

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren, çalışma sürecinde benden yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Sultan YAMAK' a emeği için en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma yüksek lisans öğrenimim süresince gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkür ederim.

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

Fatma KUŞDİLİ

Trabzon 2021

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “GENELLEŞTİRİLMİŞ TL-ALT MODÜLLER” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Sultan YAMAK’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/06/2021

Fatma KUŞDİLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kafesler.....	3
1.3. Tam Kafes Üzerinde T-normlar.....	5
1.4. L-alt Kümeler.....	8
1.5. TL-i-alt Gruplar, TL-i-alt Halkalar ve TL-i-(sol, sağ) İdealler	10
1.6. Modül Teorisi	26
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	29
2.1. TL-i-alt Modüller	29
2.2. TL- θ -i-alt Modüller	61
3. İRDELEME	74
4. SONUÇLAR.....	75
5. ÖNERİLER	76
6. KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TL -ALT MODÜLLER

Fatma KUŞDİLİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Sultan YAMAK
2021, 81 Sayfa

Bu tezin amacı $TL - i$ -alt modül ve $TL - \theta - i$ -alt modül yapılarını incelemek, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yapılan çalışmaların amacı, çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Araştırmanın ikinci bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, $TL - i$ -alt modül tanımları verilerek bunlara bağlı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca $TL - i$ -alt modüllerin kafes yapılarından özellikle modüler ve dağılımlı kafes yapıları incelenmiştir. İkinci kısımda, $TL - \theta - i$ -alt modül tanımları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: TL -alt grup, TL -alt halka, TL -ideal, TL -alt modül, $TL - i$ -alt grup, TL -alt halka, $TL - i$ -ideal, $TL - i$ -alt modül, $TL - \theta - i$ -alt modül

Master Thesis

SUMMARY

GENERALIZED TL -SUBMODULES

Fatma KUŞDİLİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Sultan YAMAK
2021, 81 Pages

The aim of the present thesis is to examine the structures of $TL - i$ -submodule and $TL - \theta - i$ -submodule, and to investigate the relationship between their basic features and results.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains two parts. In the first part, the definition of $TL - i$ -submodule are given. Furthermore, their main properties are presented. In addition, the lattice structures of $TL - i$ -submodules, especially modular and distributive lattice structures, are examined. In the last part, the definition of $TL - \theta - i$ -submodules are given and their algebraic characteristics are investigated.

Key Words: TL -subgroup, TL -subring, TL -ideal, TL -submodule, $TL - i$ -subgroup, $TL - i$ -subring, $TL - i$ -ideal, TL - i -submodule, $TL - \theta - i$ -submodule

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.3.1: L kafesinin diyagramı.....	7
Şekil 1.3.2: $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \rho, 1\}$ nin kafes diyagramı	7
Şekil 1.5.1: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_1, L)$ nin kafes diyagramı	12
Şekil 1.5.2: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_2, L)$ nin kafes diyagramı	13
Şekil 1.5.3: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_3, L)$ nin kafes diyagramı	13
Şekil 1.5.4: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_4, L)$ nin kafes diyagramı	13
Şekil 1.5.5: $FG_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı	14
Şekil 1.5.6: $FG_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı	15
Şekil 1.5.7: $FG_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı	15
Şekil 1.5.8: $FG_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı	15
Şekil 1.5.9: $FH_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı	18
Şekil 1.5.10: $FH_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı	19
Şekil 1.5.11: $FH_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı	19
Şekil 1.5.12: $FH_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı	19
Şekil 1.5.13: $FI_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı.....	24
Şekil 1.5.14: $FI_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı.....	24
Şekil 1.5.15: $FI_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı.....	24
Şekil 2.1.1: $FM_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı.....	33
Şekil 2.1.2: $FM_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı.....	33

Şekil 2.1.3: $FM_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı.....	34
Şekil 2.1.4: $FM_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı.....	34



TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.3.1: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ üzerindeki t-normlar	7
Tablo 1.3.2: $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \rho, 1\}$ üzerindeki t-norm	7
Tablo 1.5.1: G nin TL –alt gruplarının gösterimleri ve isimlendirmeleri	10
Tablo 1.5.2: $\mathbb{Z}_2$ nin $T_{1-4}L$ –alt grupları	11
Tablo 1.5.3: $\mathbb{Z}_3$ ün T_1L –alt grupları	14
Tablo 1.5.4: R nin TL –alt halkalarının gösterimleri ve isimlendirmeleri	17
Tablo 1.5.5: $\mathbb{Z}_3$ ün TL –alt halkaları	18
Tablo 1.5.6: R nin TL –ideallerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri	22
Tablo 1.5.7: $\mathbb{Z}_3$ nin özel TL –idealleri	23
Tablo 2.1.1: M nin TL –alt modüllerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri.....	31
Tablo 2.1.2: $\mathbb{Z}_3$ ün L –alt kümeleri	32
Tablo 2.1.3: Modüller için özel L -alt kümeler.....	40
Tablo 2.2.1: M nin $TL - \theta - i$ alt modüllerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri	61

SEMBOLLER DİZİNİ

$a \vee b$	a ile b nin supremumu
$a \wedge b$	a ile b nin infimumu
$\bigvee_{i \in \Omega} a_i$	$\{a_i i \in \Omega\}$ ailesinin supremumu
$\bigwedge_{i \in \Omega} a_i$	$\{a_i i \in \Omega\}$ ailesinin infimumu
D_T	T t-normunun idempotent elemanlarının kümesi
$F(X, L)$	X in L -alt kümelerinin kümesi
$\tilde{F}(X, L)$	X in bulanık alt kümelerinin kümesi
1_A	A nın karakteristik fonksiyonu
$Im\mu$	μ nün görüntü kümesi
μ_a	μ nün a -seviye alt kümesi
$\mu \cup \vartheta$	μ ile ϑ nün birleşimi
$\mu \cap \vartheta$	μ ile ϑ nün kesişimi
$\mu T \vartheta$	μ ile ϑ nün T -kesişimi
$\bigcup_{i \in \Omega} \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Omega\}$ L -alt kümelerinin ailesinin birleşimi
$\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Omega\}$ L -alt kümelerinin ailesinin kesişimi
$\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Omega\}$ L -alt kümelerinin ailesinin T -kesişimi
$\prod_{i \in \Omega} \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Omega\}$ L -alt kümelerinin ailesinin kartezyen çarpımı
$\prod_{i \in \Omega}^T \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Omega\}$ L -alt kümelerinin ailesinin T -kartezyen çarpımı

$f(\mu)$	μ nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\vartheta)$	ϑ nün f altındaki ters görüntüsü
$\text{FG}_i(G, T, L)$	G nin $TL - i$ -alt grubu
$\text{FH}_i(R, T, L)$	R nin $TL - i$ -alt halkası
$\text{FLI}_i(R, T, L)$	R nin $TL - i$ -sol ideali
$\text{FRI}_i(R, T, L)$	R nin $TL - i$ -sağ ideali
$\text{FI}_i(R, T, L)$	R nin $TL - i$ -ideali
$\sum_{i \in \Lambda} A_i$	$\{A_i i \in \Lambda\}$ alt modüllerin ailesinin toplamı
$A + B$	A ile B kümelerinin toplamı
$-A$	A kümesinin tersi
$S.A$	S ile A kümelerinin skaler çarpımı
$S \odot A$	S ile A kümelerinin güçlü skaler çarpımı
$\text{FM}_i(M, T, L)$	M nin $TL - i$ -alt modülü
$\sum_{i=1}^n \mu_i$	$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ L -alt kümelerin T -toplamı
$-\mu$	μ nün tersi
$\theta \cdot_T \mu$	θ ile μ nün T -çarpımı
$\theta \odot_T \mu$	θ ile μ nün güçlü T -çarpımı
$\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Lambda\}$ ailesinin güçlü T -toplamı denir
$\text{FM}_i(M, T, L, \theta)$	M nin $TL - i - \theta$ -alt modülü

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

1965 yılında, Azeri asıllı Amerikalı Lotfi A. Zadeh [76] tarafından geliştirilen "bulanık küme" kavramı, iki değerli mantık kuramlarına bir alternatif oluşturmuş ve onunla doğrudan ilgili bilimlerde akıl almaz derecede hızlı gelişmeleri tetiklemiştir. Bulanık küme teorisi, 1967 yılında Goguen [22] tarafından üyelik kümesini $[0,1]$ birim aralığından kafeslere genişletmiştir. Bulanık kümeler teorisi başlangıçtan bu yana geniş bir uygulama alanı elde etti. Bu uygulama alanlarından bazıları; bilgisayar bilimi, yapay zekâ, karar analizi, bilgi bilimi, sistem bilimi, kontrol mühendisliği, uzman sistemler, yönetim bilimi, yöneylem araştırması ve robotiktir.

1971 yılında Rosenfield [57] bulanık küme kavramını teorik cebire uygulayan öncülerden biri olarak bulanık alt grup kavramını tanımladı. O tarihten bu yana çeşitli bulanık cebirsel yapılara ait üretimler hızlı bir şekilde artmaya başladı ve bu artış günümüzde de devam etmektedir. Örneğin, Anthony [7] bulanık alt grup kavramını $[0,1]$ üzerinde t-normlara genişletti. Kuroki [37] bir yarıgrup için bulanık ideallerin özelliklerini araştırdı. Liu [38, 39] bulanık alt halka, bulanık idealler, L -alt halka ve idealleri verdi. Negoita ve Ralescu [53], bulanık alt modül kavramlarını tanıttılar. Katkaras [31] bulanık vektör uzaylarını tanıttı. Nanda [51] da bulanık cisimler ve bulanık alt vektör uzaylarını tanıttı. Konuyla ilgili ileri detay için [15, 20, 26, 34, 36, 39-41, 43, 44, 51, 52, 55, 59, 63, 69, 72] kaynaklarına bakılabilir.

Bulanık alt cebirsel yapılardan özellikle yarıgrup, grup, halka ve modül teorisi üzerinde genelleştirmeler oldu. Bu genelleştirmeler genel olarak $[0,1]$ yerine keyfi bir tam kafes ve yine bu tam kafes üzerinde keyfi bir t-norm alınarak yapıldı. Geniş bir kaynağa sahip bu alanla ilgili bazı çalışmalar [1, 19, 25, 27, 48, 71, 73, 74, 77, 78] şeklinde verilebilir.

Cebirsel yapılardan gruplar teorisi, halkalar teorisi ve modül teorisine ait alt cebirsel yapılarının kafes özelliklerini incelemek her zaman önemli olmuştur. Bu alandaki çalışmalar 20.yüzyıldan beri devam etmektedir. Özellikle bir grubun alt grupları, normal

alt grupları; bir halkanın alt halkaları, (sol, sağ) idealleri; bir modülün alt modülleri " $\subseteq$ " bağıntısı ile tam kafes oluşturdıkları çok iyi bilinen özelliklerdendir. Bunlara ilave olarak, bir grubun normal alt grupları, bir halkanın (sol, sağ) idealleri, bir modülün alt modüllerinin kafesleri daima modüler kafestir. Bununla birlikte bu alt cebirsel yapılara ait kafeslerin dağılımlı olması onları özel cebirsel yapılara taşımıştır. Bu konularla ilgili daha geniş bilgi için [17, 18, 53, 58, 60, 64] kaynaklarına bakılabilir.

Yukarıda bahsi geçen alt cebirsel yapılara paralel olarak bulanık alt cebirsel yapılarının özellikleri incelendi. Örneğin, Ajmal [3-5] çalışmalarında bulanık alt grupların ve L -alt grupların kafeslerine ait modülerlik özelliğini inceledi. Ajmal [6] bir halkanın bulanık ideallerinin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Head [24] klasik modülerlik yapıların bulanık alt cebirsel yapılarda doğru olduğunu gösterdi. Gupta [23] ve Ray [56], bir zincir tam kafesi üzerinde sonsuz V -dağılımlı T t-normu için Quasi-Hemilton gruplarında özel TL -alt grupların kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Majumdar ve Sultana [42] bir halkanın bulanık ideallerinin kafesinin dağılımlı olduğunu gösterdi. Kumar [35] ve Zhang [79] ideallerin özel kafeslerinin modüler olduğunu ve Majumdarın sonucunun doğru olmadığına ait örnekler verdiler. Zhang [80] ve Jahan [29] farklı ispatlar üreterek bir halkanın bulanık ideallerinin kafesinin modüler olduğunu gösterdiler. Tarnauceanu [61] L -altgrupların kafesinin dağılımlı olması ile ilgili bir karakterizasyon verdi. Tarnauceanu [62] devirli p -grupların bir karakterizasyonunu bulanık alt gruplarla elde etti. Jahan [30] dağılımlı bir L tam kafesi üzerinde L -ideallerinin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Gao [21] dağılımlı bir kafes ile üretilen genişletilmiş L -ideallerinin dağılımlı kafes yapısını inceledi. Bhambri [14] t-seviyeli bulanık alt modüllerin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Bayrak [9, 11] özel genelleştirilmiş L -alt grupların kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Bayrak [10] sonsuz dağılımlı bir L tam kafesi üzerinde L -alt modüllerin kafesinin modüler olduğu gösterdi. Bayrak [12] özel genelleştirilmiş L -alt grupların kafesinin dağılımlılığı ve yarı-komplementliği ile ilgili özellikleri verdi. Bayrak [13] sonsuz V -dağılımlı kafesler üzerinde L -idealinin kafes yapısını inceleyerek kafesin dağılımlı olması için gerek ve yeter şart verdi.

Gruplar, halkalar ve modüller üzerinde nihai genelleştirmelerden TL -alt alt gruplar, TL -alt halkalar, TL -idealler, TL -alt modüller ve bunların kafes yapılarına ait bazı bilgiler [10, 11, 32, 56, 65-68, 70, 75] çalışmalarında verilmiş ve bu bilgiler bize yol gösterici olmuştur. Bunun dışında TL -altgrup çeşitleri Ray [56] ve Bahadır [8] tarafından incelendi.

Yine bir L -alt halka kullanılarak L -idealler ve L -alt modüller Martinez [45, 46, 47] ve Acar [2] tarafından incelendi.

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel olarak ikinci bölüme kaynak oluşturabilecek bilgiler altı kısma ayrılarak verildi. Özellikle üçüncü kısımda ilk kez bu tezde tanımlanan $TL - i$ -alt halka ve $TL - i$ -(sol, sağ) ideal çeşitleri tanımlandı. Bunlara ait bazı özelliklerin ispatları, $TL - i$ -alt grup yapılarına ait özelliklerle benzerliklerinden dolayı verilmedi.

Yapılan çalışmalar bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Bahadır [8] ve Ray [56]' in bakış açılarından esinlenerek $TL - i$ alt modüller tanıtılıp onların kafes yapıları ve önemli özellikleri incelendi. Bu incelemelerin sonunda literatürde mevcut olan bazı sonuçlar elde edildi. İkinci kısımda, Acar [2], Martinez [45-47] yazarlarının çalışmaları dikkate alınarak, bir R halkası üzerinde bir L -alt küme alınarak $TL - i - \theta$ -alt modüller tanıtıldı ve bu alt modüllerin bazı özellikleri verildi.

1.2. Kafesler

Bu bölümde kafes teorisine ait temel tanımlar ve ilgili teoremler verilecektir. Konuyla ilgili kapsamlı bilgiler [16] kaynağından edinilebilir.

Tanım 1.2.1: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

- i) L ya kafes (örgü) denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $\text{Sup}\{a, b\} = a \vee b$ ve $\text{Inf}\{a, b\} = a \wedge b$ mevcuttur.
- ii) $(L, \leq)$ tam sıralı küme (zincir) denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$.
- iii) $(L, \leq)$ tam kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $B \subseteq L$ için $\text{Sup}B$ ve $\text{Inf}B$ mevcuttur.
- iv) $(L, \leq)$ sınırlı kafes denir : $\Leftrightarrow L$ kafes ve $1 = \text{EBEL}$, $0 = \text{EKEL}$ mevcuttur.

Teorem 1.2.2: $(L, \leq)$ sıralı bir küme ve $x, y \in L$ olsun.

- i) L tam sıralı ise L kafestir,
- ii) L tam kafes ise L kafestir,
- iii) L tam kafes ise L sınırlı kafestir.

Teorem 1.2.3: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

- i) L kafes, $\emptyset \neq T \subseteq L$, T sonlu küme ise $\inf T$, $\sup T$ mevcuttur,
- ii) L kafes ve $\emptyset \neq L$ sonlu küme ise L tam kafestir.

Teorem 1.2.4: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i) $(L, \leq)$ tam kafestir,
- ii) Her $B \subseteq L$ için $\inf B$ mevcuttur,
- iii) Her $B \subseteq L$ için $\sup B$ mevcuttur,
- iv) $1 \in L$ ve her $\emptyset \neq T \subseteq L$ için $\inf T$ mevcuttur,
- v) $0 \in L$ ve her $\emptyset \neq T \subseteq L$ için $\sup T$ mevcuttur.

Tanım 1.2.5: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Bu durumda,

- i) L ye dağılımlı kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için
 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ve $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- ii) L ye modüler kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise
 $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.

Tanım 1.2.6: $(L, \leq)$ bir tam kafes olsun.

- i) L ye sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için
 $a \wedge (\bigvee_{i \in J} b_i) = \bigvee_{i \in J} (a \wedge b_i)$,
- ii) L ye sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için
 $a \vee (\bigwedge_{i \in J} b_i) = \bigwedge_{i \in J} (a \vee b_i)$,

- iii) L ye sonsuz dağılımlı kafes denir : $\Leftrightarrow L$ sonsuz $\vee$ -dağılımlı ve sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafestir.

Teorem 1.2.7: $(L, \leq)$ kafes olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

- i) Her $x, y, z \in L$ için $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$,
- ii) Her $x, y, z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
- iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$.

Teorem 1.2.8:

- i) L tam sıralı ise L dağılımlı kafestir,
- ii) L sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes ise L dağılımlı kafestir,
- iii) L sonsuz $\wedge$ -dağılımlı kafes ise L dağılımlı kafestir,
- iv) L dağılımlı kafes ise L modüler kafestir.

Tanım 1.2.9: $(L, \leq)$ bir kafes ve $\emptyset \neq T \subseteq L$ olsun.

T ye alt kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in T$ için $a \vee b, a \wedge b \in T$.

1.3. Tam Kafes Üzerinde T –normlar

Bu bölümde üçgensel norm (kısaca t -norm) kavramı açıklanacaktır. Ayrıntılı bilgi [11, 33, 56] kaynaklarından elde edilebilir. Diğer yandan aksi söylenmedikçe, L daima tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.3.1: $(L, \leq)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $T: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine bir t -norm denir : $\Leftrightarrow$

- i) Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$, (Değişme Özelliği)
- ii) Her $x, y, z \in L$ için $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$, (Birleşme özelliği)
- iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $T(x, z) \leq T(y, z)$, (Monotonluk Özelliği)
- iv) Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$. (Sınır Şartı Özelliği)

Herhangi $x, y \in L$ için $T(x, y)$ notasyonu yerine xTy notasyonu da kullanılabilir. Her

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in L \text{ için } T \begin{matrix} n \\ x_i \end{matrix} = T \begin{matrix} n-1 \\ T \begin{matrix} n-1 \\ x_i, x_n \end{matrix} \end{matrix} \text{ olarak alınacaktır.}$$

Tanım 1.3.2: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun.

- i) T ye L üzerinde $\vee$ -dağılımlı t -norm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2).$$

- ii) T ye L üzerinde sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L, i \in J$ için

$$T(a, \vee_{i \in J} b_i) = \vee_{i \in J} T(a, b_i).$$

Tanım 1.3.3: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. $a \in L$ ye L nin, T t -normuna göre bir idempotent elemanı denir : $\Leftrightarrow T(a, a) = a$ dır.

L nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $D_T = \{a \in L | T(a, a) = a\}$ ile gösterilir.

Örnekler 1.3.4: Bir L bir tam kafesi üzerinde aşağıdaki t -norm örnekleri verilebilir:

- i) Her $x, y \in L$ için

$$T_D(x, y) = \begin{cases} x \wedge y, & 1 \in \{x, y\} \\ 0 & , 1 \notin \{x, y\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_D ikili işlemi L üzerinde bir t -normdur.

- ii) Her $x, y \in L$ için

$$T_M(x, y) = x \wedge y$$

şeklinde tanımlanan T_M ikili işlemi L üzerinde bir t -normdur.

Burada $D_{T_D} = \{0,1\}$, $D_{T_M} = L$ dir.

Örnek 1.3.5: $L = [0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlanan temel t -normlar aşağıdaki şekildedir.

