluyla giderilebilirler.

Üçüncü tür hatalar, düzensiz hatalar olmaktadır. Bunlar, bunların nedenleri hiçbir zaman bilinemez. Tekrar sayısını artırmakla verilerden giderilemezler. İşaret ve değerce değişkendirler. Her zaman deneysel verilerde bulundukları düşünülür. Değerce oldukça küçük hatalardırlar. Bunlar hakkında sadece iki özellik bilinmektedir. Bir deneyde, tekrar sayısı sonsuz gidince; işaretçe simetrik olurlar ve küçük miktarlı olanlarının sayısı büyük miktarlı olanlarından daima fazladır. Bu haliyle, istatistik normal dağılıma uyduklarından ancak matematik istatistik kurallara göre hata teorisi konuları içerisinde incelenebilirler. Sayısal çözümleme konuları içerisinde ele alınmazlar.

3.2 İŞLEM HATALARI

Genellikle daha önce sözü edilen veri hatalarına, sadece, gözlemlere dayalı deneysel işlemlerde ilk verilerdeki ölçü hataları olarak rastlanırken, algoritmik işlemlerde verilerle ilgili başka tür hatalara da rastlamak mümkündür. Bu hatalar, genellikle, sayılardaki veya algoritmalardaki yuvarlatma hatalarından *(Roundoff Error)* veya kesme *Truncation Error)* hatalarından kaynaklanırlar. Bunlar sayısal çözümlemenin konuları içinde ele alınan ve en sık karşılaşılan hata türlerini oluşturmaktadır. Belli bir algoritmanın çözümü neticesinde elde edilen verileri doğrudan etkilerler. Hatta çoğu zaman sonuçların yanlış olmalarına bile sebep olabilirler. Bu nedenle, bu tür hatalar sayısal çözümlemede, input veri hatalarına oranla, üzerinde en çok durulması gereken konulardan biri olmaktadır. Bir problemin çözümünde bu tür hatalar denetim altında tutulduğu sürece, ancak, etkin sonuçlar elde edilmektedir.

3.2.1 Kesme Hatası

Bilgisayarlarda işlemler yapılırken bazı kapalı fonksiyonlarla ifade edilen fonksiyonların*(Trigonometrik, Üssel fonksiyonlar ... gibi)* sayısal değerlerine ihtiyaç duyulur. Bilgisayarlar da bu gibi fonksiyonların değerlerini kullanırken, bunların seri açılımından elde edilen; *n* adet teriminden belli sayıdaki terimlerinden hesaplanmış değerleri kullanılır.

Örnek 1: *Sin x* fonksiyonunun belli bir *x* değerine karşılık gelen değerini hesaplayabilmek için bu fonksiyon *Taylor serisine* açılır ve açılım neticesinde,

$$Sin\ x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$$

seri ifadesi elde edilir. İlgili hesaplamalarda *Sinx* kapalı fonksiyonu yerine bu ifadenin seriye açılmış ifadesinin, $Sinx = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$ şeklindeki 7. dereceden terimine kadar olan terimler dikkate alınarak elde dilen seri kullanılarak, değeri hesaplandığında; arda kalan daha yüksek dereceden terimler dikkate alınmadığından,

$$Kesme\ hatası = Sin\ x - (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!)$$

kadar bir kesme hatası oluşmaktadır.

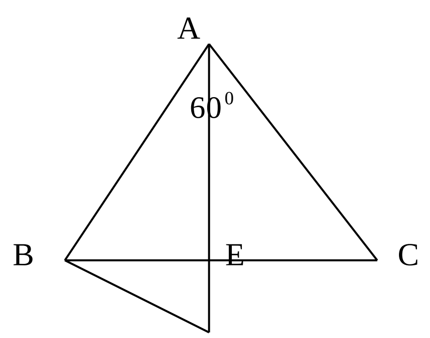
Bu şekilde; kapalı fonksiyonların belli bir değere karşılık gelen fonksiyon değerlerini, seriye açılmış ifadelerinde belli dereceden terimine kadar olan terimlerini dikkate alarak, göz ardı edilen daha yüksek dereceden diğer terimlerinin dikkate alınmamış olmasının, fonksiyonun değeri üzerindeki olumsuz etkisi *kesme hatası* olarak adlandırılır. Değeri, göz ardı edilen terimlerin değerlerinin toplamı kadar bir değer olmaktadır.

Örnek 2: $\alpha = 75^0$ derecelik bir açının $\tan\alpha$ trigonometrik fonksiyon değerini

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

şeklindeki bir seri açılımı yardımıyla hesaplandığında yapılacak kesme hatası miktarı ne keder olur? hesaplayınız

Çözüm 2: Bu problemde yapılabilecek kesme hatasını hesaplayabilmek için önce $\alpha = 75^0$ açının $\tan\alpha$ değerinin kesin olarak bilinmesi gerekir. Böyle bir durum aşağıdaki gibi çözülebilir.



75^0
F

Bir *ABC* eşkenar üçgeninde tüm iç açılar birbirine eşit ve 60^0 derecedir. Her köşe noktasındaki yükseklikleri aynı zamanda hem kenar, hem de açı ortayıdır. Bu özelliklerden faydalanarak, *A* noktasındaki *AE* yüksekliğini veya kenar ortayını aynı doğrultuda uzatarak *AB=AF* olacak şekilde bu kenar ortayı üzerinde bir *F* noktası alınarak *E* noktasındaki açısı dik 90^0 açı olan bir BFE dik üçgeni oluşturulur. *BFE* dik üçgeninin *F* noktasındaki açısı, *ABF* bir ikizkenar üçgen olacağından $\alpha = 75^0$ kadardır. *BE* ve *EF* dik kenar uzunlukları da; *ABC* eşkenar üçgeninin kenar uzunlukları a ise, $BE = a/2$ ve $EF = a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ olur.

BFE dik üçgeninde, *F* noktasındaki $\alpha = 75^0$ açısının $\tan\alpha$ yazılırsa; bunun kesin değeri,

$$\tan\alpha = \frac{BE}{EF} = \frac{a/2}{a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 3.732050807..$$

olarak hesaplanır.

Aynı açının yine $\tan\alpha$ değeri $\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ formülünden $\alpha = 75^0$ derece değeri $\widehat{\alpha} = 75^0/\rho^0$ ve $\rho^0 = 180^0/\pi = 57.2\quad 9\quad 5$ alınarak $\widehat{\alpha} = 75^0/\rho^0 = 1.308996939$ radyan birimine dönüştürülerek hesapladığında,

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} = 2.05664057...$$

değeri elde edilir.

Bu şekilde, farklı iki yoldan hesaplanan $\tan\alpha$ değerlerinin farkından, yapılacak kesme hatasının değeri,

$$\text{Kesme hatası} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} - -(\alpha + \frac{\alpha^3}{3}....) =$$
$$= 3.732050807..-2.05664057\ldots=$$
$$= 1.675410237..$$

olarak hesaplanır.

3.2.2 Yuvarlatma Hatası

Çeşitli hesaplamalar sırasında, hesaplama işlemlerinin sonuçları istenilen sayıdaki rakamdan daha fazla olurlar. Böyle sayılardan istenilen basamaktaki yada sayıdaki rakamdan oluşan bir değeri almak için son haneleri yuvarlatılır. Bu yuvarlatma işlemi, istenen basmağın sağındaki rakamın 5 ile karşılaştırılması ile yapılır.

İstenen son rakam 5 den küçükse dikkate alınmaz, büyükse bir artırılır, eşitse birlik olsun diye çift sayı olmasına dikkat edilir. Bu durumlar bir örnekle açıklanmak istenirse;

Verilen sayı	**Yuvarlatılan**	**Sayı**	**Karşılaştırma**			**Hatası**
54.763	54.76	3	küçüktür 5		atılır	- 0.003
54.766	54.77	6	büyüktür 5	1	ilave edilir	+0.004
54.765	54.76	5	eşittir 5		atılır	+0.005
54.7652	54.77	52	büyüktür 50	1	ilave edilir	+0.0048
54.7649	54.76	49	küçüktür 50		atılır	- 0.0049

şeklinde yuvarlatmalar yapılarak sayıları elde edilir. Benzer durum; aynı basamaklı iki sayını çarpma işlemi sonucunda hesaplanan sayının üç basamaklı olarak yuvarlatılması için düşünüldüğünde;

$$\begin{array}{rl}
 & 0.236*10^{1} \\
 & 0.127*10^{1} \\
x & \\ \hline
 & 1652 \\
 & 472 \\
 & 236 \\
+ & \\ \hline
0.0299 & 72*10^{2} \\
\mathbf{0.} & \mathbf{5}\ \textbf{\textit{yuvarlatma sınırı}} \\
0.300 & *10^{1}\ \ \textbf{cevap}
\end{array}$$

olarak verilebilir.