- i) $T_P(x, y) = x \cdot y$, (Çarpım)
- ii) $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, (Lukasiewicz t -norm)
- iii) $T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ \min(x, y), & x + y > 1 \end{cases}$, (Nilpotent Minimum)

Burada $D_{T_P} = \{0,1\}$, $D_{T_L} = \{0,1\}$, $D_{T^{nM}} = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$ dir.

Tanım 1.3.6: $(L, \leq)$ bir tam kafes ve T_1, T_2 , L üzerinde herhangi iki t -norm olsun. T_1, T_2 den zayıftır (veya T_2, T_1 den güçlüdür) denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ ' dir. Bu durum $T_1 \leq T_2$ şeklinde yazılır.

Uyarı 1.3.7: L üzerindeki herhangi bir T t -normu için $T_D \leq T \leq T_M$ olduğundan T_D, L üzerindeki en zayıf t -norm ve $T_M = \wedge$, L üzerindeki en güçlü t -normdur.

Teorem 1.3.8: L bir tam kafes ve T , L üzerinde t -norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçekleşir:

- i) $\forall x, y \in L$ için $T(x, y) \leq x \wedge y$,
- ii) $\forall x \in L$ için $T(x, 0) = T(0, x) = 0$,
- iii) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$.

Teorem 1.3.9: L bir tam kafes ve T , L üzerinde bir t -norm olsun. I ve J birer indis kümesi olmak üzere $\{a_i \in L | i \in I\}$, $\{b_j \in L | j \in J\}$ aileleri ve $b \in L$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

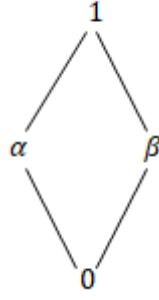
- i) $(\bigwedge_{i \in I} a_i) T (\bigwedge_{j \in J} b_j) \leq \bigwedge_{i \in I} (a_i T b_j)$,
- ii) $(\bigwedge_{i \in I} a_i) T b \leq \bigwedge_{i \in I} (a_i T b)$.

Teorem 1.3.10: $(L, \leq)$ bir tam kafes ve T , L üzerinde bir t -norm olsun. Bu taktirde,

- i) $a, b \in D_T$ ise $a T b \in D_T$,
- ii) $\{a_i | i \in I\} \subseteq D_T$ ise $\bigvee_{i \in I} a_i \in D_T$,
- iii) $(D_T, \leq)$ tam kafestir.

Tanım 1.3.11: D_T tam kafesinde $\{a_i | i \in I\}$ ailesinin infimum değeri $\bigwedge_{i \in I}^T a_i$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.12: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ kümesine ait kafes diyagramı ve L kümesi üzerindeki t -normlar aşağıdaki şekildedir.

Şekil 1.3.1: L kafesinin diyagramıTablo 1.3.1: L üzerindeki t-normlar

T_1	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	0	0	α
β	0	0	0	β
1	0	α	β	1

T_2	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	0	β
1	0	α	β	1

T_3	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	0	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

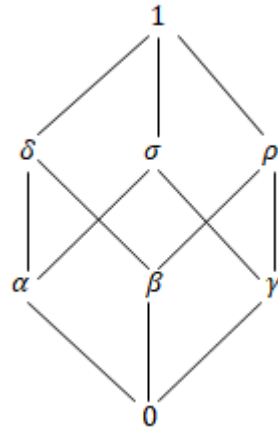
T_4	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

Burada $D_{T_1} = \{0,1\}$, $D_{T_2} = \{0, \alpha, 1\}$, $D_{T_3} = \{0, \beta, 1\}$, $D_{T_4} = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ dir.

Örnek 1.3.13: $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \rho, 1\}$ kümesine ait kafes diyagramı ve L üzerindeki t-norm ikili işlemi sırasıyla

Tablo 1.3.2: L üzerindeki t-norm

T	0	α	β	γ	δ	σ	ρ	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
α	0	α	0	0	α	α	0	α
β	0	0	0	0	0	0	0	β
γ	0	0	0	γ	0	γ	γ	γ
δ	0	α	0	0	δ	α	0	δ
σ	0	α	0	γ	α	σ	γ	σ
ρ	0	0	0	γ	0	γ	ρ	ρ
1	0	α	β	γ	δ	σ	ρ	1

Şekil 1.3.2: L nin kafes diyagramı

Tablo 1.3.5 ve Şekil 1.3.1 de veriliyor. Buna göre, $\delta, \rho \in D_T = \{0, \alpha, \gamma, \delta, \sigma, \rho, 1\}$ ve

$\rho \wedge \delta = \beta \notin D_T$. Yani D_T nin L nin bir alt kafesi olması gerekmez.

1.4. L -alt Kümeler

L -bulanık alt kümeler, Zadeh [76] in tanıttığı bulanık alt kümelerinin bir genellemesi olarak Goguen [22] tarafından 1967 yılında tanıtılmıştır. Burada L -alt kümelere ait bazı tanım ve teoremler verilecektir. Konuyla ilgili daha fazla bilgi için [49, 56] kaynaklarına başvurulabilir.

Tanım 1.4.1: L bir tam kafes ve $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. Her bir $\mu: X \rightarrow L$ fonksiyonuna X in bir L -alt kümesi denir. X in bütün L -alt kümelerinin kümesine X in L -güç kümesi denir ve $F(X, L)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = [0, 1]$ olarak seçilirse μ ye X in bir bulanık alt kümesi denir ve X in tüm bulanık alt kümelerinin kümesi $F(X)$ ile gösterilir. $\mu \in F(X, L)$ ve $a \in X$ için $\text{Im}\mu$, $F(X, T, L)$ ve $F_\alpha(X, L)$ kümeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde alınacaktır. $\{\mu(x) \mid x \in X\}$, $\{\theta \in F(X, L) \mid \text{Im}\theta \subseteq D_T\}$ ve $\{\theta \in F(X, L) \mid \theta(a) = 1\}$.

Tanım 1.4.2: $\mu, \nu \in F(X, L)$ olsun. Bu durumda;

μ, ν nün L -alt kümesi denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$.

μ, ν nün L -alt kümesi ise bu durum $\mu \subseteq \nu$ olarak gösterilir.

Tanım 1.4.3: $\mu \in F(X, L)$ ve $\alpha \in L$ için $U(X, \mu, \alpha) = \mu_\alpha = \{x \in X \mid \alpha \leq \mu(x)\}$ kümesine μ nün α -kesim (seviye alt kümesi) denir.

Tanım 1.4.4: $\mu, \nu \in F(X, L)$, $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq F(X, L)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mu \cup \nu$, $\mu \cap \nu$, $\mu T \nu$, $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ ve $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ L -altkümelerine sırasıyla μ ve ν nün birleşimi, kesişimi, T -kesişimi, $\{\mu_i \mid i \in I\}$ ailesinin birleşimi ve kesişimi denir. Her $x \in X$ için,

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x),$$

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x),$$

$$(\mu T \nu)(x) = \mu(x) T \nu(x),$$

$$(\bigcup_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x),$$

$$(\bigcap_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x).$$

Eğer $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq F(X, T, L)$ ise $\bigvee_{i \in I}^T \mu_i$ L -alt kümesi $(\bigvee_{i \in I}^T \mu_i)(x) = \bigvee_{i \in I}^T \mu_i(x)$ olarak tanımlanacaktır.

Tanım 1.4.5: $B \subseteq X$ ve $\alpha, \beta \in L$, $\alpha < \beta$ için $(\alpha, \beta)_B \in F(X, L)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\alpha, \beta)_B(x) = \begin{cases} \beta, & x \in B \\ \alpha, & x \notin B \end{cases}$$

$(0, \alpha)_B$ ve $(0, 1)_B$ L -alt kümeleri sırasıyla α_B ve 1_B ile gösterilecektir. 1_B L -alt kümesine B nin karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 1.4.6: $(L, \leq)$ bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. Bu taktirde,

- i) $\mu, \nu \in F(X, T, L)$ ise $\mu T \nu \in F(X, T, L)$,
- ii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in F(X, T, L)$ ise $\bigcup_{i \in I} \mu_i \in F(X, T, L)$,
- iii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in F(X, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in F(X, T, L)$,
- iv) Her $i \in I$ için $\mu_i \in F(X, T, L)$ ise her $i \in I$ için $\bigcap_{i \in I} \mu_i \subseteq \mu_i$,
- v) $\theta \in F(X, T, L)$ ve her $i \in I$ için $\mu_i \in F(X, T, L)$, $\theta \subseteq \mu_i$ ise $\theta \subseteq \bigcap_{i \in I} \mu_i$,
- vi) $(F(X, T, L), \subseteq)$ tam kafestir.

Tanım 1.4.7: $\{X_i | i \in \Omega\}$ kümelerin bir ailesi, $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i: X_i \rightarrow L$ olarak verilsin. Bu durumda,

$$\mu: \prod_{i \in \Omega} X_i \rightarrow L, \mu((x_i)) = \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)$$

olarak tanımlanan L -altkümeye $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ ailesinin kartezyen çarpımı denir ve

$$\prod_{i \in \Omega} \mu_i$$

ile gösterilir. Her $\{\mu_i \in F(X_i, T, L) | i \in \Omega\}$ ailesi için

$$\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i)) = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)$$

olarak tanımlanan L -altkümeye $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ ailesinin T -kartezyen çarpımı denir ve

$\prod_{i \in \Omega} \mu_i$ ile gösterilir. Özel olarak $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\prod_{i \in \Omega} \mu_i$ yerine $\mu_1 \times_T \mu_2 \times_T \dots \times_T \mu_n$ veya

$\prod_{i=1}^n \mu_i$ notasyonları kullanılacaktır. $T = \wedge$ için $\prod_{i \in \Omega} \mu_i = \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i$ olarak gösterilecektir.

Tanım 1.4.8: $\mu \in F(X, L)$, $\nu \in F(Y, L)$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

$f(\mu) \in F(Y, L)$ ve $f^{-1}(\nu) \in F(X, L)$ L -alt kümeleri, sırasıyla, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için, aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(\mu)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu(x),$$

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)).$$

Bu takdirde, $f(\mu)$ ye, μ nün f altındaki görüntüsü ve $f^{-1}(\nu)$ ye de, ν nün f altındaki ters görüntüsü denir.

1.5. TL-i-alt Gruplar, TL-i-alt Halkalar ve TL-i-(sol, sağ) İdealler

$TL - i$ -alt gruplar Bahadır [8] ve Ray [56] in çalışmalarında incelendi. Bu bölümde bu tanımların yanı sıra $TL - i$ -alt halkalar ve $TL - i$ -(sol,sağ) idealler tanıtılarak bazı özellikleri verilecektir. Aksi söylenmedikçe G bir grup ve e G grubunun birim elemanı olarak alınacaktır.

Tanım 1.5.1: $(G, .)$ grup ve $\mu \in F(G, L)$ olsun.

- 1) μ, G nin bir $TL-1$ alt grubudur denir : $\Leftrightarrow$
 - i) Her $x, y \in R$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x.y)$,
 - ii) Her $x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(x^{-1})$,
- 2) μ, G nin bir $TL-2$ alt grubudur denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x.y^{-1})$,
- 3) μ, G nin bir $TL-3$ alt grubudur denir : $\Leftrightarrow \mu, G$ nin bir $TL-2$ alt grubu ve $\mu \in F(G, T, L)$,
- 4) μ, G nin bir $TL-4$ alt grubudur denir : $\Leftrightarrow \mu, G$ nin bir $TL-2$ alt grubu ve $\mu \in F_e(G, L)$.

Tablo 1.5.1: G nin TL -alt gruplarının gösterimleri ve isimlendirmeleri

T t -norm, L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$FG_1(G, T, L)$ G nin $TL - 1$ alt grubu	$FG_1(G, L)$ G nin $L - 1$ alt grubu	$FG_1(G, T)$ G nin $T - 1$ bulanık alt grubu	$FG_1(G)$ G nin 1 -bulanık alt grubu
$FG_2(G, T, L)$ G nin $TL - 2$ alt grubu	$FG_2(G, L)$ G nin $L - 2$ alt grubu	$FG_2(G, T)$ G nin $T - 2$ bulanık alt grubu	$FG_2(G)$ G nin 2 -bulanık alt grubu
$FG_3(G, T, L)$ G nin $TL - 3$ alt grubu	$FG_3(G, L)$ G nin $L - 3$ alt grubu	$FG_3(G, T)$ G nin $T - 3$ bulanık alt grubu	$FG_3(G)$ G nin 3 -bulanık alt grubu
$FG_4(G, T, L)$ G nin $TL - 4$ alt grubu	$FG_4(G, L)$ G nin $L - 4$ alt grubu	$FG_4(G, T)$ G nin $T - 4$ bulanık alt grubu	$FG_4(G)$ G nin 4 -bulanık alt grubu

Örnek 1.5.2: $(\mathbb{Z}_2, +)$ grubu ve T, L – tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki kümeler elde edilir.

- i) $FG_1(\mathbb{Z}_2, T, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
 $FG_3(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, T, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$
- ii) $FG_1(\mathbb{Z}_2, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, L) = FG_3(\mathbb{Z}_2, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$
- iii) $FG_1(\mathbb{Z}_2, T_D, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_D, L) = \{1_{\mathbb{Z}_2}\} \cup \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1}) \neq 1\},$
 $FG_3(\mathbb{Z}_2, T_D, L) = \{1_{\mathbb{Z}_2}, 0_{\mathbb{Z}_2}, 1_{\{\bar{0}\}}\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, T_D, L) = \{1_{\mathbb{Z}_2}\} \cup \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1}) \neq 1, \mu(\bar{0}) = 1\},$
- iv) $FG_1(\mathbb{Z}_2, T_P) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_P) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{1})^2 \leq \mu(\bar{0})\},$
 $FG_3(\mathbb{Z}_2, T_P) = \{1_{\mathbb{Z}_2}, 0_{\mathbb{Z}_2}, 1_{\{\bar{0}\}}\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, T_P) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$
- v) $FG_1(\mathbb{Z}_2, T_L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{1}) \leq \frac{1}{2}\} \cup \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid 1 < 2\mu(\bar{1}) \leq 1 + \mu(\bar{0})\},$
 $FG_3(\mathbb{Z}_2, T_L) = \{1_{\mathbb{Z}_2}, 0_{\mathbb{Z}_2}, 1_{\{\bar{0}\}}\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, T_L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$
- vi) $FG_1(\mathbb{Z}_2, T^{nM}) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T^{nM}) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{1}) \leq \frac{1}{2}\} \cup \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \frac{1}{2} < \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
 $FG_3(\mathbb{Z}_2, T^{nM}) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{1}), \mu(\bar{0}) \in \{0\} \cup \{\alpha \in [0, 1] \mid 1 < 2\alpha\}\},$
 $FG_4(\mathbb{Z}_2, T^{nM}) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2) \mid \mu(\bar{0}) = 1\}.$

Örnek 1.5.3: Örnek 1.3.12 de L kafesi üzerinde verilen t-normlar için $FG_k(\mathbb{Z}_2, T_r, L)$ kümeleri $1 \leq r \leq 4, 1 \leq k \leq 4$ için $\mathbb{Z}_2$ nin $T_r L - 2$ alt gruplarına ait tablolar ve kafes yapıları aşağıdaki şekildedir.

Tablo 1.5.2: $\mathbb{Z}_2$ nin $T_{1-4} L - 2$ –alt grupları

T_1	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}
$\mu(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	α	β	β	β	0	0	0
$\mu(\bar{1})$	1	α	β	0	α	β	0	α	β	0	α	β	0

T_2	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5	ϑ_6	ϑ_7	ϑ_8	ϑ_9	ϑ_{10}	ϑ_{11}
$\vartheta(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	β	β	β	0	0
$\vartheta(\bar{1})$	1	α	β	0	α	0	α	β	0	α	0

T_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}
$\theta(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	α	β	β	0	0
$\theta(\bar{1})$	1	α	β	0	α	β	0	β	0	β	0

T_4	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9
$\pi(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	β	β	0
$\pi(\bar{1})$	1	α	β	0	α	0	β	0	0

$$FG_1(\mathbb{Z}_2, T_1, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}\}$$

$$FG_3(\mathbb{Z}_2, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_4, \mu_{13}\}$$

$$FG_4(\mathbb{Z}_2, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$

$$FG_1(\mathbb{Z}_2, T_2, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_2, L) = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6, \vartheta_7, \vartheta_8, \vartheta_9, \vartheta_{10}, \vartheta_{11}\}$$

$$FG_3(\mathbb{Z}_2, T_2, L) = \{\vartheta_1, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_7, \vartheta_9, \vartheta_{11}\}$$

$$FG_4(\mathbb{Z}_2, T_2, L) = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4\}$$

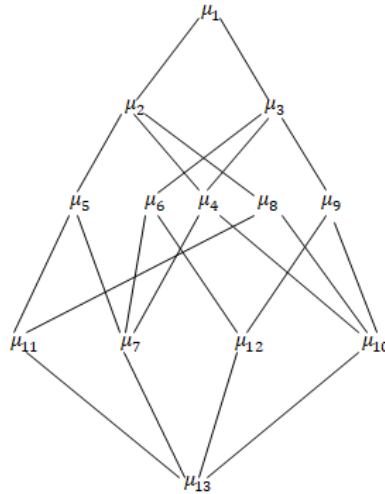
$$FG_1(\mathbb{Z}_2, T_3, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_3, L) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}\}$$

$$FG_3(\mathbb{Z}_2, T_3, L) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5, \theta_7, \theta_{11}\}$$

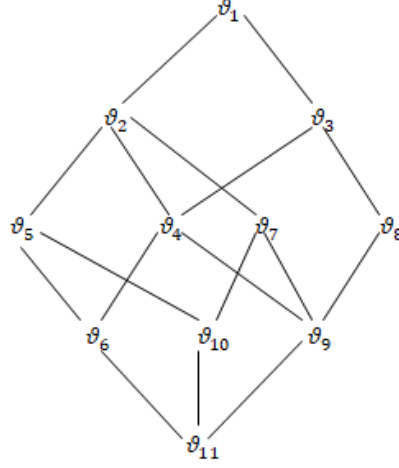
$$FG_4(\mathbb{Z}_2, T_3, L) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$$

$$FG_1(\mathbb{Z}_2, T_4, L) = FG_2(\mathbb{Z}_2, T_4, L) = FG_3(\mathbb{Z}_2, T_4, L) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\}$$

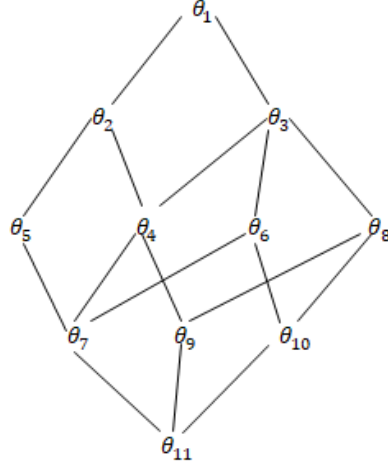
$$FG_4(\mathbb{Z}_2, T_4, L) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$$



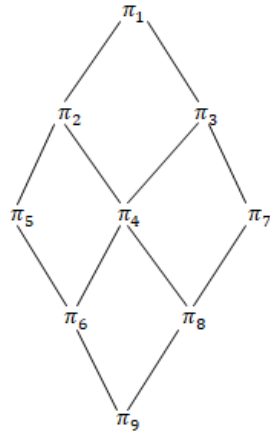
Şekil 1.5.1: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_1, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.2: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.3: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_3, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.4: $FG_2(\mathbb{Z}_2, T_4, L)$ nin kafes diyagramı

Örnek 1.5.4: Örnek 1.3.12 de L kafesi üzerinde verilen T_1 t-normu için $\mathbb{Z}_3$ ün $T_1L - 1$, $T_1L - 2$, $T_1L - 3$ ve $T_1L - 4$ alt grupları ve onlara ait kafes yapıları aşağıdaki şekildedir.