Burada $|Yu\,\text{var}\,latmahatası| = 0.28*10^{-2}$ kadar olmaktadır. Yuvarlatma hatası ile benzer düşünce; toplama ve çıkarma işlemlerinden elde edilen sonuçlar için de gösterilmek istenirse;

Toplama İşlemi

$$\begin{array}{l}
0.742*10^{2} \\
0.927*10^{2} \\ \hline
1.669*10^{2} \\
\quad 5\ \textit{Yuvarlatma sınırı} \\ \hline
0.167*10^{3}
\end{array}$$

Çıkarma İşlemi

$$\begin{array}{l}
0.314*10^{1} \\
-0.313*10^{1} \\ \hline
0.001*10^{1} = 0.100*10^{-1}
\end{array}$$

şeklinde açıklamaları yapılabilir.

Günümüzde, bu gibi el veya mekanik hesap makineleri ile yapılan hesaplamalar yerine daha çok gelişmiş teknolojinin ürünü olan bilgisayarlar kullanılmaktadır. Bilindiği gibi, bilgisayarlarda yazı yazılabilecek en küçük birim "Bite" olarak adlandırılır. Bir *Bite* 'lik alana sadece bir rakam, ikili sayı sisteminde ya 0 yada 1 rakamları yazılabilir. Aynı şekilde, 8 *Bit*lik bir alan bir *Byte* olarak adlandırılır.

Buna göre; bütün tam sayılar, bilgisayar belleğinde 2 *Byte* uzunluğundaki bir alanda; bu sayılarda üslü gösterim olmadığından, ilk Bite sayının işareti, geri kalan 15 Bite de sayının kendisi, 5 basamak güvenirlikle, $(2^{15}-1)=\pm 32767$ aralığındaki değerleri alabilecek,

1. Byte								*2. Byte*							
±															

şekilde yazılır.

Benzer şekilde Gerçel sayılar; 4 *Byte* uzunluğundaki 32 *Bite* 'lik bir alana; İlk Byte 'in ilk Bite 'ne üssün işareti ve geri kalan 7 Bite de sayı değeri, diğer 3 *Byte* 'lik alanın ilk *Byte* ' nin ilk *Bit* 'ine sayının işareti geriye kalan Bit lere de sayının kendisi, 7 anlamlı basamakla;

1. Byte								*2. Byte*							
±	ü	s	t	e	l			±	s	a	y	ı	n	ı	n
3. Byte								*4. Byte*							
k	e	n	d	i	s	i	y	a	z	ı	l	a	c	a	k

yazılabilecek en büyük sayı $2^{23}-1=838607$ değeri olacak şekilde yazılır.

Bunu gibi; çift duyarlıklı sayılar 8 *Byte* uzunluğunda 55 *Bit* üzerine, 16 basamak güvenle yazılabilecek en büyük sayı $2^{55}-1=3.6028797*10^{16}$ olacak şekilde;

1. Byte								*2. Byte*							
±	ü	s	t	e	l			±	s	a	y	ı	n	ı	n
3. Byte								*4. Byte*							
k	e	n	d	i	s	i	y	a	z	ı	l	a	c	a	k
5. Byte								*6. Byte*							
7. Byte								*8. Byte*							

yerleştirilebilirler.

Bu sınırları aşan sayılar bilgi sayarlara üstel biçimde yazılır ve işlemleri bunlarla gerekli yuvarlatmalar yapılarak sonuçlandırılır. Bilgisayarla işlemleri yaparken olabilecek bu tür hatalar yuvarlatma hatasıdır.

Konu daha iyi anlaşılabilmesi için benzer örnek; 2700 sayısı ile 0.02 sayısının, Bilgisayarlarda sayı depolama ve işlem yapma mantığı kullanılarak, tek*(single)* duyarlıkla toplanması ile verilmek istenirse; bu sayılar önce üstel biçimde yazılması gerekir. Buna göre; $2700 = 0.2700 * 10^4$ ve 0.02 sayısı da $0.02 = 0.2 * 10^{-1}$ olur.

Bu iki sayının bilgisayarlardaki gibi toplanabilmesi için üstel değerlerinin eşit olması gerekir. Üstel kısımları eşitlendiğinde; bu sayıların toplamı,

$$
\begin{array}{rl}
 & 2700000 = 0.2700 * 10^7 \\
+ & \underline{0.02 = 0.2 * 10^{-1} = 0.000000002} * 10^7 \\
 & 2700000{,}02 = 0.270002 * 10^7
\end{array}
$$

olarak hesaplanır.

Bu sayı tek duyarlıklı hesaplandığından sonuçta güvenli basamak 7 adet olacağından, 2700000,02 değeri yuvarlatılarak 2700000 olarak elde edilir. Geriye kalan 0.02 değeri yuvarlatılarak atılır. Bu değer yuvarlatma hatası olur ve bundan sonra işlemler var ise bütün sonuçları belli bir oranda etkileyerek sonuçların yanlış olmasına neden olur.

3.3 HATA ÖLÇÜTLERİ VE YAYILMASI KURALI

Sayısal çözümlemede kullanılabilecek hata ölçütlerini, gerek input bilgisi olarak işlemlerde kullanılabilecek deneysel verilerde, gerekse işlemlerde oluşabilecek yuvarlatma ve kesme hatalarının tür ve özelliklerine göre farklı şekillerde tanımlamak mümkündür. Hata teorisinde; kesme, yuvarlatma hataları için mutlak hata ve bağıl hata ölçütleri kullanılırken, deneysel veri hataları için karesel ortalama hata *(ortalama hata),* mutlak hatalar ortalaması veya mühtemel hata gibi ölçütler kullanılmaktadır.

3.3.1 Mutlak ve Bağıl Hatalar

Sayısal çözümlemede; daha önce sözü edildiği şekilde, sayıların gerek yuvarlatılması sonucunda, gerekse kesme işlemleri sonucunda oluşabilecek hataları;

A: *Sayının hatasız değeri,*
a : *Yuvarlatma ve kesme işlemleri yapıldıktan sonra elde edilmiş değeri,*

olmak üzere,

$$\varepsilon_{(a)} = A - a$$

şeklinde tanımlanabilir.

Sayısal hesaplamalar için bu şekilde tanımlanan toplam $\varepsilon_{(a)}$ hata değeri; pozitif değerli olabileceği gibi negatif değerli de olabilir. Ancak, her işlemde bu hatanın alabileceği maksimum değeri işaretçe farklı olmasına karşılık mutlak değerce eşit olabilir. Hataların bu özelliğinden faydalanarak, $\varepsilon_{(a)} = |A - a|$ matematik olarak bu şekilde tanımlanan, mutlak hata değerlerinin alabilecekleri maksimum değer; $\Delta_{(a)} = \varepsilon_{(a)\max.}$, bütün sayısal işlemler için bir hata ölçütü olarak kullanılabilir. Bu düşünceden faydalanarak, böyle bir ölçüt; bir sayının A hatasız değeri, a yuvarlatma ve kesme işlemleri yapıldıktan sonra elde edilen değerinden $\pm\Delta_{(a)}$ farklı,

$$a - \Delta_{(a)} \langle \; A \; \langle \, a + \Delta_{(a)}$$

sınırları arasında olacağı veya bunun bir başka şekilde ifadesi olarak,

$$-\Delta_{(a)} \langle \; A - a \; \langle \; \Delta_{(a)}$$

olması gerektiği varsayımından hareketle, hatasız değerinin bu aralıkta olması gerektiği söylenebilir. Bu amaçla, $\Delta_{(a)} = \varepsilon_{(a)\max.}$ mutlak hata bir ölçüt olarak kullanılabilir.