Tablo 1.5.3: $\mathbb{Z}_3$ ün $T_1L - 2$ -alt grupları

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	μ_{15}	μ_{16}	μ_{17}
$\mu(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	α	α	α	α	α	α	α	β	β	β	β
$\mu(\bar{1})$	1	α	β	0	α	α	α	β	β	β	0	0	0	α	α	α	β
$\mu(\bar{2})$	1	α	β	0	α	β	0	α	β	0	α	β	0	α	β	0	α

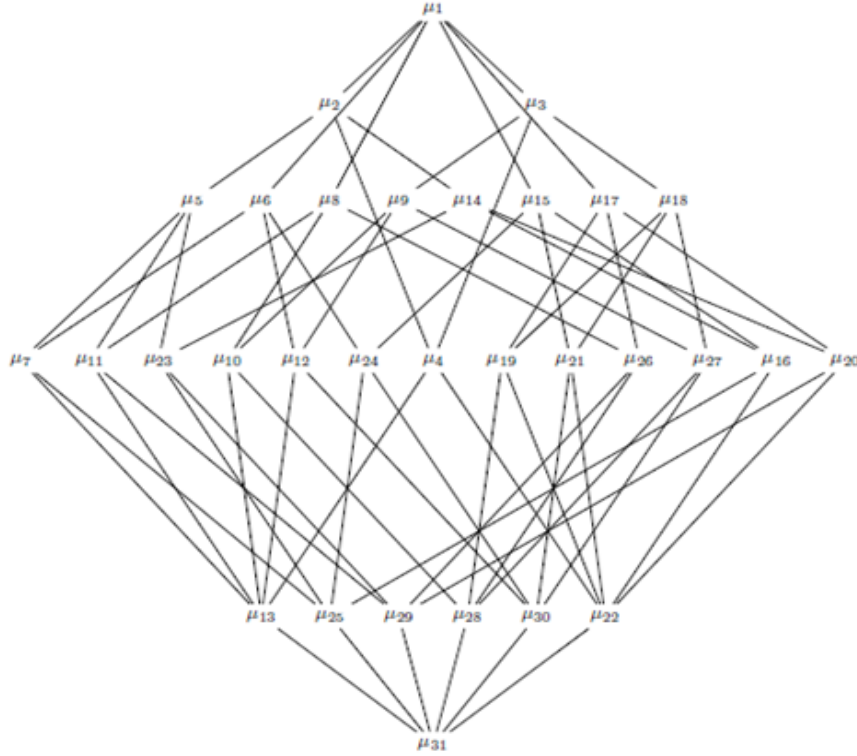
	μ_{18}	μ_{19}	μ_{20}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	μ_{25}	μ_{26}	μ_{27}	μ_{28}	μ_{29}	μ_{30}	μ_{31}
$\mu(\bar{0})$	β	β	β	β	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu(\bar{1})$	β	β	0	0	0	α	α	α	β	β	β	0	0	0
$\mu(\bar{2})$	β	0	α	β	0	α	β	0	α	β	0	α	β	0

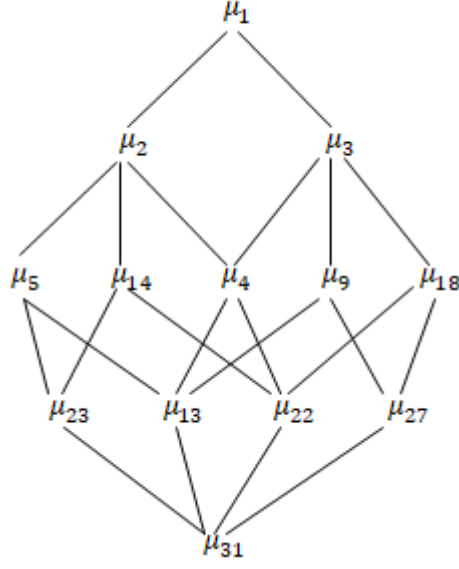
$$FG_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}, \mu_{19}, \mu_{20}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}, \mu_{26}, \mu_{27}, \mu_{28}, \mu_{29}, \mu_{30}, \mu_{31}\}$$

$$FG_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_9, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{18}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{27}, \mu_{31}\}$$

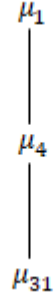
$$FG_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_4, \mu_{31}\}$$

$$FG_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$

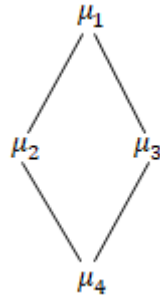
Şekil 1.5.5: $FG_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.6: $FG_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.7: $FG_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.8: $FG_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı

$(FG_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L), \subseteq)$ modüler kafes değildir. Çünkü $\{\mu_3, \mu_4, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{13}\}$ alt kafesi modüler değil.

Teorem 1.5.5: G bir grup ve T L -üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) $FG_1(G, T, L) \subseteq FG_2(G, T, L)$,
- ii) $FG_3(G, T, L) \subseteq FG_1(G, T, L)$,
- iii) $FG_4(G, T, L) \subseteq FG_1(G, T, L)$,
- iv) $FG_1(G, L) = FG_2(G, L) = FG_3(G, L)$.

Teorem 1.5.6: G bir grup ve T L -üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\mu \in FG_3(G, T, L)$ ise $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$,
- ii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FG_1(G, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FG_1(G, T, L)$,
- iii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FG_2(G, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FG_2(G, T, L)$,
- iv) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FG_3(G, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FG_3(G, T, L)$,
- v) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FG_4(G, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FG_4(G, T, L)$,
- vi) $(FG_1(G, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- vii) $(FG_2(G, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- viii) $(FG_3(G, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- ix) $(FG_4(G, T, L), \subseteq)$ tam kafestir.

Aşağıdaki önerme tanımlardan kolaylıkla elde edilebilir.

Önerme 1.5.7: $\emptyset \neq B \subseteq G$ ve $\alpha, \beta \in L$, $\alpha < \beta$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

- i) B alt grup ise $(\alpha, \beta)_B \in FG_1(G, T, L)$,
- ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_B \in FG_2(G, T, L)$ ise B alt gruptur,
- iii) $\alpha, \beta \in D_T$ ve B alt grup ise $(\alpha, \beta)_B \in FG_3(G, T, L)$,
- iv) B alt grup $\Leftrightarrow (\alpha, 1)_B \in FG_4(G, T, L)$,
- v) B alt gruptur $\Leftrightarrow (\alpha, 1)_B \in FG_1(G, T, L)$,
- vi) B alt grup $\Leftrightarrow 1_B \in FG_4(G, T, L)$,
- vii) B alt grup $\Leftrightarrow 1_B \in FG_3(G, T, L)$.

Teorem 1.5.8: G bir grup ve $\mu \in F(G, L)$ olsun. Bu durumda;

- i) $\alpha \in D_T$, $\mu \in FG_2(G, T, L)$, $\emptyset \neq \mu_\alpha$ ise μ_α G nin alt grubudur,
- ii) $\mu \in F(G, T, L)$ ve $\forall \emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α G nin alt grubu ise $\mu \in FG_3(G, T, L)$,
- iii) $\mu \in FG_1(G, L) \Leftrightarrow \forall \emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α G nin alt grubudur.

Sonuç 1.5.9: G bir grup ve $\mu \in F(G, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- i) Her $\emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α G nin alt grubudur,
- ii) $\mu \in FG_1(M, L)$,

iii) $\mu \in \text{FG}_2(M, L)$,

iv) $\mu \in \text{FG}_3(M, L)$.

Tanım 1.5.10: $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $\mu \in \text{F}(R, L)$ olsun.

1) μ, R nin bir $TL-1$ alt halkasıdır denir : $\Leftrightarrow$

i) $\mu, (R, +)$ nin bir $TL-1$ alt grubu,

ii) Her $x, y \in R$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x \cdot y)$.

2) μ, R nin bir $TL-2$ alt halkasıdır denir : $\Leftrightarrow$

i) $\mu, (R, +)$ nin bir $TL-2$ alt grubu,

ii) Her $x, y \in R$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x \cdot y)$.

3) μ, R nin bir $TL-3$ alt halkasıdır denir : $\Leftrightarrow \mu, (R, +, \cdot)$ nin bir $TL-2$ alt halkası ve $\mu \in \text{F}(R, T, L)$.

4) μ, R nin bir $TL-4$ alt halkasıdır denir : $\Leftrightarrow \mu, (R, +, \cdot)$ 'nin bir $TL-2$ alt halkası ve $\mu \in \text{F}_0(R, L)$.

Tablo 1.5.4: R nin TL -alt halkalarının gösterimleri ve isimlendirmeleri

T t –norm, L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$\text{FH}_1(R, T, L)$ R nin $TL - 1$ alt halkası	$\text{FH}_1(R, L)$ R nin $L - 1$ alt halkası	$\text{FH}_1(R, T)$ R nin $T - 1$ bulanık alt halkası	$\text{FH}_1(R)$ R nin 1 –bulanık alt halkası
$\text{FH}_2(R, T, L)$ R nin $TL - 2$ alt halkası	$\text{FH}_2(R, L)$ R nin $L - 2$ alt halkası	$\text{FH}_2(R, T)$ R nin $T - 2$ bulanık alt halkası	$\text{FH}_2(R)$ R nin 2 –bulanık alt halkası
$\text{FH}_3(R, T, L)$ R nin $TL - 3$ alt halkası	$\text{FH}_3(R, L)$ R nin $L - 3$ alt halkası	$\text{FH}_3(R, T)$ R nin $T - 3$ bulanık alt halkası	$\text{FH}_3(R)$ R nin 3 –bulanık alt halkası
$\text{FH}_4(R, T, L)$ R nin $TL - 4$ alt halkası	$\text{FH}_4(R, L)$ R nin $L - 4$ alt halkası	$\text{FH}_4(R, T)$ R nin $T - 4$ bulanık alt halkası	$\text{FH}_4(R)$ R nin 4 –bulanık alt halkası

Örnek 1.5.11: $(\mathbb{Z}_3, +)$ grubu ve TL –tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu durumda $TL - 1, TL - 2, TL - 3, TL - 4$ alt halkalar aşağıdaki şekildedir.

$$FH_1(\mathbb{Z}_3, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_3, L) \mid \mu(\bar{1}) = \mu(\bar{2}), \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$$

$$FH_2(\mathbb{Z}_3, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_3, L) \mid \mu(\bar{0})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{2}), \mu(\bar{0})T\mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{1}), \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{2})T\mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{2})T\mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{1})\},$$

$$FH_3(\mathbb{Z}_3, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_3, T, L) \mid \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{0})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{2})\}$$

$$FH_4(\mathbb{Z}_3, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_3, L) \mid \mu(\bar{0}) = 1, \mu(\bar{1}) = \mu(\bar{2})\}.$$

Örnek 1.5.12: Örnek 1.3.12 de verilen L kafesi ve T_2 t-normu için $\mathbb{Z}_3$ ün $T_2L - 1$, $T_2L - 2$, $T_2L - 3$ ve $T_2L - 4$ alt halkaları ve onların kafes yapıları sırasıyla aşağıdaki tablo ve şekillerde verilmiştir.

Tablo 1.5.5: $\mathbb{Z}_3$ ün T_2L -alt halkaları

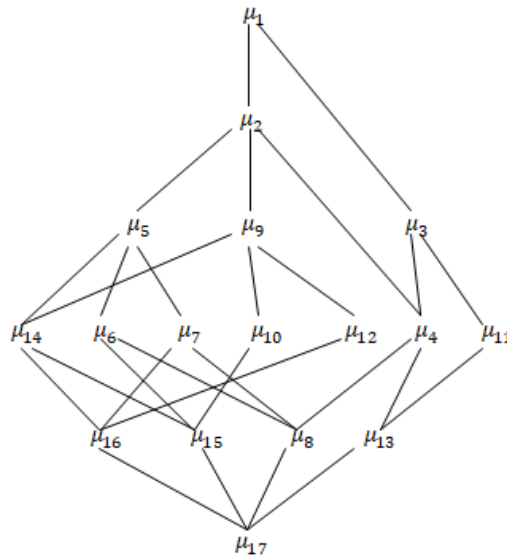
	μ	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	μ_{15}	μ_{16}	μ_{17}
$\mu(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	α	α	β	β	β	β	β	0	0	0	0
$\mu(\bar{1})$	1	α	β	0	α	α	0	0	α	α	β	0	0	α	α	0	0
$\mu(\bar{2})$	1	α	β	0	α	0	α	0	α	0	β	α	0	α	0	α	0

$$FH_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{17}\}$$

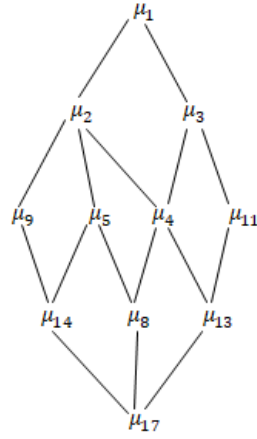
$$FH_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_8, \mu_9, \mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{17}\}$$

$$FH_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_9, \mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{17}\}$$

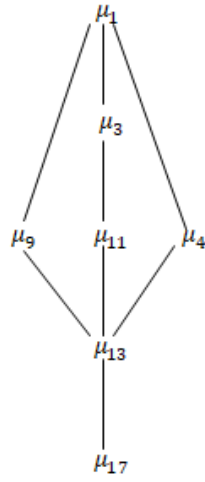
$$FH_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$



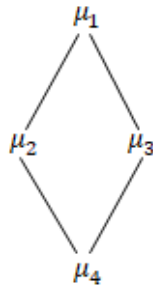
Şekil 1.5.9: $FH_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.10: $FH_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.11: $FH_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.12: $FH_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı

Teorem 1.5.13: R bir halka ve T L -üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) $FH_1(R, T, L) \subseteq FG_1(R, T, L)$,
- ii) $FH_2(R, T, L) \subseteq FG_2(R, T, L)$,

- iii) $FH_3(R, T, L) \subseteq FG_3(R, T, L)$,
- iv) $FH_4(R, T, L) \subseteq FG_4(R, T, L)$,
- v) $FH_1(R, T, L) \subseteq FH_2(R, T, L)$,
- vi) $FH_3(R, T, L) \subseteq FH_1(R, T, L)$,
- vii) $FH_4(R, T, L) \subseteq FH_1(R, T, L)$,
- viii) $FH_1(R, L) = FH_2(R, L) = FH_3(R, L)$.

İspat:

- i) Tanımdan açıktır.
- ii) Tanımdan açıktır.
- iii) Tanımdan açıktır.
- iv) Tanımdan açıktır.
- v) Teorem 1.5.5.i) ye benzer şekilde yapılır.
- vi) Teorem 1.5.5.ii) ye benzer şekilde yapılır.
- vii) Teorem 1.5.5.iii) ye benzer şekilde yapılır.
- viii) Teorem 1.5.5.iv) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.5.14: R bir halka ve T L -üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\mu \in FH_3(R, T, L)$ ise $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(0)$,
- ii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FH_1(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FH_1(R, T, L)$,
- iii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FH_2(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FH_2(R, T, L)$,
- iv) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FH_3(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I}^T \mu_i \in FH_3(R, T, L)$,
- v) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FH_4(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FH_4(R, T, L)$,
- vi) $(FH_1(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- vii) $(FH_2(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- viii) $(FH_3(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- ix) $(FH_4(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir.

İspat:

- i) Teorem 1.5.6.i) ye benzer şekilde yapılır.
- ii) Teorem 1.5.6.ii) ye benzer şekilde yapılır.
- iii) Teorem 1.5.6.iii) ye benzer şekilde yapılır.
- iv) Teorem 1.5.6.iv) ye benzer şekilde yapılır.
- v) Teorem 1.5.6.v) ye benzer şekilde yapılır.
- vi) Teorem 1.5.6.vi) ye benzer şekilde yapılır.

vii) Teorem 1.5.6.vii) ye benzer şekilde yapılır.

viii) Teorem 1.5.6.viii) ye benzer şekilde yapılır.

ix) Teorem 1.5.6.ix) ye benzer şekilde yapılır.

Tanımlardan kolaylıkla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 1.5.15: $\emptyset \neq B \subseteq R$ ve $\alpha, \beta \in L$, $\alpha < \beta$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

- i) B alt halka ise $(\alpha, \beta)_B \in \text{FH}_1(G, T, L)$,
- ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_B \in \text{FH}_2(G, T, L)$ ise B alt halkadır,
- iii) $\alpha, \beta \in D_T$ ve B alt halka ise $(\alpha, \beta)_B \in \text{FH}_3(G, T, L)$,
- iv) B alt halka ise $(\alpha, 1)_B \in \text{FH}_4(G, T, L)$,
- v) B alt halka $\Leftrightarrow (\alpha, 1)_B \in \text{FH}_1(G, T, L)$,
- vi) B alt halka $\Leftrightarrow 1_B \in \text{FH}_4(G, T, L)$,
- vii) B alt halka $\Leftrightarrow 1_B \in \text{FH}_3(G, T, L)$.

Teorem 1.5.16: R bir halka ve $\mu \in F(R, L)$ olsun. Bu durumda;

- i) $\alpha \in D_T$, $\mu \in \text{FH}_2(R, T, L)$ ve $\emptyset \neq \mu_a$ ise μ_a R nin alt halkasıdır,
- ii) $\mu \in F(R, T, L)$ ve $\forall \emptyset \neq \mu_a$ için μ_a R nin alt halkası ise $\mu \in \text{FH}_3(R, T, L)$,
- iii) $\mu \in \text{FH}_1(R, L) \Leftrightarrow \forall \emptyset \neq \mu_a$ için μ_a R nin alt halkasıdır.

İspat: Teorem 1.5.8 e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 1.5.17: R bir halka ve $\mu \in F(R, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- i) $\forall \emptyset \neq \mu_a$ için μ_a R nin alt halkasıdır,
- ii) $\mu \in \text{FH}_1(R, L)$,
- iii) $\mu \in \text{FH}_2(R, L)$,
- iv) $\mu \in \text{FH}_3(R, L)$.

Tanım 1.5.18: $(R, +, .)$ bir halka ve $\mu \in F(R, L)$ olsun.

1) μ , R nin bir $TL-1$ sol (sağ) idealidir denir : $\Leftrightarrow$

- i) μ , $(R, +)$ nin bir $TL-1$ alt grubu,
- ii) Her $x, y \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(y.x)$ ($\mu(x) \leq \mu(x.y)$).

2) μ , R nin bir $TL-2$ sol (sağ) idealidir denir : $\Leftrightarrow$

- i) μ , $(R, +)$ nin bir $TL-2$ alt grubu,
- ii) Her $x, y \in R$ için $\mu(y) \leq \mu(x.y)$ ($\mu(x) \leq \mu(x.y)$).

3) μ , R nin bir $TL-3$ sol (sağ) idealidir denir : $\Leftrightarrow \mu$, $(R, +, .)$ nin bir $TL-2$ sol (sağ) ideali ve $\mu \in F(R, T, L)$.

- 4) μ, R nin bir $TL-4$ sol (sağ) idealidir denir : $\Leftrightarrow \mu, (R, +, \cdot)$ nin bir $TL-2$ sol (sağ) ideali ve $F_0(R, L)$.
- 5) μ, R nin bir $TL-1$ ($TL-2, TL-3, TL-4$) idealidir denir : $\Leftrightarrow \mu, R$ nin bir $TL-1$ sol ve sağ ($TL-2$ sol ve sağ; $TL-3$ sol ve sağ; $TL-4$ sol ve sağ) idealidir.