Sayısal çözümlemede bazı durumlarda, sadece aralık belirten böyle bir ölçüt yerine, yalnız bir sayı olan; mutlak hatanın kendi değerine bölünmesinden,

$$\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|}$$

elde edilen Bağıl*(izafi, oransal, göreceli)* hata değeri, daha uygun olacağı düşünülerek, bir hata ölçütü olarak kullanılır. Böylece; sayısal çözümlemede işlemlerin doğruluğunu denetlemek için,

- *Mutlak Hata*
- *Bağıl(oransal, izafi) Hata*

gibi iki ayrı hata kriteri ölçüt olarak kullanılır. Bunlardan mutlak hata ölçütü birimli bir sayı olup, bağıl hata ölçütü birimsiz yada boyutsuz bir sayıdır.

Bir sayı için bu şekilde tanımlanan hata ölçütleri, hatalı sayıların fonksiyonu şeklinde hesaplanan diğer bir değer için de kullanılabilir. Bu durumda, hataların birikimi esasından faydalanarak, geliştirilen hataların yayılması kuralı kullanılır. Nümerik analizde hataların yayılması ile ilgili kurallar aşağıdaki gibi ele alınabilir.

3.3.1.1 Aritmetik İşlemlerde Mutlak ve Bağıl Hataları Yayılması Kuralı

3.3.1.1.1 Bir Toplamın Mutlak ve Bağıl Hatası

Hatasız, gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 , a_2 ve mutlak hataları da $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ olsun. Bu sayıların gerçek değerleri için $a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle\ A_1 \ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ve $a_2 - \Delta_{(a_2)} \langle\ A_2 \ \langle a_2 + \Delta_{(a_2)}$ yazılabilir.
Buna göre bu iki sayının toplamı;

$$
\begin{array}{ll}
 & a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle\ A_1 \ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)} \\
 & a_2 - \Delta_{(a_2)} \langle\ A_2 \ \langle a_2 + \Delta_{(a_2)} \\
+ & \\
\hline
\end{array}
$$

$$(a_1 + a_2) - (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)}) \langle\ A_1 + A_2 \ \langle (a_1 + a_2) + (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$$

olur.

Buradan, elde edilen toplam sonucunun mutlak hatası, $\Delta_{(a_1+a_2)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$ olarak yazılabilir.

Durum genelleştirilirse;

$$\Delta_{(a_1+a_2+.......+a_n)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + ... + \Delta_{(a_n)})$$

ifadesine göre; bir toplamın mutlak hatası, her bir sayının mutlak hatalarının toplamına eşittir. Bağıl hatanın tanımından, böyle bir toplamın bağıl hatası da

$$\delta_{(a_1+a_2+.......+a_n)} = \frac{(\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + ... + \Delta_{(a_n)})}{|a_1 + a_2 + ... + a_n|}$$

olur.

Örnek: $a_1 = 3.22$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.02$, $a_2 = 1.0148$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a2)} = 0.0002$ ve $a_3 = 9.6$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_3)} = 0.1$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların toplamı olan;

$$
\begin{array}{ll}
 & a_1 = 3.22 \\
 & a_2 = 1.0148 \\
 & a_3 = 9.6 \\
+ & \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
 & \Delta_{(a_1)} = 0.02 \\
 & \Delta_{(a2)} = 0.0002 \\
 & \Delta_{(a_3)} = 0.1 \\
+ & \\
\hline
\end{array}
$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a = 13.8348 \qquad \Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a2)} + \Delta_{(a_3)} = \Delta_{(a)} = 0.1202$$

$a = 13.8348$ değerinin mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.1202$ olmaktadır. Toplamın bağıl hatası da

$$\delta_{(13.8348)} = \frac{0.1202}{13.8348} = 0.0217$$

olur.

3.3.1.1.2 Bir Farkın Mutlak ve Bağıl Hatası

Benzer şekilde, hatasız gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 ve a_2 ve mutlak hataları da $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ olsun. Bu sayıların gerçek değerleri için

$$a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle \ A_1 \ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)}$$

ve

$$a_2 - \Delta_{(a_2)} \langle \ A_2 \ \langle a_2 + \Delta_{(a_2)}$$

yazılabilir. Buna göre iki sayının farkı;

$$\begin{array}{l} a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle \ A_1 \ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)} \\ a_2 + \Delta_{(a_2)} \rangle \ A_2 \ \rangle a_2 - \Delta_{(a_2)} \quad \textit{(şeklinde yazılarak farkı)} \\ \hline \end{array}$$

-

$$(a_1 - a_2) - (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)}) \langle A_1 - A_2 \ \langle (a_1 - a_2) + (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$$

olur. Buradan, elde edilen farkın mutlak hatası, $\Delta_{(a_1 - a_2)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$ olarak yazılabilir.

Durum genelleştirilirse;

$$\Delta_{(a_1 - a_2 - \dots\dots - a_n)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots\dots + \Delta_{(a_n)})$$

ifadesine göre; bir farkın mutlak hatası, her bir sayının mutlak hatalarının toplamına eşittir. Bağıl hatanın tanımından, böyle bir farkın bağıl hatası da

$$\delta_{(a_1 - a_2 - \dots - a_n)} = \frac{(\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots\dots + \Delta_{(a_n)})}{|a_1 - a_2 - \dots\dots - a_n|}$$

olur.

Örnek: $a_1 = 9.78$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.02$, $a_2 = 3.23$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a2)} = 0.01$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların farkının mutlak hatası;

$$a_1 = 9.78 \qquad\qquad \Delta_{(a_1)} = 0.02$$

$$a_2 = 3.23 \qquad\qquad \Delta_{(a2)} = 0.01$$

$$\underline{-\qquad\qquad\qquad\qquad}\qquad\qquad\underline{+\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$a_1 - a_2 = a = 6.55 \qquad\qquad \Delta_{(a1)} + \Delta_{(a2)} = \Delta_{(a)} = 0.03$$

$a = 6.55$ değerinin mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.03$ olmaktadır. Bağıl hatası da

$$\delta_{(6.55)} = \frac{0.03}{6.55} = 0.0046$$

olarak hesaplanır.

3.3.1.1.3 Bir Çarpımın veya Bölümün Mutlak ve Bağıl Hataları

Burada da; sayıların hatasız gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 ve a_2 ve mutlak hataları $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ ve bağıl hataları $\delta_{(a_1)}$, $\delta_{(a_2)}$ olsun. Aynı düşünce ile bu sayıların gerçek değerleri için $a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle\ A_1\ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ve $a_2 - \Delta_{(a_2)} \langle\ A_2\ \langle a_2 + \Delta_{(a_2)}$ yazılabilir. Burada;

$$a_k \pm \Delta_{(a_k)} = a_k \left(1 \pm \frac{\Delta_{(a_k)}}{a_k}\right) = a_k \left(1 \pm \delta_{(a_k)}\right)$$

özelliğinden faydalanarak; $a_1 - \Delta_{(a_1)} \langle\ A_1\ \langle a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ifadesi için

$$a_1(1 - \delta_{(a_1)}) \langle\ A_1\ \langle a_1(1 + \delta_{(a_1)}) \text{ ve } a_2 - \Delta_{(a_2)} \langle\ A_2\ \langle a_2 + \Delta_{(a_2)}$$

ifadesi için de;

$$a_2(1 - \delta_{(a_2)}) \langle\ A_2\ \langle a_2(1 + \delta_{(a_2)})$$

yazılabilir.

Bu iki ifadenin taraf tarafa çarpılması sonucunda elde edilen $\delta_{(a_1)}\delta_{(a_2)}$ gibi ikinci dereceden terimler çok küçük olacaklarından ihmal edilerek;

$$\begin{array}{l} a_1(1 - \delta_{(a_1)}) \langle\ A_1\ \langle a_1(1 + \delta_{(a_1)}) \\ a_2(1 - \delta_{(a_2)}) \langle\ A_2\ \langle a_2(1 + \delta_{(a_2)}) \\ \underline{x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ a_1a_2(1 - \delta_{(a_1)} - \delta_{(a2)}) \langle\ A_1A_2\ \langle a_1a_2(1 + \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)}) \end{array}$$

ya da

$$a_1a_2\{1 - (\delta_{(a_1)} + \delta_{(a2)})\} \langle\ A_1A_2\ \langle a_1a_2\{1 + (\delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)})\}$$

sunucu elde edilir.