Tablo 1.5.6: R nin TL -ideallerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri

T t –norm, L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$FLI_1(R, T, L)$ R nin $TL - 1$ sol ideali	$FLI_1(R, L)$ R nin $L - 1$ sol ideali	$FLI_1(R, T)$ R nin bulanık $T - 1$ sol ideali	$FLI_1(R)$ R nin bulanık 1 –sol ideali
$FRI_1(R, T, L)$ R nin $TL - 1$ sağ ideali	$FRI_1(R, L)$ R nin $L - 1$ sağ ideali	$FRI_1(R, T)$ R nin bulanık $T - 1$ sağ ideali	$FRI_1(R)$ R nin bulanık 1 –sağ ideali
$FI_1(R, T, L)$ R nin $TL - 1$ ideali	$FI_1(R, L)$ R nin $L - 1$ ideali	$FI_1(R, T)$ R nin bulanık $T - 1$ ideali	$FI_1(R)$ R nin bulanık 1 –ideali
$FLI_2(R, T, L)$ R nin $TL - 2$ sol ideali	$FLI_2(R, L)$ R nin $L - 2$ sol ideali	$FLI_2(R, T)$ R nin bulanık $T - 2$ sol ideali	$FLI_2(R)$ R nin bulanık 2 –sol ideali
$FRI_2(R, T, L)$ R nin $TL - 2$ sağ ideali	$FRI_2(R, L)$ R nin $L - 2$ sağ ideali	$FRI_2(R, T)$ R nin bulanık $T - 2$ sağ ideali	$FRI_2(R)$ R nin bulanık 2 –sağ ideali
$FI_2(R, T, L)$ R nin $TL - 2$ ideali	$FI_2(R, L)$ R nin $L - 2$ ideali	$FI_2(R, T)$ R nin bulanık $T - 2$ ideali	$FI_2(R)$ R nin bulanık 2 –ideali
$FLI_3(R, T, L)$ R nin $TL - 3$ sol ideali	$FLI_3(R, L)$ R nin $L - 3$ sol ideali	$FLI_3(R, T)$ R nin bulanık $T - 3$ sol ideali	$FLI_3(R)$ R nin bulanık 3 –sol ideali

Tablo 1.5.6' nin devamı

$FRI_3(R, T, L)$ R nin $TL - 3$ sağ ideali	$FRI_3(R, L)$ R nin $L - 3$ sağ ideali	$FRI_3(R, T)$ R nin bulanık $T - 3$ sağ ideali	$FRI_3(R)$ R nin bulanık 3 –sağ ideali
$FI_3(R, T, L)$ R nin $TL - 3$ ideali	$FI_3(R, L)$ R nin $L - 3$ ideali	$FI_3(R, T)$ R nin bulanık $T - 3$ ideali	$FI_3(R)$ R nin bulanık 3 –ideali
$FLI_4(R, T, L)$ R nin $TL - 4$ sol ideali	$FLI_4(R, L)$ R nin $L - 4$ sol ideali	$FLI_4(R, T)$ R nin bulanık $T - 4$ sol ideali	$FLI_4(R)$ R nin bulanık 4 –sol ideali
$FRI_4(R, T, L)$ R nin $TL - 4$ sağ ideali	$FRI_4(R, L)$ R nin $L - 4$ sağ ideali	$FRI_4(R, T)$ R nin bulanık $T - 4$ sağ ideali	$FRI_4(R)$ R nin bulanık 4 –sağ ideali
$FI_4(R, T, L)$ R nin $TL - 4$ ideali	$FI_4(R, L)$ R nin $L - 4$ ideali	$FI_4(R, T)$ R nin bulanık $T - 4$ ideali	$FI_4(R)$ R nin bulanık 4 –ideali

Örnek 1.5.19: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ kafesi üzerinde Örnek 1.3.12 de verilen T_2 t-normu için $\mathbb{Z}_3$ ün $T_2L - 1$, $T_2L - 2$, $T_2L - 3$ ve $T_2L - 4$ idealleri ve onların kafes yapıları

Tablo 1.5.7: $\mathbb{Z}_3$ ün özel TL –idealleri

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9
$\mu(\bar{0})$	1	1	1	1	α	α	β	β	0
$\mu(\bar{1})$	1	α	β	0	α	0	β	0	0
$\mu(\bar{2})$	1	α	β	0	α	0	β	0	0

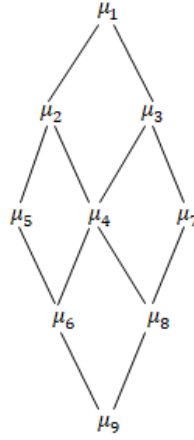
tabloda verilen L -altkümeler yardımıyla aşağıdaki şekillerde verilmiştir.

$$FLI_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FRI_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FI_1(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9\}$$

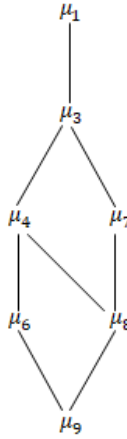
$$FLI_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FRI_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FI_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9\}$$

$$FLI_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FRI_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = FI_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9\}$$

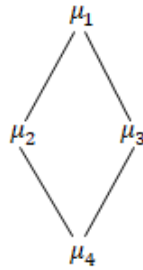
$$\text{FLI}_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \text{FRI}_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \text{FI}_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$



Şekil 1.5.13: $\text{FI}_2(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.14: $\text{FI}_3(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 1.5.15: $\text{FI}_4(\mathbb{Z}_3, T_2, L)$ nin kafes diyagramı

Teorem 1.5.20: R bir halka ve T, L –üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $1 \leq k \leq 4$ için $FLI_k(R, T, L) \subseteq FH_k(R, T, L)$,
- ii) Her $1 \leq k \leq 4$ için $FRI_k(R, T, L) \subseteq FH_k(R, T, L)$,
- iii) Her $1 \leq k \leq 4$ için $FI_k(R, T, L) \subseteq FH_k(R, T, L)$,
- iv) $FLI_3(R, T, L) \subseteq FLI_1(R, T, L) \subseteq FLI_2(R, T, L)$,
- v) $FRI_3(R, T, L) \subseteq FRI_1(R, T, L) \subseteq FRI_2(R, T, L)$,
- vi) $FI_3(R, T, L) \subseteq FI_1(R, T, L) \subseteq FI_2(R, T, L)$,
- vii) $FLI_4(R, T, L) \subseteq FLI_1(R, T, L)$,
- viii) $FRI_4(R, T, L) \subseteq FRI_1(R, T, L)$,
- ix) $FI_4(R, T, L) \subseteq FI_1(R, T, L)$,
- x) $FLI_1(R, L) = FLI_2(R, L) = FLI_3(R, L)$,
- xi) $FRI_1(R, L) = FRI_2(R, L) = FRI_3(R, L)$,
- xii) $FI_1(R, L) = FI_2(R, L) = FI_3(R, L)$.

İspat:

- i) Tanımdan açıktır.
- ii) Tanımdan açıktır.
- iii) Tanımdan açıktır.
- iv) Teorem 1.5.5. i), ii) ye benzer şekilde yapılır.
- v) Teorem 1.5.5. i), ii) ye benzer şekilde yapılır.
- vi) Teorem 1.5.5. i), ii) ye benzer şekilde yapılır.
- vii) Teorem 1.5.5. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- viii) Teorem 1.5.5. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- ix) Teorem 1.5.5. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- x) Teorem 1.5.5. iv) ye benzer şekilde yapılır.
- xi) Teorem 1.5.5. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- xii) Teorem 1.5.5. iii) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.5.21: R bir halka ve T, L –üzerinde bir t-norm ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FLI_1(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FLI_1(R, T, L)$,
- ii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FLI_2(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FLI_2(R, T, L)$,
- iii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FLI_3(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FLI_3(R, T, L)$,
- iv) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FLI_4(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FLI_4(R, T, L)$,
- v) Her $i \in I$ için $\mu_i \in FRI_1(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in FRI_1(R, T, L)$,

- vi) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FRI}_2(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \text{FRI}_2(R, T, L)$,
- vii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FRI}_3(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I}^T \mu_i \in \text{FRI}_3(R, T, L)$,
- viii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FRI}_4(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \text{FRI}_4(R, T, L)$,
- ix) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FI}_1(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \text{FI}_1(R, T, L)$,
- x) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FI}_2(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \text{FI}_2(R, T, L)$,
- xi) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FI}_3(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I}^T \mu_i \in \text{FI}_3(R, T, L)$,
- xii) Her $i \in I$ için $\mu_i \in \text{FI}_4(R, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \text{FI}_4(R, T, L)$,
- xiii) Her $1 \leq k \leq 4$ için $(\text{FLI}_k(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- xiv) Her $1 \leq k \leq 4$ için $(\text{FRI}_k(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir,
- xv) Her $1 \leq k \leq 4$ için $(\text{FI}_k(R, T, L), \subseteq)$ tam kafestir.

İspat:

- i) Teorem 1.5.6. ii) ye benzer şekilde yapılır.
- ii) Teorem 1.5.6. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- iii) Teorem 1.5.6. iv) ye benzer şekilde yapılır.
- iv) Teorem 1.5.6.v) ye benzer şekilde yapılır.
- v) Teorem 1.5.6. ii) ye benzer şekilde yapılır.
- vi) Teorem 1.5.6. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- vii) Teorem 1.5.6. iv) ye benzer şekilde yapılır.
- viii) Teorem 1.5.6.v) ye benzer şekilde yapılır.
- ix) Teorem 1.5.6. ii) ye benzer şekilde yapılır.
- x) Teorem 1.5.6. iii) ye benzer şekilde yapılır.
- xi) Teorem 1.5.6. iv) ye benzer şekilde yapılır.
- xii) Teorem 1.5.6.v) ye benzer şekilde yapılır.
- xiii) Teorem 1.5.6.vi, vii, viii) ye benzer şekilde yapılır.
- xiv) Teorem 1.5.6.vi, vii, viii) ye benzer şekilde yapılır.
- xv) Teorem 1.5.6.vi, vii, viii) ye benzer şekilde yapılır.

1.6. Modül Teorisi

Modül Teorisi, Lineer Cebirin aksiyomatik bir genellemesi olarak çok yaygın bir kullanım göstermektedir. Bu teoremin özellikle değişmeli gruplar, vektör uzayları, özel

halkalar üzerinde modüller ve halkalar teorisi üzerinde yaygın uygulamaları vardır. Bu konularla ilgili daha detaylı bilgi [28] kaynağından elde edilebilir. Ayrıca aksi söylenmedikçe R daima bir halka olarak alınacaktır.

Tanım 1.6.1: $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $(M, +)$ bir değişmeli grup olsun ve $r \in R$ ve $a \in M$ için (r, a) elemanının görüntüsü ra ile gösterilmek üzere, bir $\cdot : R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda M ye bir R -modül denir : $\Leftrightarrow$ Her $r_1, r_2 \in R$ ve her $a, b \in M$ için

- i) $r_1(a + b) = r_1a + r_1b$,
- ii) $(r_1 + r_2)a = r_1a + r_2a$,
- iii) $r_1(r_2a) = (r_1r_2)a$.

R birim elemanlı bir halka ve her $a \in M$ için $1_R a = a$ ise M ye üniter R -modül denir. R bir cisim ve M üniter R -modül ise M ye R – vektör uzayı denir.

Tanım 1.6.2: M bir R -modül, ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ olmak üzere A kümesi M üzerindeki işlemlere göre bir R -modül ise A ya M nin R -alt modülü denir. M nin bütün R -alt modüllerin kümesi $L(M)$ olarak gösterilecektir.

Teorem 1.6.3: M R -modül ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i) A M nin R -alt modülüdür,
- ii) Her $a, b \in A$ ve her $r \in R$ için $a + b, -a, ra \in A$,
- iii) Her $a, b \in A$ ve her $r \in R$ için $a - b, ra \in A$.

Teorem 1.6.4: M üniter R -modül ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

- i) A M nin R -alt modülüdür,
- ii) Her $a, b \in A$ ve $\forall r, s \in R$ için $ra + sb \in A$ dır.

Teorem 1.6.5: M bir R -modül ve $\{A_i | i \in \Lambda\}$, R -alt modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

- i) $\bigcap_{i \in \Lambda} A_i$ M nin bir R -alt modülüdür,
- ii) $\{\sum_{i \in J} x_i | \exists \emptyset \neq J \subseteq \Lambda, J \text{ sonlu ve } \forall i \in J \text{ için } x_i \in A_i\}$ kümesi $\{A_i | i \in \Lambda\}$ alt modüllerin ailesini kapsayan en küçük alt modüldür.

Tanım 1.6.6: M bir R -modül ve $\{A_i | i \in \Lambda\}$ R -alt modüllerin bir ailesi olsun. Teorem 1.6.5 ii) de oluşturulan alt modüle $\{A_i | i \in \Lambda\}$ alt modüllerin ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i \in \Lambda} A_i$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\{A_i | i \in \Lambda\}$ alt modüllerin ailesinin toplamı

$$\sum_{i \in \Lambda} A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \{\sum_{i=1}^n x_i | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

dır.

Tanım 1.6.7: $A, B \in P(M)$, $S \in P(R)$ için

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

$$-A = \{-x \mid x \in A\}$$

$$S.A = \{rx \mid r \in S \text{ ve } x \in A\}$$

$$S \odot A = \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid r_i \in S \text{ ve } x_i \in A, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

kümelerine sırasıyla A ile B kümelerinin toplamı, A kümesinin tersi, S ile A kümelerinin skaler çarpımı, S ile A kümelerinin güçlü skaler çarpımı olarak adlandırılır.

Teorem 1.6.8: M bir R -modül, I R nin sol ideali ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ ise $I \odot A \in L(M)$.

Teorem 1.6.9: M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) $(L(M), \subseteq)$ tam kafestir,
- ii) $(L(M), \subseteq)$ modüller kafestir.

Tanım 1.6.10: M, N R -modüller ve $f: M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. f ye M den N ye bir modül homomorfisi denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in M$ ve her $r \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ra) = rf(a)$$

dir.

Teorem 1.6.11: $f: M \rightarrow N$ R -modül homomorfisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) A , M nin alt modülü ise $f(A)$, N nin alt modülüdür.
- ii) B , N nin alt modülü ise $f^{-1}(B)$, M nin alt modülüdür.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

TL -alt modül ve bunlara ait bazı özellikler [2, 10, 68, 70] çalışmalarında incelenmiştir. Literatürde bulanık alt modül, L -alt modül, TL –alt modül tanımları küçük farklılıklar şeklinde incelendi. Bu bölümde, birinci bölüm beşinci kısımda verilen TL -i-alt gruplar, TL -i-alt halkalar ve TL -i-(sol, sağ) idealler bakışına paralel olarak TL -i-alt modüller ve TL - θ -i-alt modüller tanıtılarak bazı özellikleri incelenecektir.

2.1. $TL - i - \text{alt}$ Modüller

Bu bölümde, aksi söylenmedikçe M bir R -modül ve T bir tam kafes üzerinde t-norm olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.1: $\mu \in F(M, L)$ olsun.

- 1) μ, M nin bir TL -1 alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu, (M, +)$ nin TL -1 alt grubu,
 - ii) Her $x \in M$ ve her $r \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(rx)$.
- 2) μ, M nin bir TL -2 alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu, (M, +)$ nin TL -2 alt grubu,
 - ii) Her $x \in M$ ve her $r \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(rx)$.
- 3) μ, M nin bir TL -3 alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow \mu, (M, +)$ nin TL -2 alt modülü ve $\mu \in F(M, T, L)$.
- 4) μ, M nin bir TL -4 alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow \mu, (M, +)$ nin bir TL -2 alt modülü ve $\mu \in F_0(M, L)$.
- 5) μ, M nin bir $TL - 5$ -alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in M$ ve her $r, s \in R$ için $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(rx + sy)$.

Tablo 2.1.1: M nin TL -alt modüllerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri

T t –norm, L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$FM_1(M, T, L)$ M nin $TL - 1$ alt modülü	$FM_1(M, L)$ M nin $L - 1$ alt modülü	$FM_1(M, T)$ M nin bulanık $T - 1$ alt modülü	$FM_1(M)$ M nin bulanık $1 -$ alt modülü
$FM_2(M, T, L)$ M nin $TL - 2$ alt modülü	$FM_2(M, L)$ M nin $L - 2$ alt modülü	$FM_2(M, T)$ M nin bulanık $T - 2$ alt modülü	$FM_2(M)$ M nin bulanık $2 -$ alt modülü
$FM_3(M, T, L)$ M nin $TL - 3$ alt modülü	$FM_3(M, L)$ M nin $L - 3$ alt modülü	$FM_3(M, T)$ M nin bulanık $T - 3$ alt modülü	$FM_3(M)$ M nin bulanık $3 -$ alt modülü
$FM_4(M, T, L)$ M nin $TL - 4$ alt modülü	$FM_4(M, L)$ M nin $L - 4$ alt modülü	$FM_4(M, T)$ M nin bulanık $T - 4$ alt modülü	$FM_4(M)$ M nin bulanık $4 -$ alt modülü
$FM_5(M, T, L)$ M nin $TL - 5$ alt modülü	$FM_5(M, L)$ M nin $L - 5$ alt modülü	$FM_5(M, T)$ M nin bulanık $T - 5$ alt modülü	$FM_5(M)$ M nin bulanık $5 -$ alt modülü

Not: R bir halka ise R R -modül olarak alınabilir. Buna göre açık olarak $k = 1, 2, 3, 4$ için $FM_k(R, T, L) = FLI_k(R, T, L)$ dır.

Örnek 2.1.2: $(\mathbb{Z}_2, +)$ değişmeli grubu $2\mathbb{Z}$ -modül olarak alınırsa aşağıdaki kümeler elde edilir.

- i) $FM_1(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
- ii) $FM_2(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
- iii) $FM_3(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, T, L) | \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
- iv) $FM_4(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | 1 = \mu(\bar{0})\},$
- v) $FM_5(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | \mu(\bar{1}) T \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\}.$

Örnek 2.1.3: $(\mathbb{Z}_2, +)$ değişmeli grubu $\mathbb{Z}$ -modül olarak alınırsa aşağıdaki kümeler elde edilir.

- i) $FM_1(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
- ii) $FM_2(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) | \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$

iii) $FM_3(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, T, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$

iv) $FM_4(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$

v) $FM_5(\mathbb{Z}_2, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1}) T \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\}.$

Örnek 2.1.4: $M = \mathbb{Z}_4$, $2\mathbb{Z}$ -modül olarak alınırsa aşağıdaki kümeler elde edilir.

i) $FM_1(\mathbb{Z}_4, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_4, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{1}) = \mu(\bar{3})\},$

ii) $FM_2(\mathbb{Z}_4, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_4, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{3}) \leq \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{0}) T \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{3}), \mu(\bar{0}) T \mu(\bar{3}) \leq \mu(\bar{1})\},$

iii) $FM_3(\mathbb{Z}_4, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_4, T, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{3}) \leq \mu(\bar{2}) \leq \mu(\bar{0}), \mu(\bar{0}) T \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{3}), \mu(\bar{0}) T \mu(\bar{3}) \leq \mu(\bar{1})\},$

iv) $FM_4(\mathbb{Z}_4, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_4, L) \mid \mu(\bar{1}) = \mu(\bar{3}) \leq \mu(\bar{2}), 1 = \mu(\bar{0})\},$

v) $FM_5(\mathbb{Z}_4, T, L) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_4, L) \mid x \neq \bar{0} \text{ veya } y \neq \bar{0} \text{ için } \mu(x) T \mu(y) \leq \mu(\bar{0}), \mu(x) T \mu(y) \leq \mu(\bar{2})\}.$

Örnek 1.1.5: Örnek 1. 3 12 de verilen L kafesi için $\mathbb{Z}_3$ 'ün L -alt kümeleri

Tablo 2.1.2: $\mathbb{Z}_3$ ün L –alt kümeleri

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	μ_{15}
$\mu(\bar{0})$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu(\bar{1})$	1	1	1	1	α	α	α	α	β	β	β	β	0	0	0
$\mu(\bar{2})$	1	α	β	0	1	α	β	0	1	α	β	0	1	α	β

	μ_{16}	μ_{17}	μ_{18}	μ_{19}	μ_{20}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	μ_{25}	μ_{26}	μ_{27}	μ_{28}	μ_{29}	μ_{30}
$\mu(\bar{0})$	1	α	α	α	α	α	α	α	α	α	β	β	β	β	β
$\mu(\bar{1})$	0	α	α	α	β	β	β	0	0	0	α	α	α	β	β
$\mu(\bar{2})$	0	α	β	0	A	β	0	α	β	0	α	β	0	A	β

	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{34}	μ_{35}	μ_{36}	μ_{37}	μ_{38}	μ_{39}	μ_{40}	μ_{41}	μ_{42}	μ_{43}
$\mu(\bar{0})$	β	β	β	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu(\bar{1})$	β	0	0	0	α	α	α	β	β	β	0	0	0
$\mu(\bar{2})$	0	α	β	0	A	β	0	α	β	0	α	β	0

tabloda verildiği gibi olsun. Eğer $(\mathbb{Z}_3, +)$ değişmeli grubu, $k.\bar{x} = \bar{0}$ ile $\mathbb{Z}$ -modül ve T_1 t-normu Örnek 1.3.12 deki gibi ise

$$FM_5(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}, \mu_{19}, \mu_{20}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}, \mu_{26}, \mu_{27}, \mu_{28}, \mu_{29}, \mu_{30}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}, \mu_{34}, \mu_{35}, \mu_{36}, \mu_{37}, \mu_{38}, \mu_{39}, \mu_{40}, \mu_{41}, \mu_{42}, \mu_{43}\},$$

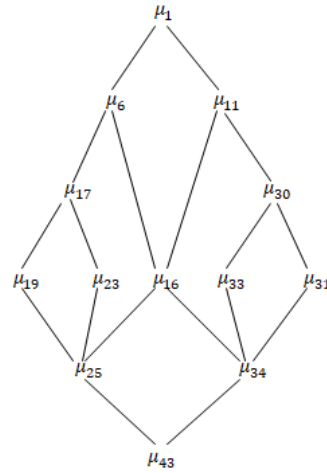
$$FM_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_6, \mu_{11}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{19}, \mu_{23}, \mu_{25}, \mu_{30}, \mu_{31}, \mu_{33}, \mu_{34}, \mu_{43}\},$$

$$FM_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_6, \mu_{11}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{25}, \mu_{30}, \mu_{34}, \mu_{43}\},$$

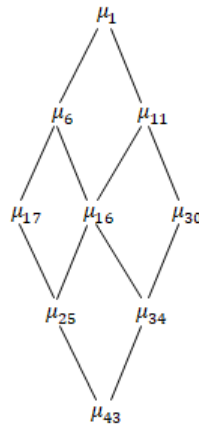
$$FM_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_{16}, \mu_{43}\},$$

$$FM_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L) = \{\mu_1, \mu_6, \mu_{11}, \mu_{16}\}$$

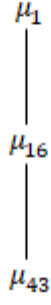
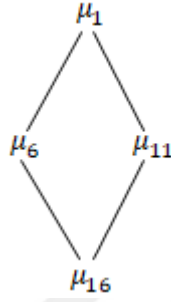
kümeleri elde edilir ve bu kümelerden $FM_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$, $FM_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$, $FM_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$, $FM_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ ün kafes diyagramları aşağıdaki şekildedir.