Buradan da; bir çarpımın bağıl hataları arasında $\delta(a_1 a_2) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)}$ ilişkisinin olduğu görülür.

Neticede, varılan sonuç genelleştirilirse; çarpımın bağıl hatası,

$$\delta(a_1 a_2 .... a_n) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)} + ... + \delta_{(a_n)}$$

her bir çarpanın bağıl hataları toplamına eşit olduğu şeklinde genelleştirilerek söylenebilir.

Örnek: $a_1 = 1.45$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.01$, $a_2 = 2.28$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a2)} = 0.02$ ve, $a_3 = 1.12$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_3)} = 0.01$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların çarpımının bağıl hatası;

$$\delta_{(1.45*2.28*1.12)} = \frac{0.01}{1.45} + \frac{0.02}{2.28} + \frac{0.01}{1.12} \cong 0.015$$

olur.

Aynı şekilde, mutlak hata ile bağıl hata arasındaki ilişkiden faydalanarak mutlak hatası da;

$$\Delta_{(1.45*2.28*1.12)} = (1.45 * 2.28 * 1.12) * 0.015 = 0.06$$

olarak hesaplanabilir.

Neticede, bir çarpım işleminde eğer sayılardan birinin bağıl hatası sıfır ise, bu durumda çarpımın bağıl hatası;

$$\delta_{(a_1 a_2)} = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)} = 0 + \delta_{(a_2)} = \delta_{(a_2)}$$

ikinci sayının bağıl hatasına eşit olur.

Böylece; yuvarlatılmış hatalı bir değerin bağıl hatası desimal noktanın yerine bağlı değildir. Aynı şekilde, böyle bir sayı bir tam sayı ile çarpıldığında bağıl hatanın değişmediği söylenebilir.

Benzer şekilde bir çarpımın mutlak hatası hesaplandığında; iki sayının çarpımının mutlak hatasının,

$$\Delta_{(a_1 a_2)} = a_1 a_2 \delta(a_1 a_2) = a_1 a_2 \delta_{(a_2)} = a_1 a_2 \frac{\Delta_{(a_2)}}{a_2} = a_1 \Delta_{(a_2)}$$

olduğu görülmektedir.

Bunun sonucunda da, sayılardan birinin mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0$ ise, mutlak hatası sıfır olan sayı ile diğer sayının mutlak hatasının çarpımı bu iki sayının çarpımının mutlak hatasına eşit olduğu söylenebilir. Bunun sonucunda da; $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ yuvarlatılmış sayılar, $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ de bunlara karşılık gelen pozitif tam saylar ve $\Delta_{(a_1)}, \Delta_{(a_2)}, \ldots\ldots, \Delta_{(a_n)}$ mutlak hataları olmak üzere;

$$\delta(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots\ldots + c_n a_n) = c_1 \Delta_{(a_1)} + c_2 \Delta_{(a_2)} + \ldots\ldots + c_n \Delta_{(a_n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta_{(a_i)}$$

olur.

Buradan; bir sayının tersinin bağıl hatası; $A \rangle 0$ ve $a \rangle 0$ olmak üzere;

$$\Delta_{(\frac{1}{a})} = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a - \Delta_{(a)}} \right| = \frac{\Delta_{(a)}}{a(a - \Delta_{(a)})} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2 (1 - \frac{\Delta_{(a)}}{a})} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2 (1 - \delta_{(a)})}$$

burada $\delta_{(a)}$ değeri 1 'in yanında çok küçük olduğundan ihmal edilirse;

$$\Delta_{(\frac{1}{a})} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{1}{a} \delta_{(a)}$$

olduğu görülür. Buradan; bir sayının tersinin bağıl hatası da;

$$\delta_{(\frac{1}{a})} = \frac{\Delta_{(\frac{1}{a})}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}\delta_{(a)}}{\frac{1}{a}} = \delta_{(a)}$$

olur.

Neticede; bir bölümün bağıl hatasının, bölünen ve bölen sayıların,

$$\delta_{(\frac{a_1}{a_2})} = \delta(a_1 \frac{1}{a_2}) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)}$$

bağıl hatalarının toplamına eşit olduğu görülmektedir. Bu işlemlerin sonucunda; a^n gibi bir üslü ifadenin bağıl hatası;

$$\delta_{(a^n)} = \delta(a\ a\ \ldots\ldots a\ ) = \delta_{(a)} + \delta_{(a)} + \ldots\ldots + \delta_{(a)} = n\delta_{(a)}$$

ve mutlak hatası da;

$$\Delta_{(a^n)} = n\ a^n\ \delta_{(a)} = n\, a^{n-1}\ \Delta_{(a)}$$

olarak hesaplanabilir.

Örnek: $a = 2.00$ sayısının mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.03$ olarak bilinmektedir. Bu sayının $y = a^3$ şeklinde hesaplanan y değerinin $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hataları ne kadar olur? Hesaplayınız.

Çözüm: $y = a^3$ sayısının bağıl hatası;bir çarpımın bağıl hatalarına ilişkin kurallara göre;

$$\delta_{(y)} = \delta(a^3) = \delta(a\,a\,a) = \delta_{(a)} + \delta_{(a)} + \delta_{(a)} = 3\,\delta_{(a)}$$

olur.

Mutlak hatası ise; $\delta_{(y)} = \dfrac{\Delta_{(y)}}{|y|}$ ve $\delta_{(a)} = \dfrac{\Delta_{(a)}}{|a|}$ tanımlarından

$$\Delta_{(y)} = |y|\delta_{(y)} = |a^3|\delta_{(y)} = 3|a^3|\delta_{(a)} = 3|a^3|\frac{\Delta_{(a)}}{|a|} = 3a^2\Delta_{(a)} = 3(2^2)0.03 = 0.36$$

olarak hesaplanır. Buradan bağıl hatası,

$$\delta_{(y)} = \frac{\Delta_{(y)}}{|y|} = \frac{\Delta_{(y)}}{|a^3|} = \frac{0.36}{8} = 0.045$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde; $y = \sqrt[n]{a}$ gibi n dereceden bir köklü ifadenin bağıl hatası da, $y^n = a$ olduğundan, $\delta_{(y^n)} = \delta_{(a)}$ olur. Böylece, problem üslü bir sayının bağıl hatasına dönüştürülmüş olur. Üslü sayının bağıl hatasına göre; $\delta_{(y^n)} = n\delta_{(y)}$ olacağından, n dereceden bir sayının kökünün bağıl hatası $\delta_{(y)} = \dfrac{1}{n}\delta_{(a)}$ olarak elde edilir. Mutlak hatası da;

$$\Delta_{(y)} = |y|\delta_{(y)} = |\sqrt[n]{a}|\delta_{(y)} = \frac{|\sqrt[n]{a}|}{n}\delta_{(a)} = \frac{|\sqrt[n]{a}|}{n}\frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{|\sqrt[n]{a}|}{n\,a}\Delta_{(a)}$$

olarak hesaplanmış olur.

Örnek: $a = \sqrt[3]{y}$ gibi bir işlemde; $y = 8$ ve mutlak hatası $\Delta_{(y)} = 0.36$ olarak verilmektedir. Buradan hesaplanacak olan küp kök $a = ?$ değerinin $\Delta_{(a)} = ?$ mutlak ve $\delta_{(a)} = ?$ bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm: Burada her tarafın küpü alırsa $y = a^3$ olur. Bir çarpımın bağıl hatası kuralından faydalanarak,

$$\delta_{(y)} = \delta(a^3) = 3\,\delta_{(a)}$$

ifadesinden,

$$\delta_{(a)} = \frac{\delta_{(y)}}{3}$$

elde edilir.

Burada; $\delta_{(y)} = \frac{\Delta_{(y)}}{|y|} = \frac{0.36}{8} = 0.045$ olduğundan, $\delta_{(a)} = \frac{\delta_{(y)}}{3} = \frac{0.045}{3} = 0.015$

ve bağıl hatasının da; $\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|}$ şeklindeki tanımından hareket ederek,

$$\Delta_{(a)} = |a|\delta_{(a)} = 2(0.015) = 0.03$$

olarak hesaplanır.

Örnek: $y = a^{-1}$ işleminde; $a = 2.00$ ve $\Delta_{(a)} = 0.03$ olarak verilmiş olduğuna göre, $\delta_{(y)} = ?$ bağıl ve $\Delta_{(y)} = ?$ mutlak hataları ne kadardır? Hesaplayınız.

Çözüm: Bağıl hatanın tanımından, $\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} = \frac{0.03}{2} = 0.015$ olarak hesaplanabilir. Sonra, $y = a^{-1}$ şeklindeki bir işlemin mutlak ve bağıl hataları,

$$\Delta_{(y)} = \Delta(a^{-1}) = \Delta(\frac{1}{a}) = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2} = \frac{1}{a}\frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{1}{a}\delta_{(a)} = \frac{1}{2}(0.015) = 0.0075$$

$$\delta_{(y)} = \delta(a^{-1}) = \delta(\frac{1}{a}) = \frac{\Delta_{(\frac{1}{a})}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}\delta_{(a)}}{\frac{1}{a}} = \delta_{(a)} = 0.015$$

olarak hesaplanır.

Örnek: $\sqrt{5} = 2.2$ ve bağıl hatası $\delta_{(\sqrt{5})} = \frac{0.05}{\sqrt{5}}$, $\pi = 3.1$ ve bağıl hatası $\delta_{(\pi)} = \frac{0.05}{\sqrt{\pi}}$ olduğu bilindiğine göre $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$ işleminin $\delta_{(\frac{\sqrt{5}}{\pi})} = ?$ bağıl hatası ne kadar olur? Hesaplayınız.

Çözüm: için iki sayının bölümünün bağıl hatası, pay ve paydanın bağıl hatalarının toplamına eşit olacağından; benzer şekilde yapılan işlemlerden,

$$\delta_{\left(\frac{\sqrt{5}}{\pi}\right)} = \delta_{(\sqrt{5})} + \delta_{(\pi)} = \frac{0.05}{\sqrt{5}} + \frac{0.05}{\sqrt{\pi}} \cong 0.04$$

olarak hesaplanır.

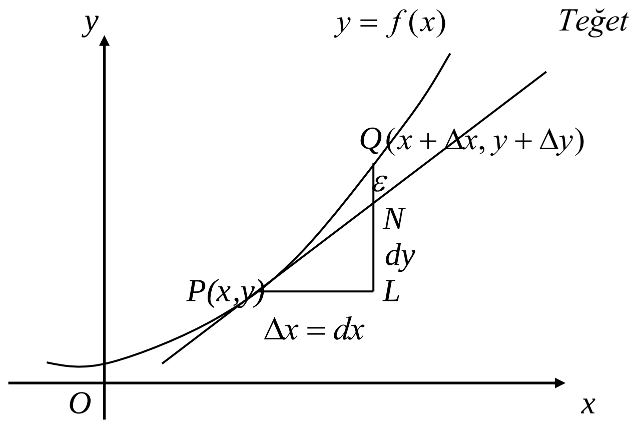
3.3.1.2 Tek Değişkenli Fonksiyonların Mutlak ve Bağıl Hatası

$y = f(x)$ gibi tek değişkenli bir fonksiyonda bağımsız değişken x 'in mutlak hatası $\Delta_{(x)}$ olmak üzere, fonksiyonun $\Delta_{(y)}$ mutlak hatası aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Bu amaçla; $y = f(x)$ fonksiyonunun x göre diferansiyeli alınarak, $dy = f(x)^{'} dx$ bağıntısı elde edilir.

Burada; NPL Açısı α , QPL açısı da β , $LQ = \Delta y = NL + NQ = NQ + dy$, $PL = \Delta x = dx$ ve

$$\tan\alpha = \frac{NL}{PL} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\Delta x} \quad ; \quad \tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{dır.}$$



Şekil 3: Tek Değişkenli Fonksiyonların Mutlak Hatası

Ayrıca;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon = f^{'}(x) + \varepsilon$$

olacağından

$$\Delta y = \Delta x \ f^{'}(x) + \Delta x \ \varepsilon$$

yazılabilir.

Burada; bağımsız değişkendeki sonlu ve diferansiyel artma miktarı $\varepsilon \to 0$ olacağından ihmal edilerek,

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x) \quad \text{ve} \quad dy = f^{'}(x)dx$$

neticede bu bağıntılardaki diferansiyel artımlar yerine sonlu artım değerleri kullanılarak da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f^{'}(x) \quad \text{ve} \quad \Delta y = f^{'}(x)\ \Delta x$$

yazılabilir.

Buna göre; $y = f(x)$ diferansiyeli olan bir fonksiyon olmak üzere; x bağımsız değişkeninin x_0 yaklaşık değeri için bu fonksiyonun mutlak hatası;

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{ve} \quad x = x_0 + \Delta x$$

olduğu dikkate alınarak;

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f^{'}(x)\ \Delta x$$

olur.

Buna göre burada; Δy için, Δ_y ve Δx içinde Δ_x mutlak hataları kullanılırsa, tek değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası için,

$$\Delta_y = f^{'}(x)\ \Delta_x$$

bağıntısı elde edilir.

Benzer şekilde, bağıl hatası da, bağıl hatanın tanımından hareket ederek,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \frac{\Delta_y}{|y_0|} = \frac{\Delta_y}{|f(x_0)|} = \frac{f^{'}(x_0)\ \Delta_x}{|f(x_0)|} = \left|\frac{f^{'}(x_0)}{f(x_0)}\right|\ \Delta_x = f^{'}(x_0)\delta_{x_0}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Örnek: $f(x) = x^{\alpha}$; gibi bir fonksiyonun $x_0 = 20.00$ ve mutlak hatası $\Delta_{x_0} = 0.02$ ve $\alpha = 5$ gibi reel bir sayı olmak üzere mutlak ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm: $f^{'}(x) = \alpha \; x^{\alpha-1}$ alınarak; $\Delta_y = f^{'}(x)_0 \; \Delta_x$ bağıntısından faydalanarak mutlak hatası,

$$\Delta y = f^{'}(x) \; \Delta_x = \left|\alpha \; x^{\alpha-1}\right| \Delta_x = \left|5\,(20.00)^4\right| 0.02 = 16000 \quad \text{bulunur.}$$

Daha sonra buradan bağıl hatası,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \left|\frac{f^{'}(x_0)}{f(x_0)}\right| \Delta_x = \left|\frac{\alpha \; x^{\alpha-1}}{x^{\alpha}}\right| \Delta_x = \left|\frac{\alpha \; x^{\alpha}}{x \; x^{\alpha-1}}\right| \Delta_x$$

$$= \left|\frac{\alpha}{x}\right| \Delta_x = \alpha \frac{\Delta_x}{|x|} = \alpha \; \delta(x) = 5 \frac{0.02}{|20.00|} = 0.005$$

Örnek: $y = f(x) = \log x$ fonksiyonunun ; x bağımsız değişkenin x_0 değerine karşılık gelen mutlak ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm: Bu fonksiyonun diferansiyeli alınacağından, burada on tabanlı logaritmik bir ifade olarak verilmiş olan $y = f(x) = \log x$ fonksiyonunun önce *Neper* logaritmasına dönüştürülmüş şekli elde edilerek, $y = f(x) = \log x = \mu \; \ln x$ biçiminde yazılır. Burada $\mu = \ln e \cong 0.43..$ on tabanlı logaritma ile *Neper* logaritması arasında dönüşümü sağlayan bir katsayıdır. Dana sonra; neper logaritması biçiminde ifade edilmiş olan fonksiyonun türevi alınarak,

$$y^{'} = f^{'}(x) = \frac{\mu}{x} = \frac{0.43}{x}$$

elde edilir.