Şekil 2.1.1: $FM_2(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı



Şekil 2.1.2: $FM_1(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı

Şekil 2.1.3: $FM_3(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramıŞekil 2.1.4: $FM_4(\mathbb{Z}_3, T_1, L)$ nin kafes diyagramı

Önerme 2.1.6: M R –modül $T_1 \leq T_2$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- i) $FM_1(M, T_2, L) \subseteq FM_1(M, T_1, L)$,
- ii) $FM_2(M, T_2, L) \subseteq FM_2(M, T_1, L)$,
- iii) $FM_4(M, T_2, L) \subseteq FM_4(M, T_1, L)$,
- iv) $FM_5(M, T_2, L) \subseteq FM_5(M, T_1, L)$.

İspat:

- i) $\mu \in FM_1(M, T_2, L)$ olsun. Her $x, y \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \mu(x)T_1\mu(y) &\leq \mu(x)T_2\mu(y) \\ &\leq \mu(x + y) \end{aligned}$$

Kabul ile $\mu(x) \leq \mu(-x)$ ve $\mu(x) \leq \mu(rx)$ dir. Böylece $\mu \in FM_1(M, T_1, L)$ olup $FM_1(M, T_2, L) \subseteq FM_1(M, T_1, L)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) ii) ile açıktır.

iv) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

Teorem 2.1.7: M bir R -modül ve T L -tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) $FM_1(M, T, L) \subseteq FM_2(M, T, L)$,
- ii) $FM_2(M, T, L) \subseteq FM_5(M, T, L)$,
- iii) $FM_3(M, T, L) \subseteq FM_1(M, T, L)$,
- iv) $FM_4(M, T, L) \subseteq FM_1(M, T, L)$,
- v) M üniter R -modül ise $FM_1(M, T, L) = FM_2(M, T, L)$,
- vi) M üniter R -modül ise $FM_5(M, T, L) \cap F(M, T, L) \subseteq FM_1(M, T, L)$,
- vii) M üniter R -modül ise $FM_5(M, T, L) \cap F_0(M, L) \subseteq FM_1(M, T, L)$.

İspat:

- i) $\mu \in FM_1(M, T, L)$ olsun. Buradan, $x, y \in M, r \in R$ için $\mu(y) \leq \mu(-y)$ ve

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(x)T\mu(-y) \\ &\leq \mu(x + (-y)) \\ &= \mu(x - y).\end{aligned}$$

$\mu \in FM_1(M, T, L)$ olduğundan $\mu(x) \leq \mu(rx)$. Böylece $\mu \in FM_2(M, T, L)$.

- ii) $\mu \in FM_2(M, T, L)$ olsun. Buradan $x, y \in M, r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}\mu(y) &\leq \mu((-s).y) \\ &= \mu(-sy)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(rx)T\mu(-sy) \\ &\leq \mu(rx - (-sy)) \\ &= \mu(rx + sy).\end{aligned}$$

Böylece $\mu \in FM_5(M, T, L)$.

- iii) $\mu \in FM_3(M, T, L)$ olsun. Buradan $\forall x \in M$ için

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(x)T\mu(x) \\ &\leq \mu(0).\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(x)T\mu(x) \\ &\leq \mu(0)T\mu(x) \\ &\leq \mu(-x)\end{aligned}$$

ve $\forall x, y \in M$ için

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(x)T\mu(-y) \\ &\leq \mu(x - (-y))\end{aligned}$$

$$\leq \mu(x + y)$$

$\mu \in \text{FM}_3(M, T, L)$ olduğundan $\mu(x) \leq \mu(rx)$. Böylece $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$.

iv) $\mu \in \text{FM}_4(M, T, L)$ olsun. Buradan $\forall x \in M$ için

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 1T\mu(x) \\ &= \mu(0)T\mu(x) \\ &\leq \mu(-x)\end{aligned}$$

ve $\forall x, y \in M$ için

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(x)T\mu(-y) \\ &\leq \mu(x - (-y)) \\ &\leq \mu(x + y)\end{aligned}$$

Böylece $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$.

v) M üniter R -modül ve $\mu \in \text{FM}_2(M, T, L)$ olsun. Buradan $x, y \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned}\mu(y) &\leq \mu((-1)y) \\ &\leq \mu(-y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(x)T\mu(-y) \\ &\leq \mu(x - (-y)) \\ &= \mu(x + y).\end{aligned}$$

Diğer yandan $\mu \in \text{FM}_2(M, T, L)$ olduğundan $\mu(x) \leq \mu(rx)$.

Böylece $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dir. Buradan i) ile $\text{FM}_1(M, T, L) = \text{FM}_2(M, T, L)$ dir.

vi) M üniter R -modül, $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L) \cap \text{F}(M, T, L)$ olsun. Buradan, $x, y \in M$ için $r = 1, s = 1$ seçimi ile,

$$\begin{aligned}\mu(x)T\mu(y) &\leq \mu(1.x + 1.y) \\ &\leq \mu(x + y)\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(x)T\mu(x) \\ &\leq \mu((-1).x + 0.x) \\ &= \mu(-x).\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(x)T\mu(x) \\ &\leq \mu(r.x + s.0) \\ &= \mu(rx)\end{aligned}$$

Buradan $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dir.

vii) M üniter R -modül, $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L) \cap F_0(M, L)$ olsun. Buradan vi) ispatına benzer şekilde $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x+y)$ elde edilir. Diğer yandan $\forall x \in M$ ve $\forall r \in R$ için

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(x)T1 \\ &= \mu(x)T\mu(0) \\ &\leq \mu(rx + s.0) \\ &= \mu(rx).\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu(x) &\leq \mu((-1).x) \\ &= \mu(-x)\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dır.

Sonuç 2.1.8: M R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- i) $\text{FM}_1(M, L) = \text{FM}_2(M, L) = \text{FM}_3(M, L)$,
- ii) M üniter R -modül ise $\text{FM}_1(M, L) = \text{FM}_2(M, L) = \text{FM}_3(M, L) = \text{FM}_5(M, L)$.

Önerme 2.1.9: $\emptyset \neq B \subseteq M$ ve $\alpha, \beta \in L$, $\alpha < \beta$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- i) $B \in L(M)$ ise $(\alpha, \beta)_B \in \text{FM}_1(M, T, L)$,
- ii) $\beta \in D_T$ ve $(\alpha, \beta)_B \in \text{FM}_2(M, T, L)$ ise $B \in L(M)$,
- iii) $\alpha, \beta \in D_T$ ve $B \in L(M)$ ise $(\alpha, \beta)_B \in \text{FM}_3(M, T, L)$,
- iv) $B \in L(M) \Leftrightarrow (\alpha, 1)_B \in \text{FM}_4(M, T, L)$,
- v) $B \in L(M) \Leftrightarrow (\alpha, 1)_B \in \text{FM}_1(M, T, L)$,
- vi) $B \in L(M) \Leftrightarrow 1_B \in \text{FM}_4(M, T, L)$,
- vii) $B \in L(M) \Leftrightarrow 1_B \in \text{FM}_3(M, T, L)$.

İspat:

i) Önerme 1.5.8) ile $(\alpha, \beta)_B \in \text{FG}_1(M, T, L)$ dır. Eğer $x \in M$ ve $r \in R$ için

$$(1) x \in B \text{ ise } rx \in B \text{ ve } (\alpha, \beta)_B(x) = \beta = (\alpha, \beta)_B(rx)$$

$$(2) x \notin B \text{ ise } (\alpha, \beta)_B(x) = \alpha \leq (\alpha, \beta)_B(rx)$$

Böylece $(\alpha, \beta)_B \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dır.

ii) $x, y \in B, r \in R$ için

$$\beta = \beta T \beta = (\alpha, \beta)_B(x)T(\alpha, \beta)_B(y) \leq (\alpha, \beta)_B(xy^{-1}) \leq \beta$$

Buradan $\beta = (\alpha, \beta)_B(xy^{-1})$ ve $xy^{-1} \in B$. Buradan $B \in L(M)$ dır.

iii) (i) den elde edilir.

iv) (i) ve (ii) den elde edilir.

v) (i) ve (ii) den elde edilir.

vi) (iv) den elde edilir.

vii) (i) ve (ii) den elde edilir.

Teorem 2.1.10: M bir R -modül ve $\mu \in F(M, L)$ olsun. Bu durumda;

- i) $\alpha \in D_T$, $\mu \in FM_2(M, T, L)$, $\emptyset \neq \mu_\alpha$ ise $\mu_\alpha \in L(M)$,
- ii) $\mu \in F(M, T, L)$ ve $\forall \emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α M nin alt modülü ise $\mu \in FM_3(M, T, L)$,
- iii) $\mu \in FM_1(M, L) \Leftrightarrow \forall \emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α M nin alt modülüdür.

İspat:

- i) Teorem 1.5.8) ile $\mu_\alpha (M, +)$ nin alt grubudur. Eğer $x \in \mu_\alpha$ ve $r \in R$ için

$$\alpha \leq \mu(x) \leq \mu(rx)$$

ve $rx \in \mu_\alpha$ elde edilir. Böylece $\mu_\alpha \in L(M)$.

- ii) Teorem 1.5.8) ile $\mu \in FG_3(M, T, L)$ dur. Eğer $x \in M$ ve $r \in R$ için $\alpha = \mu(x)$ alınırsa $x \in \mu_\alpha$ dır. Buradan $rx \in \mu_\alpha$ ve $\mu(x) = \alpha \leq \mu(rx)$ dır. Buradan $\mu \in FM_3(M, T, L)$ dır.
- iii) (i) ve (ii) den açıktır.

Sonuç 2.1.8 ve Teorem 2.1.10 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.11: M bir R -modül ve $\mu \in F(M, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- i) Her $\emptyset \neq \mu_\alpha$ için μ_α M nin alt modülüdür,
- ii) $\mu \in FM_1(M, L)$,
- iii) $\mu \in FM_2(M, L)$,
- iv) $\mu \in FM_3(M, L)$.

Teorem 2.1.12: $\mu \in F(M, L)$ olsun. Bu durumda;

- i) μ M nin TL -1-alt modülü $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ için
$$\bigvee_{i=1}^n \mu(x_i) \leq \mu(\sum_{i=1}^n x_i),$$
- ii) μ M nin TL -2-alt modülü, $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ ve $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ için

$$\bigvee_{i=1}^n \mu(x_i) \leq \mu(\sum_{i=1}^n r_i x_i)$$

dır.

İspat:

- i) $n=1$ için iddianın doğruluğu açıktır. n için doğru olsun.

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mu(x_i) &= \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \wedge \mu(x_{n+1}) \\
&\leq \mu\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \wedge \mu(x_{n+1}) \\
&\leq \mu\left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1}\right) \\
&= \mu\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)
\end{aligned}$$

Böylece iddia $n+1$ için doğrudur.

ii)

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^1 \mu(x_i) &= \mu(x_1) \\
&\leq \mu(r_1 \cdot x_1) \\
&= \mu\left(\sum_{i=1}^1 r_i x_i\right)
\end{aligned}$$

Böylece $n=1$ için iddia doğrudur. n için doğru olsun.

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mu(x_i) &= \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \wedge \mu(x_{n+1}) \\
&\leq \mu\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) \wedge \mu(-r_{n+1} x_{n+1}) \\
&\leq \mu\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i - (-r_{n+1} x_{n+1})\right) \\
&= \mu\left(\sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i\right)
\end{aligned}$$

Böylece iddia $n+1$ için doğrudur.

Tanım 2.1.13: $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in F(M, L)$, $\theta \in F(R, L)$ ve $\{\mu_i | i \in \Lambda\}$ M nin L -alt kümelerinin

bir ailesi olsun. Bu durumda, $\bigwedge_{i=1}^n \mu_i$, $\neg \mu$, $\theta \cdot_T \mu$, $\theta \odot_T \mu$ ve $\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$ notasyonları ile

gösterilen L -alt kümeler aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^n \mu_i)(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(x_i) \\
(-\mu)(x) &= \mu(-x), \\
(\theta \cdot_T \mu)(x) &= \bigvee_{x=ra} \theta(r) \bigwedge \mu(b), \\
(\theta \odot_T \mu)(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i) \bigwedge \mu(x_i), \\
(\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i)(x) &= \bigvee_{\substack{x=\sum_{i \in J} x_i \\ \emptyset \neq J \subseteq \Lambda, J \text{ sonlu}}} \bigwedge_{i \in J}^T \mu_i(x_i).
\end{aligned}$$

Özel gösterimler ve onlara verilen isimler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1.3: Modüller için özel L -alt kümeler

$\sum_{i=1}^n \mu_i$	$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ L -alt kümelerin T -toplamı	
$-\mu$	μ nün tersi	
$\theta \cdot_T \mu$	θ ile μ nün T -çarpımı	
$\theta \odot_T \mu$	θ ile μ nün güçlü T -çarpımı	
$\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$	$\{\mu_i i \in \Lambda\}$ ailesinin güçlü T -toplamı denir	
$\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$	$\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$	$\sum_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 +^T \mu_2 +^T \dots +^T \mu_n$
$T = \wedge$	$\sum_{i=1}^n \mu_i$	$\sum_{i=1}^n \mu_i$
$T = \wedge$	$\theta \cdot_T \mu$	$\theta \cdot \mu$
$T = \wedge$	$\theta \odot_T \mu$	$\theta \odot \mu$
$T = \wedge$	$\sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$	$\bigoplus_{i \in \Lambda} \mu_i$

Önerme 2.1.14: $\{\mu_i | i \in \Lambda\}$ M nin L -alt kümelerinin bir ailesi ise $\forall i \in \Lambda$ için $\mu_i \subseteq \sum_{i \in \Lambda}^T \mu_i$ dır.

İspat: $\forall i \in \Omega$ için $x_i = x$ ve $\emptyset \neq J^* = \{i\} \subseteq \Omega$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\mu_i(x) &= \mu_i(x_i) \\
&\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J} y_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J}^T \mu_i(x_i)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (x)$$

olur. Buradan $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \subseteq \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$ dir.

Aşağıdaki önerme Tanım 2.13. den kolaylıkla elde edilir.

Önerme 2.1.15: $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ M nin L -alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $\mu_1 +_T \mu_2 +_T \dots +_T \mu_n \subseteq \mu_1 +^T \mu_2 +^T \dots +^T \mu_n$,
- ii) $(\mu_1 +^T \mu_2)(x) = \mu_1(x) \vee \mu_2(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \mu_1(a) T \mu_2(b)$,
- iii) $(\mu_1 +_T \mu_2)(x) = \bigvee_{x=a+b} \mu_1(a) T \mu_2(b)$.

Önerme 2.1.16: M R -modül ve T L tam kafesi üzerinde bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- i) Her $A, B \in P(M)$ için $1_A = 1_B \Leftrightarrow A=B$,
- ii) Her $A, B \in P(M)$ için $1_A T 1_B = 1_A \cap 1_B = 1_{A \cap B}$,
- iii) Her $A, B \in L(M)$ için $1_A +^T 1_B = 1_A +_T 1_B = 1_A + 1_B = 1_{A+B}$.

İspat:

- i) İspat açıktır,
- ii) İspat açıktır,
- iii) $A, B \in L(M)$ ve $x \in M$ olsun.

(1) $x \in A + B$ olduğunda,

$$1 \leq \bigvee_{x=a+b} 1_A(a) T 1_B(b) \leq (1_A +^T 1_B)(x) \leq 1$$

eşitsizliği ile $(1_A +^T 1_B)(x) = 1$ dir.

(2) $x \notin A+B$ için $x \notin A$, $x \notin B$ ve $\forall x = a + b$ için $a \notin A$ veya $b \notin B$ dir. Buradan açık olarak $(1_A +^T 1_B)(x) = 0$ dir. Böylece $1_A +^T 1_B = 1_{A+B}$ dir. Benzer şekilde

$1_A +_T 1_B = 1_A + 1_B = 1_{A+B}$ olduğu gösterilir.

Teorem 2.1.17: M R -modül, $\mu \in F(M, L)$ ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\theta \in FLI_1(R, T, L)$ ise $\theta \odot_T \mu \in FM_1(M, T, L)$,
- ii) $\theta \in FLI_3(R, T, L)$ ve $\mu \in F(M, T, L)$ ise $\theta \odot_T \mu \in FM_3(M, T, L)$,
- iii) $\theta \in FLI_4(R, T, L)$ ve $\mu \in F_0(M, T, L)$ ise $\theta \odot_T \mu \in FM_4(M, T, L)$.

İspat:

i) Her $x, y \in M, s \in R$ için

$$\begin{aligned}
 (\theta \odot_T \mu)(x)T(\theta \odot_T \mu)(y) &= \left(\bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i)T\mu(x_i) \right) T \left(\bigvee_{y=\sum_{j=1}^m s_j y_j} \bigwedge_{j=1}^m \theta(s_j)T\mu(y_j) \right) \\
 &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i, y=\sum_{j=1}^m s_j y_j} \left(\bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i)T\mu(x_i) \right) T \left(\bigwedge_{j=1}^m \theta(s_j)T\mu(y_j) \right) \\
 &\leq \bigvee_{x+y=\sum_{k=1}^r p_k z_k} \bigwedge_{k=1}^r \theta(p_k)T\mu(z_k) \\
 &= (\theta \odot_T \mu)(x+y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\theta \odot_T \mu)(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i)T\mu(x_i) \\
 &\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(-r_i)T\mu(x_i) \\
 &= \bigvee_{-x=\sum_{i=1}^n (-r_i) x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(-r_i)T\mu(x_i) \\
 &= (\theta \odot_T \mu)(-x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\theta \odot_T \mu)(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i)T\mu(x_i) \\
 &\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n r_i x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(sr_i)T\mu(x_i) \\
 &= \bigvee_{sx=\sum_{i=1}^n (sr_i) x_i} \bigwedge_{i=1}^n \theta(sr_i)T\mu(x_i) \\
 &= (\theta \odot_T \mu)(sx)
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\theta \odot_T \mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dir.

ii) i) ve Teorem 1.4.6 ile elde edilir,

iii) i) ve $1 = \theta(0)T\mu(0) \leq \theta \odot_T \mu(0) \leq 1$ ile $\theta \odot_T \mu \in FM_4(M, T, L)$ elde edilir.

Teorem 2.1.18: M ise R -modül ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm olarak verilsin. Bu durumda,

$$i) \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_1(M, T, L) \text{ ise } \sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_1(M, T, L),$$

$$ii) \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_2(M, T, L) \text{ ise } \sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_2(M, T, L),$$

$$iii) \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_3(M, T, L) \text{ ise } \sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_3(M, T, L),$$

$$iv) \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_4(M, T, L) \text{ ise } \sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_4(M, T, L),$$

$$v) \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_5(M, T, L) \text{ ise } \sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_5(M, T, L).$$

İspat:

i) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_1(M, T, L)$ olsun. Her $x, y \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (x) T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (y) &= \left(\bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigvee_{y=\sum_{i=1}^n y_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right) \\ &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right) \\ &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \sum_{i=1}^n (\mu_i(x_i) T \mu_i(y_i)) \\ &\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(x_i + y_i) \\ &\leq \bigvee_{x+y=\sum_{i=1}^n a_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(a_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (x + y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(x_i) \\
&\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(-x_i) \\
&= \left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (-x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(x_i) \\
&\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(rx_i) \\
&= \left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (rx)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{FM}_1(M, T, L)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) Teorem 1.3.10. (ii) ile $\sum_{i=1}^n \mu_i \in F(M, T, L)$ dır. Buradan ii) ile ispat tamamlanır.

iv) $1 = \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(0) \leq (\sum_{i=1}^n \mu_i)(0) \leq 1$ veya $(\sum_{i=1}^n \mu_i)(0) = 1$

dır. Buradan ii) ispat tamamlanır.

v) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \text{FM}_5(M, T, L)$ olsun. Her $x, y \in M, r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}
\left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (x) T \left(\begin{matrix} n \\ \sum_{i=1}^n \mu_i \end{matrix} \right) (y) &= \left(\bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigvee_{y=\sum_{i=1}^n y_i} \bigwedge_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right) \\
&= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \left(\bigwedge_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigwedge_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \bigwedge_{i=1}^n T(\mu_i(x_i)T(\mu_i(y_i))) \\
&\leq \bigvee_{rx=\sum_{i=1}^n rx_i, sy=\sum_{i=1}^n sy_i} \bigwedge_{i=1}^n T(\mu_i(rx_i + sy_i)) \\
&\leq \bigvee_{rx+sy=\sum_{i=1}^n a_i} \bigwedge_{i=1}^n T(\mu_i(a_i)) \\
&= \left(\bigwedge_{i=1}^n T(\mu_i) \right) (rx + sy)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\bigwedge_{i=1}^n \mu_i \in \text{FM}_5(M, T, L)$ dir.

Teorem 2.1.19: M bir R -modül, $\mu \in F(M, L)$ ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

- 1) μ, M nin TL -1-alt modüldür $:\Leftrightarrow$
 - i) $\mu +_T \mu \subseteq \mu$,
 - ii) $\mu \subseteq -\mu$,
 - iii) Her $r \in R$ için $r\mu \subseteq \mu$.
- 2) μ, M nin TL -2-alt modüldür $:\Leftrightarrow$
 - i) $\mu +_T (-\mu) \subseteq \mu$,
 - ii) Her $r \in R$ için $r\mu \subseteq \mu$.
- 3) μ, M nin TL -5-alt modülüdür $:\Leftrightarrow$ Her $r, s \in R$ için $r\mu +_T s\mu \subseteq \mu$.

İspat:

- 1) " $\Rightarrow$ " μ, M nin TL -1-alt modülü olsun.

- i) Her $x \in M$ için

$$\begin{aligned}
(\mu +_T \mu)(x) &= \bigvee_{x=y+z} \mu(y)T\mu(z) \\
&\leq \bigvee_{x=y+z} \mu(y+z) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Buradan $\mu +_T \mu \subseteq \mu$.

- ii) Her $x \in M$ için

$$\mu(x) \leq \mu(-x)$$

$$= (-\mu)(x)$$

Böylece $\mu \subseteq -\mu$.

iii) Her $\forall x \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} r\mu(x) &= \bigvee_{x=ra} \mu(a) \\ &\leq \bigvee_{x=ra} \mu(ra) \\ &= \mu(x). \end{aligned}$$

Buradan $r\mu \subseteq \mu$.

Sonuç olarak i), ii) ve iii) koşulları sağlanır.

“ $\Leftarrow$ ” Her $x, y \in M, r \in R$ için i), ii), iii) şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mu(x)T\mu(y) &\leq \bigvee_{x+y=a+b} \mu(a)T\mu(b) \\ &= (\mu +_T \mu)(x + y) \\ &\leq \mu(x + y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &\leq (-\mu)(x) \\ &= \mu(-x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &\leq \bigvee_{rx=ra} \mu(a) \\ &= r\mu(rx) \\ &\leq \mu(rx) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece μ M nin TL -1-alt modüldür.

2) “ $\Rightarrow$ ” μ, M nin TL -2-alt modülü olsun.

i)

$$\begin{aligned} (\mu +_T (-\mu))(x) &= \bigvee_{x=a+b} \mu(a)T(-\mu)(b) \\ &= \bigvee_{x=a+b} \mu(a)T\mu(-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{x=a+b} \mu(a - (-b)) \\
&= \bigvee_{x=a+b} \mu(a + b) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Buradan $\mu +_T(-\mu) \subseteq \mu$.

ii) 1-ii) ye benzer şekilde yapılır.

“ $\Leftarrow$ ” Her $x, y \in M, r \in R$ için i), ii) şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mu(x)T\mu(y) &= \mu(x)T(-\mu)(-y) \\
&\leq \bigvee_{x-y=a+b} \mu(a)T(-\mu)(b) \\
&= (\mu +_T(-\mu))(x - y) \\
&\leq \mu(x - y)
\end{aligned}$$

$\mu(x) \leq \mu(rx)$ eşitsizliği 1) e benzer şekilde yapılır. Böylece μ, M nin TL -2-alt modülüdür.

3) “ $\Rightarrow$ ” μ, M nin TL -5-alt modülü olsun. Her $x \in M, r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}
(r\mu +_T s\mu)(x) &= \bigvee_{x=a+b} r\mu(a)Ts\mu(b) \\
&= \bigvee_{x=a+b} (\bigvee_{a=rc} \mu(c))T(\bigvee_{b=sd} \mu(d)) \\
&= \bigvee_{x=a+b} \bigvee_{a=rc} \bigvee_{b=sd} \mu(c)T\mu(d) \\
&\leq \bigvee_{\substack{x=a+b \\ a=rc \\ b=sd}} \mu(rc + sd) \\
&\leq \mu(x)
\end{aligned}$$

Buradan $r\mu +_T s\mu \subseteq \mu$ dir.

“ $\Leftarrow$ ” Her $x, y \in M$ ve $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned}
\mu(x)T\mu(y) &\leq \bigvee_{rx+sy=rc+sd} \mu(c)T\mu(d) \\
&= (r\mu +_T s\mu)(rx + sy) \\
&\leq \mu(rx + sy)
\end{aligned}$$

Böylece μM nin TL -5-alt modülüdür.

Teorem 2.1.20: M bir R -modül ve $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ M nin TL -alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda;

- i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_1(M, T, L)$,
- ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_2(M, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_2(M, T, L)$,
- iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_3(M, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_3(M, T, L)$,
- iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(M, T, L)$,
- v) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M, T, L)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(M, T, L)$.

İspat:

i) Teorem 1.5.6.ii) ile $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ M nin TL -1-alt grubudur. Diğer yandan $x \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(x) &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx) \\ &= \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(rx) \end{aligned}$$

Böylece $\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(x) \leq \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(rx)$. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ TL -1-alt modülüdür.

ii) i) ye benzer biçimde yapılır.

iii) Teorem 1.5.5 iv) ile $\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i$ M nin TL -3-alt grubudur. Diğer yandan $x \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \right)(x) &= \bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i(x) \\ &\leq \bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i(rx) \\ &= \left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \right)(rx) \end{aligned}$$

Böylece $\left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \right)(x) \leq \left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \right)(rx)$. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i$ TL -3-alt modülüdür.

iv) i) ye benzer şekilde yapılır.

v) $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ M nin TL -5-alt alt modüllerinin bir ailesi olsun. Buradan,
 $x, y \in M$ ve $s, r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(x) T \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(y) &= \left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x)\right] T \left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y)\right] \\
&\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x) T \mu_i(y) \\
&\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx + sy) \\
&= \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(rx + sy)
\end{aligned}$$

Böylece

$$\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(x) T \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(y) \leq \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(rx + sy)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ M nin TL -5-alt modülüdür.

Teorem 2.1.21: $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ M nin L -alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M, T, L)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_1(M, T, L)$,
- ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_3(M, T, L)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_3(M, T, L)$,
- iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M, T, L)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_4(M, T, L)$.

İspat:

- i) Her $x, y \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(x) T \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(y) &= \left[\bigvee_{x = \sum_{i \in J_1} x_i, J_1 \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J_1}^T \mu_i(x_i) \right] \\
&\quad T \left[\bigvee_{y = \sum_{i \in J_2} y_i, J_2 \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J_2}^T \mu_i(y_i) \right]
\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{\substack{x=\sum_{i \in J_1} x_i \\ y=\sum_{i \in J_2} y_i \\ J_1, J_2 \subseteq \Omega \text{ sonlu}}} (i \in J_1 \mu_i(x_i)) T (j \in J_2 \mu_j(y_j))$$

$$\leq \bigvee_{x+y=\sum_{i \in J} z_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(z_i)$$

$$= \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (x + y)$$

Böylece $(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(x) T (\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(y) \leq (\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(x + y)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (x) &= \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(x_i) \\ &\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(-x_i) \\ &\leq \bigvee_{-x=\sum_{i \in J_1} y_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(y_i) \\ &= \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (-x) \end{aligned}$$

Buradan $(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(x) \leq (\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(-x)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (x) &= \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(x_i) \\ &\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} i \in J \mu_i(rx_i) \end{aligned}$$

$$\leq \bigvee_{rx=\sum_{i \in \Lambda} z_i, \Lambda \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in \Lambda} \mu_i^T(z_i)$$

$$= \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (rx)$$

Böylece $(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(x) \leq (\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(rx)$ elde edilir. Buradan $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_1(M, T, L)$ dır.

ii) Teorem 1.3.10 ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in F(M, T, L)$ dır. Böylece i) ve Teorem 2.1.10 (i),(iii) ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_3(M, T, L)$ dır.

iii) Önerme 2.1.14 ile $1 = \mu_i(0) \leq (\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(0) \leq 1$. Buradan $(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i)(0) = 1$. Böylece $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in F_0(M, L)$ dır. Sonuç olarak i) ve Teorem 2.1.10 (i), (iv) ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_4(M, T, L)$ dır.

Sonuç 2.1.22: M ise R -modül ise aşağıdakiler geçerlidir.

- i) $(FM_1(M, T, L), \subseteq)$ tam kafestir ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_1(M, T, L)$ için $\sup\{\mu_i | i \in \Omega\} = \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$, $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ dır.
- ii) $(FM_2(M, T, L), \subseteq)$ tam kafestir ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_2(M, T, L)$ için $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ dır.
- iii) $(FM_3(M, T, L), \subseteq)$ tam kafestir ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_3(M, T, L)$ için $\sup\{\mu_i | i \in \Omega\} = \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$, $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigwedge_{i \in \Omega}^T \mu_i$ dır.
- iv) $(FM_4(M, T, L), \subseteq)$ tam kafestir ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_4(M, T, L)$ için $\sup\{\mu_i | i \in \Omega\} = \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$, $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ dır.
- v) $(FM_5(M, T, L), \subseteq)$ tam kafestir ve $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_5(M, T, L)$ için $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ dır.

İspat:

i) Teorem 2.1.9 (i) ve Teorem 2.1.14 ile

$$\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_1(M, T, L) \text{ ve } \forall i \in \Omega \text{ için } \mu_i \subseteq \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$$

dır. Diğer yandan $\theta \in FM_1(M, T, L)$ ve $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \subseteq \theta$ olması durumunda Teorem 2.1.12 kullanılarak,

$$\left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \right) (x) = \bigvee_{x=\sum_{i \in J} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J} \mu_i^T(x_i)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J} \theta(x_i) \\
&\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \theta\left(\sum_{i \in J} x_i\right) \\
&= \theta(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \subseteq \theta$ dır. sonuç olarak $\sup\{\mu_i | i \in \Omega\} = \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$ dır. Teorem 2.1.18 ile $\inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ dır.

ii) Teorem 2.1.20 ii) den elde edilir.

iii) Teorem 2.1.10 (i), (iii) ve i) ile $\sup\{\mu_i | i \in \Omega\} = \sum_{i \in \Omega}^T \mu_i$ dır. Ayrıca Teorem 1.4.6 ile

$$\forall i \in \Omega \text{ için } \bigwedge_{i \in \Omega}^T \mu_i \subseteq \mu_i$$

dır. Diğer yandan $\theta \in FM_3(M, T, L)$ ve $\forall i \in \Omega$ için $\theta \subseteq \mu_i$ olması durumunda Teorem 1.4.6

$$(v) \text{ ile } \theta \subseteq \bigwedge_{i \in \Omega}^T \mu_i \text{ dır. Teorem 2.1.18 ile } \inf\{\mu_i | i \in \Omega\} = \bigwedge_{i \in \Omega}^T \mu_i \text{ elde edilir.}$$

iv) (i) ye benzer şekilde ispat edilir.

v) Teorem 2.1.20 v) den elde edilir.

Sonuç 2.1.22 özel durumu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.23: M ise R -modül ve T sonsuz V -dağılımlı t -norm ise aşağıdakiler geçerlidir.

i) $(FM_1(M, T, L), \subseteq)$ kafestir ve $\mu, \vartheta \in FM_1(M, T, L)$ için

$$\mu \vee \vartheta = \mu +^T \vartheta \text{ ve } \mu \wedge \vartheta = \mu \cap \vartheta$$

dır [10].

ii) $(FM_3(M, T, L), \subseteq)$ kafestir ve $\mu, \vartheta \in FM_3(M, T, L)$ için

$$\mu \vee \vartheta = \mu +^T \vartheta \text{ ve } \mu \wedge \vartheta = \mu T \vartheta$$

dır.

iii) $(FM_4(M, T, L), \subseteq)$ kafestir ve $\mu, \vartheta \in FM_4(M, T, L)$ için

$$\mu \vee \vartheta = \mu +_T \vartheta \text{ ve } \mu \wedge \vartheta = \mu \cap \vartheta$$

dır.

Teorem 2.1.24: M R -modül ve T sonsuz V -dağılımlı t -norm ise $(FM_3(M, T, L), \subseteq)$ modüler kafestir.

İspat: $\mu, \vartheta, \theta \in FM_3(M, T, L)$ ve $\vartheta \subseteq \mu$ olsun. Buradan Teorem 1.2.7 (iii) ile

$$\vartheta \vee (\mu \wedge \theta) \subseteq \mu \wedge (\vartheta \vee \theta) \quad (1)$$

dır. Ayrıca, Sonuç 1.2.21 ile $\forall x \in M$ için

$$\vartheta(x) = \vartheta(x)T\vartheta(x) \leq \mu(x)T\vartheta(x) \leq \vartheta(x)$$

Buradan $\mu(x)T\vartheta(x) = \vartheta(x)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} (\mu \wedge (\vartheta \vee \theta))(x) &= \mu(x)T(\vartheta +^T \theta)(x) \\ &= \mu(x)T[\vartheta(x) \vee \theta(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T\theta(b)] \\ &= \mu(x)T\vartheta(x) \vee \mu(x)T\theta(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \mu(x)T\vartheta(a)T\theta(b)] \\ &= \vartheta(x) \vee (\mu T\theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T\mu(x)T\vartheta(a)T\theta(b)] \\ &\leq \vartheta(x) \vee (\mu T\theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T\mu(x)T\mu(a)T\theta(b)] \\ &\leq \vartheta(x) \vee (\mu T\theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T\mu(x-a)T\theta(b)] \\ &= \vartheta(x) \vee (\mu T\theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T\mu(b)T\theta(b)] \\ &= \vartheta(x) \vee (\mu T\theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a)T(\mu T\theta)(b)] \\ &= (\vartheta +^T (\mu T\theta))(x) \\ &= (\vartheta \vee (\mu \wedge \theta))(x) \end{aligned}$$

Böylece (1) ile $\mu \wedge (\vartheta \vee \theta) = \vartheta \vee (\mu \wedge \theta)$ elde edilir. Buradan $(FM_3(M, T, L), \subseteq)$ modüler kafestir.

Sonuç 2.1.25: M ise R -modül ve L sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes olsun. Bu durumda,

i) $(FM_1(M, L), \subseteq)$ modüler kafestir [10].

ii) $(FM_4(M, L), \subseteq)$ modüler kafestir [14].

Sonuç 2.1.26: R bir halka ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t-norm ise $(FLI_3(R, T, L), \subseteq)$ modüler kafestir.

Sonuç 2.1.27: R bir halka ve L sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes olsun. Bu durumda,

i) $(FLI_1(R, L), \subseteq)$ modüler kafestir [30].

ii) $(FLI_4(R, L), \subseteq)$ modüler kafestir [30].

Teorem 2.1.28: M R -modül ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t-norm olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) $(FM_3(M, T, L), \subseteq)$ dağılımlı kafestir,

ii) $(L(M), \subseteq)$ dağılımlı kafestir.

İspat:

i) $\Rightarrow$ ii) $A, B, C \in L(M)$ ise $1_A, 1_B, 1_C \in FM_3(M, T, L)$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} 1_{A \cap (B+C)} &= 1_A \cap 1_{B+C} \\ &= 1_A T (1_B +^T 1_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1_A \wedge (1_B \vee 1_C) \\
&= (1_A \wedge 1_B) \vee (1_A \wedge 1_C) \\
&= (1_A T 1_B) +^T (1_A T 1_C) \\
&= 1_{(A \cap B) + (A \cap C)}
\end{aligned}$$

Böylece $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ dır. Sonuç olarak $(L(M), \subseteq)$ dağılımlı kafestir.

ii)⇒i) $\mu, \vartheta, \theta \in \text{FM}_3(M, T, L)$ olsun. Buradan Teorem 1.2.7 (iii) ile

$$(\mu \wedge \vartheta) \vee (\mu \wedge \theta) \subseteq \mu \wedge (\vartheta \vee \theta) \quad (1)$$

dır. Ayrıca, $\forall x \in M$ için

$$\begin{aligned}
(\mu \wedge (\vartheta \vee \theta))(x) &= \mu(x) T (\vartheta +^T \theta)(x) \\
&= \mu(x) T [\vartheta(x) \vee \theta(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \vartheta(a) T \theta(b)] \\
&= \mu(x) T \vartheta(x) \vee \mu(x) T \theta(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \mu(x) T \vartheta(a) T \theta(b)] \\
&= (\mu T \vartheta)(x) \vee (\mu T \theta)(x) \vee \bigvee_{x=a+b} \mu(x) T \vartheta(a) T \theta(b)] \quad (1)
\end{aligned}$$

$x = a + b$ için $\alpha = \mu(x) T \vartheta(a) T \theta(b)$ ise $\alpha \in D_T$ ve $x \in \mu_\alpha, a \in \vartheta_\alpha, b \in \theta_\alpha$ dır. Buradan $x \in \mu_\alpha \cap (\vartheta_\alpha + \theta_\alpha) = (\mu_\alpha \cap \vartheta_\alpha) + (\mu_\alpha \cap \theta_\alpha)$ ve $\exists c \in \mu_\alpha \cap \vartheta_\alpha$ ve $d \in \mu_\alpha \cap \theta_\alpha$ ve $x = c + d$.

Buradan,

$\alpha \leq \mu(c), \alpha \leq \vartheta(c), \alpha \leq \mu(d), \alpha \leq \theta(d)$ ve

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha T \alpha T \alpha T \alpha \leq \mu(c) T \vartheta(c) T \mu(d) T \theta(d) \\
&= (\mu T \vartheta)(c) T (\mu T \theta)(d) \\
&\leq \bigvee_{x=u+v} (\mu T \vartheta)(u) T (\mu T \theta)(v) \quad (2)
\end{aligned}$$

(1) ve (2) ile

$$\begin{aligned}
(\mu \wedge (\vartheta \vee \theta))(x) &\leq (\mu T \vartheta)(x) \vee (\mu T \theta)(x) \vee \bigvee_{x=u+v} (\mu T \vartheta)(u) T (\mu T \theta)(v) \\
&= ((\mu T \vartheta) +^T (\mu T \theta))(x) \\
&= ((\mu \wedge \vartheta) \vee (\mu \wedge \theta))(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mu \wedge (\vartheta \vee \theta) = (\mu \wedge \vartheta) \vee (\mu \wedge \theta)$ dır. Sonuç olarak $(\text{FM}_3(M, T, L), \subseteq)$ dağılımlı kafestir.

Sonuç 2.1.29: R bir halka ve T sonsuz $\vee$ -dağılımlı t -norm olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) $(\text{FLI}_3(R, T, L), \subseteq)$ dağılımlı kafestir,

ii) $(LI(R), \subseteq)$ dağılımlı kafestir.

Teorem 2.1.30: M, N R -modüller ve $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfisi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_1(N, T, L)$,
- ii) $\mu \in \text{FM}_2(M, T, L)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_2(N, T, L)$,
- iii) $\mu \in \text{FM}_3(M, T, L)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_3(N, T, L)$,
- iv) $\mu \in \text{FM}_4(M, T, L)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_4(N, T, L)$,
- v) $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_5(N, T, L)$.

İspat:

i) [66, Teorem 3.11 (1)] ve [75, Teorem 3.10 (1)] den açıktır.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) $\mu \in \text{FM}_3(M, T, L)$ olsun. Buradan $\text{Im } \mu \subseteq D_T$ ve $\mu \in \text{FM}_2(M, T, L)$ dır. Ayrıca 1.3.10

Teorem ii) ile $\forall y \in N$ için $f(\mu)(y) = \bigvee_{y=f(x)} \mu(x) \in D_T$

Böylece $\text{Im } f(\mu) \subseteq D_T$. Böylece ii) ile $f(\mu) \in \text{FM}_3(N, T, L)$ dir.

iv) $\mu \in \text{FM}_4(M, T, L)$ olsun. Buradan $\mu(0) = 1$ ve $\mu \in \text{FM}_2(M, T, L)$ dır.

Buradan $1 = \mu(0) \leq \bigvee_{0=f(x)} \mu(x) = f(\mu)(0) \leq 1$

Buradan $f(\mu)(0) = 1$ ve ii) ile $f(\mu) \in \text{FM}_4(N, T, L)$.

v) $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L)$, $a, b \in N, r, s \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
 f(\mu)(a)Tf(\mu)(b) &= \bigvee_{a=f(x)} \mu(x) T \bigvee_{b=f(y)} \mu(y) \\
 &= \bigvee_{a=f(x), b=f(y)} \mu(x) T \mu(y) \\
 &\leq \bigvee_{a=f(x), b=f(y)} \mu(rx + sy) \\
 &\leq \bigvee_{ra+sb=f(rx+sy)} \mu(rx + sy) \\
 &\leq \bigvee_{ra+sb=f(u)} \mu(u) \\
 &= f(\mu)(ra + sb)
 \end{aligned}$$

Böylece $f(\mu) \in \text{FM}_5(N, T, L)$ dir.