Burada, tek değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatasını veren; $\Delta_y = f^{'}(x)_0 \; \Delta_x$ bağıntısından faydalanarak, bu fonksiyonun mutlak hatası,

$$\Delta_y = f^{'}(x) \; \Delta_x = \left|\frac{0.43}{x}\right| \Delta_x = 0.43 \frac{\Delta_x}{|x|} = 0.43 \; \delta_{(x)}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde, bağıl hatası da,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \frac{\Delta_y}{|y|} = \left|\frac{f^{'}(x)_0}{f(x)_0}\right| \Delta_x = \left|\frac{\mu \; x^{-1}}{\log x}\right| \Delta_x = \left|\frac{\mu \; x^{-1}}{\mu \; \ln x}\right| \Delta_x$$

$$= \frac{\frac{\mu}{x}}{\mu \ln x} \Delta_x = \frac{\mu}{x} \frac{1}{\mu \ln x} \Delta_x = \frac{1}{x \; \ln x} \Delta_x$$

olarak hesaplanır.

3.3.1.3 İki veya Daha Fazla Değişkenli Fonksiyonların Mutlak ve Bağıl Hatası

Benzer şekilde hareketle; $z = f(x, y)$ gibi iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası, bağımsız değişkenlerin ; x_0 ve y_0 değeri için; $\Delta x = x - x_0$ ve $\Delta y = y - y_0$ olmak üzere, fonksiyonun birinci dereceden diferansiyel ifadesine göre,

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0) = \left|(\frac{\partial f}{\partial x})_0\right|\Delta x + \left|(\frac{\partial f}{\partial y})_0\right|\Delta y = \left|(\frac{\partial z}{\partial x})_0\right|\Delta x + \left|(\frac{\partial z}{\partial y})_0\right|\Delta y$$

açılımından faydalanarak,

$$\Delta_z = \left|(\frac{\partial z}{\partial x})_0\right|\Delta_x + \left|(\frac{\partial z}{\partial y})_0\right|\Delta_y$$

şeklinde hesaplanabilir.

Daha sonra bağıl hatanın genel tanımından hareket ederek, bu fonksiyonun $\delta_{(z)}$ oransal hatası da,

$$\delta_{(z)} = \frac{\Delta_z}{|z|}$$

olarak bulunabilir.

Örnek: x_0 ve y_0 değerleri için mutlak hataları Δ_x ve Δ_y olan iki bağımsız değişkenin; $z = xy$ gibi bir fonksiyonun mutlak ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm: Önce bu fonksiyonun her iki değişkene göre türevleri alınarak;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

değerleri elde edilir. Bu değerlerden, z fonksiyonun mutlak hatası;

$$\Delta_z = y_0 \ \Delta_x + x_0 \ \Delta_y$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde; bağıl hatası da;

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z_0|} = \frac{y_0 \ \Delta_x + x_0 \ \Delta_y}{|(xy)_0|} = \frac{\Delta_x}{|x_0|} + \frac{\Delta_y}{|y_0|} = \delta_x + \delta_y$$

şeklinde bulunabilir.

Buradan, bir genelleme yapılırsa; $z = f(x, y, ..., t)$ gibi fazla sayıda bağımsız değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası, bağımsız değişkenlerin ; x_0 , y_0 ve t_0 değeri için mutlak hataları Δ_x , Δ_y ve Δ_t olmak üzere,

$$\Delta_z = \left|(\frac{\partial z}{\partial x})_0\right|\Delta_x + \left|(\frac{\partial z}{\partial y})_0\right|\Delta_y + ... + \left|(\frac{\partial z}{\partial t})_0\right|\Delta_t$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu değere karşılık gelen $\delta_{(z)}$ bağıl hatası da;

$$\delta_{(z)} = \frac{\Delta_z}{|z|}$$

olarak hesaplanabilir.

3.3.2 Karesel Ortalama Hata, Mutlak Hatalar Ortalaması ve Muhtemel Hatalar

Sayısal çözümlemede; örneklemeler veya gözlemler sonucunda elde edilen verilerin kullanılması ile yapılan sayısal hesaplamalarda, input verileri belli bir miktar rasgele ölçü hatalarını içereceklerinden, yapılan çözüm sonucunda kestirilen parametrelerin ne derece doğru ve güvenilir olmalarının da bilinmesi istenir. Bu gibi durumlarda, hata teorisi kurallarına uygun olarak bazı hata ölçütleri tanımlanarak kullanılır. Daha çok matematik istatistik bir anlam taşıyan bu hata ölçütleri,

- Mutlak hatalar ortalaması
- Muhtemel hata
- Karesel ortalama hata *(bunun için kısaca "ortalama hata" da kullanılır)*

şeklinde üç ayrı isim altında ele alınabilirler.

Deneysel veriye konu bir büyüklüğün,

A : geçek değeri,
a : deneysel veri değeri

ise, kaba sistematik hatalardan arındırılmış a deneysel veri değeri bir takım rasgele düzensiz hataları içermektedir. Bu hatanın toplam değeri, Gauss'un ifadesine göre,

$$-\varepsilon = a - A$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; o büyüklüğün A geçek değerini ifade ettiğinden ε gerçek hata olur. Bir büyüklüğe ilişkin n sayıda yapılan denemeler sonucunda elde edilen deneysel veriler; a_i ; $i = 1,2,3,....,n$ olarak gösterilirse, her biri için gerçek hata da $-\varepsilon_i = a_i - A$; $i = 1,2,3,....,n$ adet olur. Bu hatalardan faydalanarak;

t ***-Mutlak hatalar ortalaması;*** hataların mutlak değerlerinin aritmetik ortalamasını almak suretiyle,

$$t = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \quad ; \quad [|\varepsilon|] = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + ... + |\varepsilon_n|$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada; köşeli parantezler, Gauss gösterimine toplama işlemini ifade etmektedir. Bir diğer hata ölçütü muhtemel*(olası)* hata kullanılmaktadır.

r **-Muhtemel hata,** bir büyüklüğe ilişkin n adet deneysel verinin $\varepsilon_i = a_i - A$ gerçek hataları, $|\varepsilon_i| = |a_i - A|$; $i = 1,2,3,....,n$ şeklindeki mutlak değerlerine göre; büyükten küçüğe yada tersi sırada büyüklük sırasına dizilirler. Ortanca değer, bunları en iyi temsil eden değer kabul edilir ve r-muhtemel hata olarak tanımlanır. n sayısının tek sayı olması halinde, r-muhtemel hata; n tekrar sayısının tek sayı olması halinde,

$$r = |\varepsilon|_{\frac{n+1}{2}}$$

ve n tekrar sayısının çift sayı olması halinde de,

$$r = \frac{|\varepsilon|_{\frac{n}{2}} + |\varepsilon|_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

bağıntılarından hesaplanabilmektedir.

m**-Karesel ortalama hata**; normal dağılımdaki rasgele özelliklere sahip olan $-\varepsilon_i = a_i - A$; $i = 1,2,3,....,n$ hatalarının birleşik olasılık fonksiyonunu maksimum yapan $[\varepsilon\varepsilon] \Rightarrow \min.$ değerine karşılık gelen,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad ; \quad [\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + ... + \varepsilon_n^2$$

formülünden hesaplanır.
Bu ölçüt matematik istatistikte “standart sapma” ,ya karşılık gelen bir değer olduğundan, bazen de değişik kaynaklarda; “standart hata” olarak adlandırılmaktadır.

Günümüzde; yapılan birçok incelemeler neticesinde; farklı şekillerde tanımlanan bu tür hata ölçütleri arasında; $r = 0.674\ m$ ilişkisinin olduğu ve neticede,

$m \geq t \geq r$ sıralaması bulunmaktadır. Bütün hatalarla ilgili özellikleri en iyi yansıtması nedeniyle uygulamada daha çok bu hata ölçütü kullanılmaktadır.