Teorem 2.1.31: M, N R -modüller ve $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfisi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $v \in \text{FM}_1(N, T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in \text{FM}_1(M, T, L)$,
- ii) $v \in \text{FM}_2(N, T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in \text{FM}_2(M, T, L)$,
- iii) $v \in \text{FM}_3(N, T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in \text{FM}_3(M, T, L)$.

iv) $v \in \text{FM}_4(N, T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in \text{FM}_4(M, T, L)$.

v) $v \in \text{FM}_5(N, T, L)$ ise $f^{-1}(v) \in \text{FM}_5(M, T, L)$.

İspat:

i) [66, Teorem 3.11 (2)] ve [75, Teorem 3.10 (2)] den açıktır.

ii) $v \in \text{FM}_2(N, T, L)$, $a, b \in M, r \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} f^{-1}(v)(a)Tf^{-1}(v)(b) &= v(f(a))Tv(f(b)) \\ &\leq v(f(a) - f(b)) \\ &= v(f(a - b)) \\ &= f^{-1}(v)(a - b) \end{aligned}$$

i) ye benzer şekilde $f^{-1}(v)(a) \leq f^{-1}(v)(ra)$.

Böylece $f^{-1}(v) \in \text{FM}_2(M, T, L)$ dir.

iii) $v \in \text{FM}_3(N, T, L)$ olsun. Buradan $\text{Im } v \subseteq D_T$ ve $v \in \text{FM}_2(N, T, L)$ dir. Böylece $f^{-1}(v)(a) = v(f(a)) \in D_T$ ve $\text{Im } f^{-1}(v) \subseteq D_T$. Buradan ii) ile $f^{-1}(v) \in \text{FM}_3(M, T, L)$ dir.

iv) $v \in \text{FM}_4(N, T, L)$ olsun. Buradan $v(0) = 1$ ve $v \in \text{FM}_2(N, T, L)$ dir.

$$\text{Buradan } 1 = v(0) = v(f(0)) = f^{-1}(v)(0).$$

$$\text{Buradan } f^{-1}(v)(0) = 1 \text{ ve ii) ile } f^{-1}(v) \in \text{FM}_4(M, T, L).$$

v) $v \in \text{FM}_5(N, T, L)$, $a, b \in M, r, s \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} f^{-1}(v)(a)Tf^{-1}(v)(b) &= v(f(a))Tv(f(b)) \\ &\leq v(rf(a) + sf(b)) \\ &= v(f(ra) + f(sb)) \\ &= v(f(ra + sb)) \\ &= f^{-1}(v)(ra + sb) \end{aligned}$$

Böylece $f^{-1}(v) \in \text{FM}_5(M, T, L)$ olur.

Teorem 2.1.32: $\{M_i | i \in \Omega\}$ R -modüllerin ailesi, $\mu_i \in F(M_i, L)$ ve $i \in \Omega$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_1(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,

ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_2(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_2(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,

iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_4(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_4(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,

iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_5(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_5(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$.

İspat:

i) $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in \Omega} M_i$, $r \in R$ olmak üzere $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_1(M_i, T, L)$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i) T \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (y_i) &= \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y_i) \right) \\
 &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) T \mu_i(y_i) \\
 &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i + y_i) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i + y_i)) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i) + (y_i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i) &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \\
 &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(-x_i) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((-x_i)) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (-(x_i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i) &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \\
 &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx_i) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((rx_i)) \\
 &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (r(x_i))
 \end{aligned}$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$ dir.

ii) i)' ye benzer biçimde ispat edilir.

iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in \text{FM}_4(M_i, T, L)$ olsun. ii) ile $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_2(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$ olduğu açıktır.

$$\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i\right)(0) = \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(0) = 1$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$ dir.

iv) Her $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in \Omega} M_i, r, s \in R$ ve $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M_i, T, L)$ olsun.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i\right)(x_i)T\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i\right)(y_i) &= \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)\right)T\left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y_i)\right) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)T\mu_i(y_i) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx_i + sy_i) \\ &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(r(x_i) + s(y_i)) \\ &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i\right)(r(x_i) + s(y_i)) \end{aligned}$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$ elde edilir.

Teorem 2.1.33: M R -modül ve T, L tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,
- ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_2(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_2(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,
- iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_3(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_3(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,
- iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$,
- v) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M_i, T, L)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$.

İspat:

i) Her $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in \Omega} M_i, r \in R$ ve $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M_i, T, L)$ olsun.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)\right)T\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(y_i)\right) &= \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)\right)T\left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y_i)\right) \\ &\leq \mu_i(x_i)T\mu_i(y_i) \\ &\leq \mu_i(x_i + y_i) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $i \in \Omega$ için $\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(x_i)\right)T\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(y_i)\right) \leq \mu_i(x_i + y_i)$ dir.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \right) T \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(y_i) \right) &\leq \prod_{i \in \Omega}^T \mu_i(x_i + y_i) \\ &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i + y_i) \end{aligned}$$

Böylece, $\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \right) T \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i(y_i) \right) \leq \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i) + (y_i))$ dir.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i)) &= \prod_{i \in \Omega}^T \mu_i(x_i) \\ &\leq \prod_{i \in \Omega}^T \mu_i(-x_i) \\ &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (-(x_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) ((x_i)) &= \prod_{i \in \Omega}^T \mu_i(x_i) \\ &\leq \prod_{i \in \Omega}^T \mu_i(rx_i) \\ &= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (r(x_i)) \end{aligned}$$

Bu eşitsizliklerle birlikte $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L)$ dir.

ii) i)' ye benzer biçimde ispat edilir.

iii) ii) ve Teorem 1.4.6.iii)' den elde edilir.

iv) ii)' den açıktır.

v) i)' ye benzer biçimde ispat edilir.

Teorem 2.1.34: M R -modül ve T, L tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \text{FM}_1(M, T, L)$ ise $\prod_{i=1}^k \mu_i \in \text{FM}_1(M, T, L)$,
- ii) Her $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \text{FM}_2(M, T, L)$ ise $\prod_{i=1}^k \mu_i \in \text{FM}_2(M, T, L)$,
- iii) Her $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \text{FM}_3(M, T, L)$ ise $\prod_{i=1}^k \mu_i \in \text{FM}_3(M, T, L)$,
- iv) Her $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \text{FM}_4(M, T, L)$ ise $\prod_{i=1}^k \mu_i \in \text{FM}_4(M, T, L)$,

v) Her $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in FM_5(M, T, L)$ ise $\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \in FM_5(M, T, L)$.

İspat:

i) $x, y \in M$ ve $r \in R$ için,

$$\begin{aligned} \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(x) T \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(y) &= \mu_1(x) T \mu_2(x) T \dots T \mu_k(x) T \mu_1(y) T \mu_2(y) T \dots T \mu_k(y) \\ &\leq \mu_1(x+y) T \mu_2(x+y) T \dots T \mu_k(x+y) \\ &= \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(x+y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(x) &= \mu_1(x) T \mu_2(x) T \dots T \mu_k(x) \\ &\leq \mu_1(-x) T \mu_2(-x) T \dots T \mu_k(-x) \\ &= \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(x) &= \mu_1(x) T \mu_2(x) T \dots T \mu_k(x) \\ &\leq \mu_1(rx) T \mu_2(rx) T \dots T \mu_k(rx) \\ &= \left(\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \right)(rx) \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \in FM_1(M, T, L)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) $\bigotimes_{i=1}^k \mu_i \in F(M, T, L)$ olduğundan ii) den elde edilir.

iv) $\bigotimes_{i=1}^k \mu_i(0) = \mu_1(0) T \mu_2(0) T \dots T \mu_k(0) = 1$ ve ii) ile ispat tamamlanır.

v) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

2.2. $TL - \theta - i$ -alt Modüller

Bir R halkası ve L -alt halkası üzerinde L -alt modüllerin bazı özellikleri [2, 46, 47] çalışmalarında incelendi. Bu bölümde R nin keyfi bir L -alt kümesi üzerinde $TL - \theta - i$ -alt modüller tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1: M bir R -modül, $\mu \in F(M, L)$ ve $\theta \in F(R, L)$ olsun.

- 1) μ, M nin bir $TL - \theta - 1$ alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu \in FG_1(M, T, L)$,
 - ii) Her $x \in M$ ve her $r \in R$ için $\mu(x)T\theta(r) \leq \mu(rx)$ dir.
- 2) μ, M nin bir $TL - \theta - 2$ alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu \in FG_2(M, T, L)$,
 - ii) Her $x \in M$ ve her $r \in R$ için $\mu(x)T\theta(r) \leq \mu(rx)$ dir.
- 3) μ, M nin bir $TL - \theta - 3$ alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow \mu \in F(M, T, L)$ ve μM nin $TL - \theta - 2$ -alt modülüdür.
- 4) μ, M 'nin bir $TL - \theta - 4$ alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow \mu \in F_0(M, L)$ ve μM 'nin $TL - \theta - 2$ alt modülüdür.
- 5) μ, M nin bir $TL - \theta - 5$ -alt modülüdür denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in M$ ve her $r, s \in R$ için $\mu(x)T\mu(y)T\theta(r)T\theta(s) \leq \mu(rx + sy)$.

Tablo 2.2.1: M nin $TL - \theta - i$ -alt modüllerinin gösterimleri ve isimlendirmeleri

$T t$ -norm, L tam kafes	$T = T_M$	$L = [0,1]$	$T = T_M, L = [0,1]$
$FM_1(M, T, L, \theta)$ $TL - \theta - 1$ alt modül	$FM_1(M, L, \theta)$ $L - \theta - 1$ alt modül	$FM_1(M, T, \theta)$ $T - \theta - 1$ bulanık alt modül	$FM_1(M, \theta)$ $\theta - 1$ bulanık alt modül
$FM_2(M, T, L, \theta)$ $TL - \theta - 2$ alt modül	$FM_2(M, L, \theta)$ $L - \theta - 2$ alt modül	$FM_2(M, T, \theta)$ $T - \theta - 2$ bulanık alt modül	$FM_2(M, \theta)$ $\theta - 2$ bulanık alt modül

Tablo 2.2.1' in devamı

$FM_3(M, T, L, \theta)$ $TL - \theta - 3$ alt modül	$FM_3(M, L, \theta)$ $L - \theta - 3$ alt modül	$FM_3(M, T, \theta)$ $T - \theta - 3$ bulanık alt modül	$FM_3(M, \theta)$ $\theta - 3$ bulanık alt modül
$FM_4(M, T, L, \theta)$ $TL - \theta - 4$ alt modül	$FM_4(M, L, \theta)$ $L - \theta - 4$ alt modül	$FM_4(M, T, \theta)$ $T - \theta - 4$ bulanık alt modül	$FM_4(M, \theta)$ $\theta - 4$ bulanık alt modül
$FM_5(M, T, L, \theta)$ $TL - \theta - 5$ alt modül	$FM_5(M, L, \theta)$ $L - \theta - 5$ alt modül	$FM_5(M, T, \theta)$ $T - \theta - 5$ bulanık alt modül	$FM_5(M, \theta)$ $\theta - 5$ bulanık alt modül

Uyarı 2.2.2: M bir R -modül ise tanımların açık sonucu olarak her $1 \leq k \leq 5$ için $FM_k(M, T, L, 1_R) = FM_k(M, T, L)$ dır.

Örnekler 2.2.3: T, L tam kafesi üzerinde bir t -norm ve $\theta \in F(\mathbb{Z}, L)$ olarak verilsin. Bu durumda $(\mathbb{Z}_2, +)$ değişmeli grubu $\mathbb{Z}$ -modül olarak alınırsa $FM_i(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta)$ kümeleri aşağıdaki şekildedir.

- i) $FM_1(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0}), \forall k \in \mathbb{Z} \text{ için } \mu(\bar{1})T\theta(2k) \leq \mu(\bar{0})\}$
- ii) $FM_2(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0}), \forall k \in \mathbb{Z} \text{ için } \mu(\bar{1})T\theta(2k) \leq \mu(\bar{0})\}$
- iii) $FM_3(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, T, L) \mid \mu(\bar{1}) \leq \mu(\bar{0})\},$
- iv) $FM_4(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \mu(\bar{0}) = 1\},$
- v) $FM_5(\mathbb{Z}_2, T, L, \theta) = \{\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L) \mid \forall k, l \in \mathbb{Z} \text{ için } \mu(\bar{1})T\mu(\bar{1})T\theta(2k)T\theta(2l) \leq \mu(\bar{0}),$
 $\mu(\bar{1})T\mu(\bar{1})T\theta(2k+1)T\theta(2l+1) \leq \mu(\bar{0})\}.$

Önerme 2.2.4: M bir R -modül ve $\theta \in F(R, L)$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

- i) $FM_1(M, T, L) \subseteq FM_1(M, T, L, \theta),$
- ii) $FM_2(M, T, L) \subseteq FM_2(M, T, L, \theta),$
- iii) $FM_3(M, T, L) \subseteq FM_3(M, T, L, \theta),$
- iv) $FM_4(M, T, L) \subseteq FM_4(M, T, L, \theta),$
- v) $FM_5(M, T, L) \subseteq FM_5(M, T, L, \theta).$

İspat:

- i) $\mu \in FM_1(M, T, L), x, y \in M$ ve $r \in R$ olsun. Buradan $\mu(x) \leq \mu(rx)$. Ayrıca

$$\mu(x)T\theta(r) \leq \mu(x) \leq \mu(rx)$$

elde edilir. Böylece $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$ dır.

- ii) i)' ye benzer şekilde ispat edilir.
- iii) i)' ye benzer şekilde ispat edilir.
- iv) i)' ye benzer şekilde ispat edilir.
- v) $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L)$, $x, y \in M$ ve $r, s \in R$ olsun.

$$\mu(x)T\mu(y)T\theta(r)T\theta(s) \leq \mu(x)T\mu(y) \leq \mu(rx + sy)$$

olduğundan $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$.

Aşağıdaki önermelerin ispatları tanımlardan kolaylıkla elde edilir.

Önerme 2.2.5: M bir R -modül, $\theta \in F(R, L)$ ve $T_1 \leq T_2$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

- i) $\text{FM}_1(M, T_2, L, \theta) \subseteq \text{FM}_1(M, T_1, L, \theta)$,
- ii) $\text{FM}_2(M, T_2, L, \theta) \subseteq \text{FM}_2(M, T_1, L, \theta)$,
- iii) $\text{FM}_4(M, T_2, L, \theta) \subseteq \text{FM}_4(M, T_1, L, \theta)$,
- iv) $\text{FM}_5(M, T_2, L, \theta) \subseteq \text{FM}_5(M, T_1, L, \theta)$.

Önerme 2.2.6: M bir R -modül, $\theta_1, \theta_2 \in F(R, L)$ ve $\theta_1 \subseteq \theta_2$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

- i) $\text{FM}_1(M, T, \theta_2) \subseteq \text{FM}_1(M, T, \theta_1)$,
- ii) $\text{FM}_2(M, T, \theta_2) \subseteq \text{FM}_2(M, T, \theta_1)$,
- iii) $\text{FM}_3(M, T, \theta_2) \subseteq \text{FM}_3(M, T, \theta_1)$.
- iv) $\text{FM}_4(M, T, \theta_2) \subseteq \text{FM}_4(M, T, \theta_1)$,
- v) $\text{FM}_5(M, T, \theta_2) \subseteq \text{FM}_5(M, T, \theta_1)$.

Teorem 2.2.7: M bir R -modül ve $\theta \in F(R, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

- i) $\text{FM}_1(M, T, L, \theta) \subseteq \text{FM}_2(M, T, L, \theta)$,
- ii) $\text{FM}_1(M, T, L, \theta) \subseteq \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$,
- iii) Her $r \in R$ için $\theta(r) \leq \theta(-r)$ ise $\text{FM}_2(M, T, L, \theta) \subseteq \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$
- iv) $\text{FM}_3(M, T, L, \theta) \subseteq \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$,
- v) $\text{FM}_4(M, T, L, \theta) \subseteq \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$,
- vi) M üniter R -modül ise $\text{FM}_1(M, T, L, \theta) = \text{FM}_2(M, T, L, \theta)$.

İspat:

- i) Teorem 2.2.4 i)' ye benzer biçimde ispat edilir.
- ii) $\mu \in \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$ olsun. Buradan $\forall x, y \in M, r, s \in R$ için

$$\mu(x)T\mu(y)T\theta(r)T\theta(s) \leq \mu(rx)T\mu(sy) \leq \mu(rx + sy)$$

elde edilir. Böylece $\mu \in \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$.

iii) $\mu \in FM_1(M, T, L, \theta)$ olsun. Buradan $\forall x, y \in M, r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} \mu(x)T\mu(y)T\theta(r)T\theta(s) &\leq \mu(rx)T\mu(y)T\theta(-s) \\ &\leq \mu(rx)T\mu((-s)y) \\ &\leq \mu(rx)T\mu(-sy) \\ &\leq \mu(rx - (-sy)) \\ &= \mu(rx + sy) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mu \in FM_5(M, T, L, \theta)$.

iv) Teorem 2.1.7 (iii) ye benzer şekilde yapılır.

v) Teorem 2.1.7 (iv) ye benzer şekilde yapılır.

vi) Teorem 2.1.7 (v) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.8: M bir R -modül, $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ M nin L -alt kümelerinin bir ailesi ve $\theta \in F(R, L)$ olsun. Bu durumda;

i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M, T, L, \theta)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_1(M, T, L, \theta)$,

ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_2(M, T, L, \theta)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_2(M, T, L, \theta)$,

iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_3(M, T, L, \theta)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_3(M, T, L, \theta)$,

iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M, T, L, \theta)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(M, T, L, \theta)$,

v) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M, T, L, \theta)$ ise $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(M, T, L, \theta)$.

İspat:

i) $\{\mu_i | i \in \Omega\} \subseteq FM_1(M, T, L, \theta)$ olsun. Buradan $\forall x, y \in M$ ve $r \in R$ için

Teorem 2.2.7 i) ye benzer biçimde $(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(x)T(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(y) \leq (\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(x + y)$ ve $(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(x) \leq (\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(-x)$ eşitlikleri elde edilir. Ayrıca

$$\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(x)T\theta(r) = \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x) \right)T\theta(r)$$

$$\leq \bigwedge_{i \in \Omega} (\mu_i(x)T\theta(r))$$

$$\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx)$$

$$= \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \right)(rx)$$

dır. Böylece $(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(x)T\theta(r) \leq (\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i)(rx)$. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i \in \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) Teorem 1.5.5 iv) ile $\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \in \text{FG}_3(M, T, L)$ dır. Diğer yandan $x \in M$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(x)T\theta(r) &\leq \bigcap_{i \in \Omega}^T [\mu_i(x)T\theta(r)] \\ &\leq \bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i(rx) \\ &= \left(\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(rx) \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega}^T \mu_i \in \text{FM}_3(M, T, L, \theta)$ dır.

iv) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

v) $\{\mu_i | i \in \Omega\} TL - \theta - 3$ -alt alt modüllerinin bir ailesi olsun. $x, y \in M$ ve $r, s \in R$ için

$$\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(x)T\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(y)T\theta(r)T\theta(s) = \left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x)\right]^T \left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y)\right]^T T\theta(r)T\theta(s)$$

Teorem 1.2.6) ile

$$\left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x)\right]^T \left[\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y)\right]^T T\theta(r)T\theta(s) \leq \bigwedge_{i, j \in \Omega} (\mu_i(x)T \mu_j(y) T\theta(r)T\theta(s))$$

$$\leq \bigwedge_{i \in \Omega} (\mu_i(x)T \mu_i(y) T\theta(r)T\theta(s))$$

$$\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx + sy)$$

$$= \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(rx + sy)$$

Böylece

$$\left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(x) T \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(y) T \theta(r) T \theta(s) \leq \left(\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i\right)(rx + sy)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in \Omega} \mu_i$ $TL - \theta - 3$ -alt modülüdür.

Sonuç 2.2.9: M R -modül ve $\theta \in F(R, L)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $(FM_1(M, T, \theta), \subseteq)$ tam kafestir,
- ii) $(FM_2(M, T, \theta), \subseteq)$ tam kafestir,
- iii) $(FM_3(M, T, \theta), \subseteq)$ tam kafestir,
- iv) $(FM_4(M, T, \theta), \subseteq)$ tam kafestir,
- v) $(FM_4(M, T, \theta), \subseteq)$ tam kafestir.