Uygulamada; deneysel çalışmalar sonucunda elde edilen verilerden hiçbir zaman A gerçek sayı değeri bilinemez. Ancak, bunun yerine her zaman buna en yakın olan ve onu en iyi temsil eden en muhtemel değeri olan $\bar{x}$ - *kesin değeri* bilinebilir. Bu durumda, karesel ortalama hata, bu değerlere göre tanımlanır. Bu durumda gerçek hatanın tanımındaki gerçek değer yerine, onun hesaplamalar sonucunda değeri bilinen $\bar{x}$ kesin değeri kullanılarak tanımlanan, görünen hata; $-v = a - \bar{x}$ şeklinde tanımlanır. İlk yıllarda böyle kullanılmasına rağmen, daha sonraki yıllarda, özellikle 1960 yıllardan sonra *"Hata teorisiyle uğraşanlar tarafından",* bu tanımın yerine, görünen hatanın tersi işaretlisi olan sadece *"düzeltme"* terimi kullanılmaktadır. Bu iki hata arasında; $-v = a - \bar{x}$ ve $-\varepsilon = a - A$ bağıntılarından faydalanarak, $\varepsilon = (A - \bar{x}) + v$ kurularak, n adet ölçü için,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (A-\bar{x}) + v_1 \\ \varepsilon_2 &= (A-\bar{x}) + v_2 \\ &: \\ \varepsilon_n &= (A-\bar{x}) + v_n \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= (A-\bar{x})^2 + v_1^2 + 2v_1(A-\bar{x}) \\ \varepsilon_2^2 &= (A-\bar{x})^2 + v_2^2 + 2v_2(A-\bar{x}) \\ &: \\ \varepsilon_n^2 &= (A-\bar{x})^2 + v_n^2 + 2v_n(A-\bar{x}) \end{aligned}$$

yazılıp, her birinin $[\varepsilon]$ ve $[\varepsilon\varepsilon]$ toplamında; $[v] = 0$ ve gerçek hataların çapraz çarpımlarının umut değerinin $E\{\varepsilon_i \varepsilon_j\} = 0$ ve neticede, $[\varepsilon]^2 \cong [\varepsilon\varepsilon]$ olduğu dikkate alındığında, $(n-1)[\varepsilon\varepsilon] = n[vv]$ olduğu yazılabilir. Buna göre, tek parametreli bir büyüklüğe ilişkin n adet deney veri sonuçlarından, görünen hataları veya düzeltmeleri kullanarak, karesel ortalama hata, duyarlıkları eşit ve korelasyonsuz veriler için,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad ; \quad [vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\ldots + v_n^2$$

olarak hesaplanabilir.

Duyarlıkları eşit ve korelasyonsuz verilerden, $[vv] \Rightarrow \min.$ en küçük kareler ilkesine göre,

$$\bar{x} = \frac{[a]}{n}$$

şeklinde hesaplanan kesin değerin karesel ortalama hatası,

$$\begin{aligned} m_{\bar{x}} &= \pm\sqrt{(\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_1})^2 m^2 + (\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_2})^2 m^2 + \ldots\ldots + (\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_n})^2 m^2} \\ &= \pm\sqrt{m^2 + m^2 + \ldots\ldots + m^2} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

Verilerin farklı duyarlıkta ve korelasyonsuz olmaları halinde ise; $\bar{x}$ kesin değeri diğer adıyla genel ortalama değeri, p_i ; $i = 1, 2, \ldots.., n$ her bir verinin ne derece doğru ve güvenilir olduğunu gösteren ve tekrar sayıları olarak rastlanılan ağırlık değerlerini göstermek üzere, $[Pvv] \Rightarrow \min$. ilkesine göre elde edilen,

$$\bar{x} = \frac{[pa]}{n}$$

bağıntısından hesaplanır. Buna göre de; birim ağırlıktaki bir verinin karesel ortalama hatası;

$$m = \pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{n-1}} \quad ; \quad [Pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots\dots + p_n v_n^2$$

bağıntısından ve genel ortalamanın karesel ortalama hatası,

$$m_{\bar{x}} = \pm\frac{m}{\sqrt{[P]}} \quad ; \quad [P] = p_1 + p_2 + p_3 + \dots\dots + p_n$$

olarak hesaplanır. Verilerin korelasyonlu olmaları durumunda da; $\underline{P} = \underline{Q}^{-1}$ veriler arasındaki ters ağırlık matrisinden faydalanılır. Buna göre; kesin değer, $e^T = [1 \quad 1 \quad \dots\dots \quad 1]$ birim vektör olmak üzere,

$$\bar{x} = \frac{\underline{e}^T \underline{P}\underline{a}}{\underline{e}^T \underline{P}\underline{e}}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde, birim ağırlıkta bir verinin karesel ortalama hatası,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\underline{v}^T \underline{P}\underline{v}]}{n-1}}$$

ve genel ortalamanın karesel ortalama hatası da,

$$m_{\bar{x}} = \pm\frac{m}{\sqrt{\underline{e}^T \underline{P}\underline{e}}}$$

olarak bulunurlar.

Özetle, hata teorisi bakımından, sayısal çözümlemede, durum böyle olmasına rağmen, algoritma çözümlerinde *kondisyon* bozuklukları nedeniyle algoritma çözüm işlemi ünitesinde etkili olabilecek, daha çok bu ünitedeki sayılardaki kesme ve yuvarlatmalardan kaynaklanacak hatalarla uğraşılmaktadır. Buna karşılık, input yada girdi ünitesi verilerinde olabilecek ölçü hataları ile parametre kestiriminin söz konusu olduğu algoritma çözümlerinde bu hataların yanında *rastgele ölçü hataları* ile de uğraşılmaktadır. Bu nedenle, yuvarlatılmış veya kesme hatalarını da içinde bulundurabilecek sayıların kullanıldığı, girdi ünitesindeki sayıların hatasız kabul edildiği sayısal çözümleme algoritmalarında daha çok mutlak hata ve bağıl hata ölçütleri kullanılmaktadır.

Örnek: Bir deney sonucunda elde edilen verilerin ε-gerçek hataları, $\varepsilon_1 = -2$, $\varepsilon_2 = +3$, $\varepsilon_3 = -4$, $\varepsilon_4 = +6$, $\varepsilon_5 = +5$ olarak verilmektedir. Bu verilere ilişkin, muhtemel hatayı, mutlak hatalar ortalamasını ve karesel ortalama hata değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

a) Muhtemel hata; önce bu hataların mutlak değerleri alarak, büyüklüklerine göre;

$$|\varepsilon_1| = |-2|,\quad |\varepsilon_2| = |+3|,\quad |\varepsilon_3| = |-4|,\ ,\ |\varepsilon_5| = |+5|, |\varepsilon_4| = |+6|$$

şeklinde sıralandıklarında ortaya gelen değer, $|\varepsilon_3| = |-4|$ olduğundan, muhtemel hata;

$$r = +4$$

olur.

b) *Mutlak hatalar ortalaması:*

$$[|\varepsilon|] = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + |\varepsilon_4| + |\varepsilon_4| = 20 \text{ ve tekrar sayısı } \quad n = 5$$

alınarak,

$$t = \frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{20}{5} = +4$$

olarak hesaplanır.

c) *Karesel ortalama hatası;*

$$[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 = 90$$

olduğundan,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{90}{5}} = \pm 4.23$$

olarak hesaplanır.

Örnek: Deney sonucunda, bir büyüklüğe ilişkin elde edilen veriler;

71, 79, 68, 67, 71, 64, 73, 76, 79

olarak verilmektedir. Bu verilere ilişkin kesin değeri ve karesel ortalama hatasını hesaplayınız.

Çözüm: Çözüm daha kolay ve basit bir şekilde yapılabilmesi için veriler,

i	a_i **- veriler**	$v_i = \bar{x} - a_i$	v_i^2
1	*71*	*1*	*1*
2	*79*	*-7*	*49*
3	*68*	*4*	*16*
4	*67*	*5*	*25*
5	*71*	*1*	*1*
6	*64*	*8*	*64*
7	*73*	*-1*	*1*
8	*76*	*-4*	*16*
9	*79*	*-7*	*49*
$[a] = 648$ $\bar{x} = \frac{[a]}{9} = \frac{648}{9} = 72$		$[v] = 0$ *Denetim*	$[vv] = 222$

şeklinde bir tabloya yerleştirilerek kesin değer(*aritmetik ortalama*), görünen düzeltmeler ve daha sonra da karelerinin toplamı hesaplanır. Buradan, kesin değerin*(aritmetik ortalamanın)* karesel ortalama hatası, birim verinin karesel ortalama hatası,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1} = \frac{222}{9-1}} = \pm 5.22$$

şeklinde elde edildikten sonra

$$m_{\bar{x}} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{5.22}{\sqrt{9}} = \pm 1.76$$

olarak hesaplanır.

ÖRNEK PROBLEMLER

Örnek 1: $A = \frac{a}{b}c$ ifadesinde; $a = 10.00$, $\Delta_{(a)} = 0.02$, $b = 2.00$, $\Delta_{(b)} = 0.01$, $c = 4.00$ ve $\Delta_{(c)} = 0.03$ olarak verildiğine göre, A değerinin $\Delta_{(A)} = ?$ mutlak ve $\delta_{(A)} = ?$ bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm 1: Burada bir çarpımın ve bölümün bağıl hatalarının hesaplanmasındaki kurallardan hareket ederek,

$$\delta_{(A)} = \delta_{(\frac{a}{b})} + \delta_{(c)} = \delta_{(a)} + \delta_{(b)} + \delta_{(c)}$$

yazılabilir. Her bir elamanın bağıl hatası için,

$$\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} \;, \; \delta_{(b)} = \frac{\Delta_{(b)}}{|b|} \text{ ve } \delta_{(c)} = \frac{\Delta_{(c)}}{|c|}$$

oldukları göz önüne alınarak, A sonucun bağıl hatası,

$$\delta_{(A)} = \delta_{(\frac{a}{b}c)} = \delta_{(a)} + \delta_{(b)} + \delta_{(c)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} + \frac{\Delta_{(b)}}{|b|} + \frac{\Delta_{(c)}}{|c|} = \frac{0.02}{10.00} + \frac{0.01}{2.00} + \frac{0.03}{4.00} = 0.0145$$

olarak hesaplanır. Mutlak hatanın tanımından hareket ederek, A değerinin mutlak hatası,

$$\delta_{(A)} = \frac{\Delta_{(A)}}{|A|}$$

bağıntısından,

$$\delta_{(A)} = \frac{\Delta_{(A)}}{|A|} \; \Delta_{(A)} = |A|\delta_{(A)} = \left|\frac{a}{b}c\right|\delta_{(A)} = 20(0.0145) = 0.29 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 2: Bir dik üçgende; α açısına komşu dik kenar uzunluğu $a = 10.00m$ ve mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.02m$ olarak verilmiştir. Ayrıca, $\sin\alpha = 0.6$ ve $\Delta_{(\alpha)} = 0.02^g$ verilmektedir. Karşı dik kenarın mutlak ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm 2: Bu dik üçgende, α açısının karşısındaki kenar uzunluğu b ile gösterilirse,

$$b = a \; \tan\alpha$$

olur. Burada;

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

hesaplanır.

Neticede, karşı dik kenarın mutlak hatası, $\rho = \dfrac{200}{\pi} \cong 63^g.6620$ olmak üzere,

$$\Delta_{(b)} = \tan\alpha \; \Delta_{(a)} + a \; \frac{1}{\cos^2\alpha} \frac{\Delta_{(\alpha)}}{\rho} = 0.75(0.02) + 10.00 \; \frac{1}{0.64} \frac{0.02^g}{63.6620^g} =$$
$$= 0.0199 \cong 0.02 \; m.$$

hesaplanır. Bağıl hatası da, benzer şekilde bağıl hatanın tanımından faydalanarak,

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.02}{|a \tan\alpha|} = \frac{0.02}{7.5} = 0.0027$$

olarak bulunur.

Örnek 3: Bir dik üçgende; α açısına komşu dik kenar uzunluğu $a = 10.00m$ ve karesel ortalama hatası $m_a = 0.02m$ olarak verilmiştir. Ayrıca, $Sin\alpha = 0.6$ ve $m_\alpha = 0.02^g$ verilmektedir. Karşı dik kenarın $m_b = ?$ karesel ortalama hatasını hesaplayınız.

Çözüm 3: bir önceki örnek de olduğu gibi, bu dik üçgende, α açısının karşısındaki kenar uzunluğu b ile gösterilirse,

$$b = a \tan\alpha$$

olur. Burada;

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

olarak hesaplanabilir. Hataların yayılması kuralından hareket ederek, üçgenin b dik kenarının m_b – karesel ortalama hatası,

$$m_{(b)} = \pm\sqrt{(\frac{\partial b}{\partial a})^2 m_a^2 + (\frac{\partial b}{\partial \alpha})^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \pm\sqrt{\tan^2\alpha \; m_a^2 + (a\frac{1}{\cos^2\alpha})^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} =$$

$$= \pm\sqrt{(0.75)^2 \; (0.02)^2 + (10.00\frac{1}{0.64})^2 \frac{(0.02)^2}{(63.6620)^2}} = \pm 0.01578 \; m.$$

olarak hesaplanır.

Problem:1)

$$d = (a^2 - \sqrt[3]{b}) \qquad d = (a^2 + \sqrt[3]{b}) \qquad d = \frac{(a^3 - b)}{c}$$

$$d = (a^2 - \sqrt[3]{b})10 \quad ; \quad d = (a^2 + \sqrt[3]{b})10 \quad \text{ve}$$

$$d = (a^2 - \sqrt[3]{b})\ c \qquad d = (a^2 + \sqrt[3]{b})\ c \qquad d = \frac{(a^3 + b)^2}{6c}$$

işlem sonuçlarının $\Delta_{(d)}$ mutlak ve $\delta_{(d)}$ bağıl hatalarını; $a = 4.00$, $b = 8.00$, $c = 3.00$ alarak ve mutlak hataları için de $\Delta_{(a)} = 0.03$, $\Delta_{(b)} = 0.02$, $\Delta_{(c)} = 0.01$ değerlerini kullanarak, hesaplayınız.

Problem 2)

$$y = \sin\alpha - \sin\beta \quad ; \quad y = \sin\alpha - Cos\beta \quad ; \quad y = \sin(\alpha - \beta) \quad \text{ve} \quad y = \cos(\alpha - \beta)$$

$$y = \sin\alpha + \sin\beta \qquad y = \sin\alpha + Cos\beta \qquad y = \sin(\alpha + \beta) \qquad y = Cos(\alpha + \beta)$$

fonksiyonlarının $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hatalarını, $\sin\alpha = 0.866$, $\sin\beta = 0.471$ değerleri için, $\Delta_{(\alpha)} = 0.06$, $\Delta_{(\beta)} = 0.02$ mutlak hatalarına göre hesaplayınız.

Problem 3)

$$y = \ln x \qquad y = \log x \qquad y = \ln\sqrt{x} \qquad y = \ln x^3 \qquad y = \log x^2$$

fonksiyonlarının $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hatalarını; $x = 25.00$ için $\Delta_{(x)} = 0.02$ alarak hesaplayınız. *(Burada; yaklaşık olarak $\mu \cong 0.43..$ alınabilir.)*

Problem 4)

$$z = \log\frac{x-y}{x+y} \qquad z = \ln\frac{x-y}{x+y} \qquad z = \frac{x-y}{x+y} \qquad z = \sqrt{x-y} \qquad z = (x-y)^2$$

$$z = \log\frac{x+y}{x-y} \qquad z = \ln\frac{x+y}{x-y} \qquad z = \frac{x+y}{x-y} \qquad z = \sqrt{x+y} \qquad z = (x+y)^2$$

fonksiyonlarının, $\Delta_{(z)}$ mutlak ve $\delta_{(z)}$ bağıl hatalarını; $x = 8.00$, $y = 2.00$ ve mutlak hataları $\Delta_{(x)} = 0.06$, $\Delta_{(y)} = 0.02$ alarak hesaplayınız.*($\mu \cong 0.43..$ alınabilir.)*

Problem 5) Bir eşkenar üçgenin kenarlarından biri, $a = 8.00cm$ ve mutlak hatası da $\Delta_{(a)} = 0.5cm$ olarak verildiğine göre, üçgenin alanı, mutlak ve bağıl hataları ne kadar olur? Hesaplayınız.

Problem 6) Bir küpün kenarlarından biri, $a = 10.00cm$ ve mutlak hatası da $\Delta_{(a)} = 0.5cm$ olarak verildiğine göre, küpün hacmi, mutlak ve bağıl hataları ne kadar olur? Hesaplayınız.