Teorem 2.2.10: $\{\mu_i | i \in \Omega\}$ M nin L -alt kümelerinin bir ailesi, $\theta \in F(R, T, L)$ ve T sonsuz $\vee$ - dağılımlı bir t -norm olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_1(M, T, L, \theta)$,
- ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_3(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_3(M, T, L, \theta)$,
- iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FM_4(M, T, L, \theta)$.

İspat:

- i) Teorem 2.1.21 ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in FG_1(M, T, L)$ dır.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(x) T \theta(r) &= \left[\bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J}^T \mu_i(x_i) \right] T \theta(r) \\ &= \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J}^T [\mu_i(x_i) T \theta(r)] \\ &\leq \bigvee_{x=\sum_{i \in J_1} x_i, J \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in J}^T \mu_i(rx_i) \\ &\leq \bigvee_{rx=\sum_{i \in \Lambda} z_i, \Lambda \subseteq \Omega \text{ sonlu}} \bigwedge_{i \in \Lambda}^T \mu_i(z_i) \\ &= \left(\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i\right)(rx) \end{aligned}$$

Buradan $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$ dır.

- ii) Teorem 1.3.10 ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in F(M, T, L)$ dır. Böylece i) ve Teorem 2.2.7 (i), (iv) ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in \text{FM}_3(M, T, L, \theta)$ dır.
- iii) Teorem 2.1.21 ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in F_0(M, L)$ dır. Böylece i) ve Teorem 2.2.7 (i), (iv) ile $\sum_{i \in \Omega}^T \mu_i \in \text{FM}_4(M, T, L, \theta)$ dır.

Teorem 2.2.11: M R – modül, $\theta \in F(R, L)$, $\mu \in F(M, L)$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- 1) μ, M nin $TL - \theta - 1$ -alt modüldür $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu +_T \mu \subseteq \mu$,
 - ii) $\mu \subseteq -\mu$,
 - iii) $\theta \odot_T \mu \subseteq \mu$.
- 2) μ, M nin $TL - \theta - 2$ -alt modüldür $\Leftrightarrow$
 - i) $\mu +_T (-\mu) \subseteq \mu$,
 - ii) $\theta \odot_T \mu \subseteq \mu$.
- 3) μ, M nin $TL - \theta - 5$ -alt modüldür $\Leftrightarrow \theta \odot_T \mu +_T \theta \odot_T \mu \subseteq \mu$.

İspat:

- 1) “ $\Rightarrow$ ” i) ve ii) Teorem 2.2.12.1) ile elde edilir.

i) Her $x \in M$ için

$$\begin{aligned} \theta \cdot_T \mu(x) &= \bigvee_{x=ra} \theta(r)T\mu(a) \\ &\leq \bigvee_{x=ra} \mu(ra) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

“ $\Leftarrow$ ” i), ii) ve Teorem 2.2.12.1) ile $\forall x, y \in M$ ve $r \in R$ için

$$\mu(x)T(y) \leq \mu(x + y) \text{ ve } \mu(x) \leq \mu(-x)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mu(x)T\theta(r) &\leq \bigvee_{rx=ra} \theta(r)T\mu(a) \\ &= \theta \cdot_T \mu(rx) \end{aligned}$$

$$\leq \mu(rx)$$

Böylece $\mu TL - \theta - 1$ alt modüldür.

2) 1) e benzer şekilde ispat edilir.

3) “ $:\Rightarrow$ ” Her $x \in M$ için

$$\begin{aligned} (\theta._T \mu +_T \theta._T \mu)(x) &= \bigvee_{x=u+v} \theta._T \mu(u) T \theta._T \mu(v) \\ &= \bigvee_{x=u+v} [\bigvee_{u=ra} \theta(r) T \mu(a)] T [\bigvee_{v=sb} \theta(s) T \mu(b)] \\ &= \bigvee_{x=u+v} \bigvee_{u=ra} \bigvee_{v=sb} [\theta(r) T \mu(a) T \theta(s) T \mu(b)] \\ &\leq \bigvee_{\substack{x=u+v \\ u=ra \\ v=sb}} \mu(ra + sb) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ” $\forall x, y \in M$ ve $r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} \mu(x) T \mu(y) T \theta(r) T \theta(s) &\leq \bigvee_{\substack{rx+sy=u+v \\ u=ra \\ v=sb}} \mu(a) T \mu(b) T \theta(r) T \theta(s) \\ &= (\theta._T \mu) +_T (\theta._T \mu)(rx + sy) \\ &\leq \mu(rx + sy) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan μM nin $TL - \theta - 5$ -alt modüldür

Teorem 2.2.12: M ise R -modül ve T sonsuz V -dağılımlı t -norm ve $\theta \in F(R, T, L)$ olarak verilsin. Bu durumda,

- i) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_1(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_1(M, T, L, \theta),$
- ii) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_2(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_2(M, T, L, \theta),$
- iii) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_3(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_3(M, T, L, \theta),$
- iv) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in FM_4(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i=1}^n \mu_i \in FM_4(M, T, L, \theta),$

v) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$ ise $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$.

İspat:

i) Teorem 2.1.18 ile $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{FG}_1(M, T, L)$ dır. Her $x \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (x) T \theta(r) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n [\mu_i(x_i) T \theta(r)] \\ &\leq \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(r x_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (r x) \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{FM}_1(M, T, L, \theta)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde ispat edilir.

iii) Teorem 2.1.18 ile $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{F}(M, T, L)$ dır. Buradan ii) ile ispat tamamlanır.

iv) Teorem 2.1.18 ile $\sum_{i=1}^n \mu_i \in \text{F}_0(M, L)$ dır. Buradan ii) ispat tamamlanır.

v) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \text{FM}_5(M, T, L)$ olsun. Her $x, y \in M, r, s \in R$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (x) T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) (y) T \theta(r) T \theta(s) &= \left(\bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigvee_{y=\sum_{i=1}^n y_i} \sum_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right) T \theta(r) T \theta(s) \\ &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(x_i) \right) T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(y_i) \right) T \theta(r) T \theta(s) \\ &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n x_i, y=\sum_{i=1}^n y_i} \sum_{i=1}^n [\mu_i(x_i) T (\mu_i(y_i) T \theta(r) T \theta(s))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{rx=\sum_{i=1}^n rx_i, sy=\sum_{i=1}^n sy_i} \bigvee_{i=1}^n \mu_i(rx_i + sy_i) \\
&\leq \bigvee_{rx+sy=\sum_{i=1}^n a_i} \bigvee_{i=1}^n \mu_i(a_i) \\
&= \left(\bigvee_{i=1}^n \mu_i \right) (rx + sy)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\bigvee_{i=1}^n \mu_i \in \text{FM}_5(M, T, L, \theta)$ dir.

Teorem 2.2.13: $f: M \rightarrow N$ R –modül homomorfisi, $\theta \in F(R, L)$ ve T L -üzerinde sonsuz V -dağılımlı t -norm olmak üzere aşağıdakiler elde edilir.

- i) $\mu \in \text{FM}_1(M, T, \theta)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_1(N, T, \theta)$ dir,
- ii) $\mu \in \text{FM}_2(M, T, \theta)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_2(N, T, \theta)$ dir,
- iii) $\mu \in \text{FM}_3(M, T, \theta)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_3(N, T, \theta)$ dir.
- iv) $\mu \in \text{FM}_4(M, T, \theta)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_4(N, T, \theta)$ dir,
- v) $\mu \in \text{FM}_5(M, T, \theta)$ ise $f(\mu) \in \text{FM}_5(N, T, \theta)$ dir.

İspat:

- i) $\mu \in \text{FM}_1(M, T, \theta)$, $a, b \in N, r \in R$ olsun. Teorem 2.1.30.i) ile aşağıdaki eşitsizlikler kolaylıkla yazılabilir.

$$f(\mu)(a)Tf(\mu)(b) \leq f(\mu)(a + b) \text{ ve } f(\mu)(a) \leq f(\mu)(-a).$$

$$\begin{aligned}
f(\mu)(y)T\theta(r) &= \left(\bigvee_{f(x)=y} \mu(x) \right) T\theta(r) \\
&= \bigvee_{f(x)=y} (\mu(x)T\theta(r)) \\
&\leq \bigvee_{f(x)=y} \mu(rx) \\
&\leq \bigvee_{rf(x)=ry} \mu(rx) \\
&= \bigvee_{f(rx)=ry} \mu(rx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{f(a)=ry} \mu(a) \\
&= f(\mu)(ry)
\end{aligned}$$

$f(\mu)(y)T\theta(r) \leq f(\mu)(ry)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliklerle birlikte $f(\mu) \in \text{FM}_1(N, T, \theta)$ olduğu ispat edilmiş olur.

ii) i) ye benzer biçimde yapılır.

iii) i) ye benzer biçimde yapılır.

iv) i) ye benzer biçimde yapılır.

v) $\mu \in \text{FM}_5(M, T, \theta)$, $a, b \in N, r, s \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
f(\mu)(a)Tf(\mu)(b)T\theta(r)T\theta(s) &= \left(\bigvee_{a=f(x)} \mu(x) \right) T \left(\bigvee_{b=f(y)} \mu(y) \right) T\theta(r)T\theta(s) \\
&= \bigvee_{a=f(x), b=f(y)} \mu(x) T \mu(y) T\theta(r)T\theta(s) \\
&\leq \bigvee_{a=f(x), b=f(y)} \mu(rx + sy) \\
&\leq \bigvee_{ra+sb=f(rx+sy)} \mu(rx + sy) \\
&\leq \bigvee_{ra+sb=f(u+v)} \mu(u + v) \\
&= f(\mu)(ra + sb)
\end{aligned}$$

Böylece $f(\mu) \in \text{FM}_5(N, T, \theta)$ dir.

Teorem 2.2.14: $f: M \rightarrow N$ R –modül homomorfisi, $\theta \in \text{F}(R, L)$ ve T L –üzerinde t-norm olmak üzere aşağıdakiler elde edilir.

i) $\vartheta \in \text{FM}_1(N, T, \theta)$ ise $f^{-1}(\vartheta) \in \text{FM}_1(M, T, \theta)$ dir,

ii) $\vartheta \in \text{FM}_2(N, T, \theta)$ ise $f^{-1}(\vartheta) \in \text{FM}_2(M, T, \theta)$ dir,

iii) $\vartheta \in \text{FM}_3(N, T, \theta)$ ise $f^{-1}(\vartheta) \in \text{FM}_3(M, T, \theta)$ dir,

iv) $\vartheta \in \text{FM}_4(N, T, \theta)$ ise $f^{-1}(\vartheta) \in \text{FM}_4(M, T, \theta)$ dir,

v) $\vartheta \in \text{FM}_5(N, T, \theta)$ ise $f^{-1}(\vartheta) \in \text{FM}_5(M, T, \theta)$ dir.

İspat:

i) $\vartheta \in FM_1(N, T, \theta)$ ve $a, b \in M$ için Teorem 2.1.31.i) ile

$$f^{-1}(\vartheta)(a)Tf^{-1}(\vartheta)(b) \leq f^{-1}(\vartheta)(a+b) \text{ ve } f^{-1}(\vartheta)(a) \leq f^{-1}(\vartheta)(-a)$$

dir. Her $a \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vartheta)(a)T\theta(r) &= \vartheta(f(a))T\theta(r) \\ &\leq \vartheta(rf(a)) \\ &= \vartheta(f(ra)) \\ &= f^{-1}(\vartheta)(ra) \end{aligned}$$

Böylece $f^{-1}(\vartheta) \in FM_1(M, T, \theta)$ dir.

ii) i) ye benzer şekilde yapılır.

iii) i) ye benzer şekilde yapılır.

iv) i) ye benzer şekilde yapılır.

v) $\vartheta \in FM_5(N, T, \theta)$ ve $\forall a \in M, r \in R$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vartheta)(a)Tf^{-1}(\vartheta)(b)T\theta(r)T\theta(s) &= \vartheta(f(a))T\vartheta(f(b))T\theta(r)T\theta(s) \\ &\leq \vartheta(rf(a) + sf(b)) \\ &= \vartheta(f(ra + sb)) \\ &= f^{-1}(\vartheta)(ra + sb) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f^{-1}(\vartheta) \in FM_5(M, T, \theta)$ dir.

Teorem 2.2.15: $\{M_i | i \in \Omega\}$ R -modüllerin ailesi, $\mu_i \in F(M_i, L)$, $i \in \Omega$ ve $\theta \in F(R, L)$ olsun.

Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

i) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_1(M_i, T, L, \theta)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$,

ii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_2(M_i, T, L, \theta)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_2(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$,

iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M_i, T, L, \theta)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$,

iv) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M_i, T, L, \theta)$ ise $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$,

İspat:

i) Teorem 2.1.32 ile $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FG_1(\prod_{i \in \Omega} \mu_i, T, L)$ dir. $(x_i) \in \prod_{i \in \Omega} M_i$, $r \in R$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i) T\theta(r) &= \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) T\theta(r) \\ &\leq \bigwedge_{i \in \Omega} [\mu_i(x_i) T\theta(r)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx_i) \\
&= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (rx_i) \\
&= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (r(x_i))
\end{aligned}$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_1(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$ dir.

ii) i)' ye benzer biçimde ispat edilir.

iii) Her $i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_4(M_i, T, L, \theta)$ olsun. ii) ile $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_2(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$ dir.

$$\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (0) = \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(0) = 1$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_4(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$ dir.

iv) Her $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in \Omega} M_i, , r, s \in R$ ve $\forall i \in \Omega$ için $\mu_i \in FM_5(M_i, T, L, \theta)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (x_i) T \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (y_i) T \theta(r) T \theta(s) &= \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(x_i) \right) T \left(\bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(y_i) \right) T \theta(r) T \theta(s) \\
&\leq \bigwedge_{i \in \Omega} [\mu_i(x_i) T \mu_i(y_i) T \theta(r) T \theta(s)] \\
&\leq \bigwedge_{i \in \Omega} \mu_i(rx_i + sy_i) \\
&= \left(\prod_{i \in \Omega} \mu_i \right) (r(x_i) + s(y_i))
\end{aligned}$$

Böylece $\prod_{i \in \Omega} \mu_i \in FM_5(\prod_{i \in \Omega} M_i, T, L, \theta)$ elde edilir.

3. İRDELEME

Klasik cebirsel yapıların alt kafeslerinin özel olması cebirsel yapılar hakkında önemli bilgiler vermektedir. Bu düşünce bulanık alt cebirsel (L -alt cebirsel, TL -alt cebirsel) kafeslerin özel (modüler, dağılımlı komplementlenebilir, v.b.) olması durumu birçok araştırmacı tarafından tartışıldı ve incelenmeye devam etmektedir. Konuyla ilgili önemli araştırmacılardan [5, 6] t -tipindeki normal bulanık alt grupların ve ideallerin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Zhang [80] sol (sağ) bulanık ideallerin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Tarnauceanu [61] sonlu grupların devirliliği L -altgrupların kafesinin dağılımlı olması ile ilgili karakterizasyonu verdi. Jahan [30] L -ideallerin kafesinin modüler olduğunu gösterdi. Bayrak ve Yamak [10] TL -alt modüllerin kafesine ait supremum belirleyerek sonsuz V -dağılımlı kafesler üzerinde L -alt modüllerin kafesinin modüler olduğunu gösterildiler. Bayrak ve Yamak [13] sonsuz V -dağılımlı kafesler üzerinde L -idealinin kafesinin dağılımlı olması için bir gerek ve yeter şart verildiler. Bu yapılanlara bakıldığında bulanık alt cebirsel (L -alt cebirsel, TL -alt cebirsel) kafeslerin incelenmesinin önemi artmaktadır. Henüz TL -alt cebirsel kafeslerinin modüler, dağılımlı ve komplementlenebilir açısından incelenmesi sonuçlandırılmış değildir. Bunun için literatürde mevcut bütün tanımları kapsayacak şekilde alt cebirsel kafesleri incelemek ve mevcut sonuçları bunlardan elde etmek hedeflenmiştir. Bu düşünce ile $TL - k$ -(sol, sağ) ideallerin, $TL - k$ -alt modüllerin kafeslerine ait özel sonuçlar elde edilmiştir (Teorem 2.1.24, Sonuç 2.1.26, sonuç 2.1.27, Teorem 2.1.28, Sonuç 2.1.29). Bu sonuçların özel durumu başka makalelerde verilen sonuçları kapsamaktadır (Sonuç 2.1.25, Sonuç 2.1.27).

4. SONUÇLAR

Bu tezin birinci bölümünde $1 \leq k \leq 4$ için bir halkanın $TL - k$ -alt halkaları ve $TL - k$ -(sol, sağ) idealleri ve bir modülün $TL - k$ -alt, $TL - \theta - k$ -alt modülleri tanımlanarak temel özellikleri araştırılmıştır.

Yapılan çalışmaların ilk kısmında her $1 \leq k \leq 4$ için $TL - k$ ($k = 1,2,3,4,5$) alt modüller tanıtılarak aralarındaki ilişkiler incelenmiştir (Teorem 2.1.7). Ayrıca, $TL - k$ alt modüller kullanılarak yeni $TL - k$ alt modüller üretilmiştir (Teorem 2.1.17, Teorem 2.1.18, Teorem 2.1.21). $TL - k$ alt modüllerin karakterizasyonuna ait sonuçlar verilmiştir (Teorem 2.1.10, Teorem 2.1.19). $TL - k$ alt modüllerin kümeleri " $\subseteq$ " bağıntısına göre tam kafes oldukları (Teorem 2.1.20, Sonuç 2.1.22) gösterilerek özellikle $TL - k$ ($k = 1,3,4$) kafeslerine ait supremum ve infremum karakterize edilmiştir. Daha fazla olarak $TL - 3$ tam kefesinin modüler kafes (Teorem 2.1.24) olduğu ve önemli 3 sonucu (Sonuç 2.1.25., Sonuç 2.1.26, Sonuç 2.1.27) verilmiştir. Bununla birlikte $TL - 3$ tam kefesinin dağılımlı (Teorem 2.1.28) olması için bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak $TL - k$ alt modüllerin görüntüsü (Teorem 2.1.30), ters-görüntüsü (Teorem 2.1.31) ve kartezyen çarpımları (Teorem 2.1.32, Teorem 2.1.33) bu alt modülün özelliğini değiştirmedeği gösterildi.

İkinci kısımda $TL - \theta - k$ ($k = 1,2,3,4,5$) alt modüller, $TL - k$ ($k = 1,2,3,4,5$) alt modüllerin bir genellemesi olarak tanımlandı (Önerme 2.2.4). $TL - \theta - k$ ($k = 1,2,3,4,5$) alt modüller arasındaki ilişki (Teorem 2.2.7) de verildi. Ayrıca, $TL - \theta - k$ alt modüller kullanılarak yeni $TL - \theta - k$ alt modüller üretilmiştir (Teorem 2.2.10, Teorem 2.1.20, Teorem 2.2.12). $TL - \theta - k$ alt modüllerin karakterizasyonuna ait sonuçlar verilmiştir (Teorem 2.2.11). $TL - \theta - k$ alt modüllerin kümeleri " $\subseteq$ " bağıntısına göre tam kafes oldukları (Teorem 2.2.8, Sonuç 2.2.9) de gösterildi. Son olarak $TL - \theta - k$ alt modüllerin görüntüsü (Teorem 2.2.13), ters-görüntüsü (Teorem 2.2.14) ve kartezyen çarpımları (Teorem 2.2.15) bu alt modülün özelliğini değiştirmedeği gösterildi.

5. ÖNERİLER

- 1) $TL - 2$ -alt modüllerin kafesinin modülerlik, dağılımlılık ve komplementlenebilirlik özellikleri incelenebilir. Özellikle bu kafesde supremum belirlemek için bir yöntem belirlenebilir.
- 2) Bir L -alt kümesi ile üretilen $TL - k$ -alt modülü tanımlanarak buna ait özellikler verilebilir.
- 3) Bir $TL - k$ -alt modülünün bölüm modülü tanımlanabilir.
- 4) $TL - \theta - k$ -alt modüllerin kafesleri $k = 1,2,3,4,5$ değerleri için modülerlik, dağılımlılık ve komplementlenebilirlik açısından incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abu Osman, M.T., On fuzzy vector spaces via triangular norm, *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 9 (1986) 33-42.
2. Acar, U., L-fuzzy idealler ve L-fuzzy modüller üzerine bazı sonuçlar, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2006.
3. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., The lattices of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups, *Information Sciences*, 76 (1994) 1-11.
4. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., A complete study of the lattices of fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups, *Information Sciences*, 82 (1995) 198-218.
5. Ajmal, N., The lattice of fuzzy normal subgroups is modular, *Information Sciences*, 83 (1995) 199-209.
6. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., The lattice of fuzzy ideals of a ring, *Fuzzy Sets and Systems*, 74 (1995) 371-379.
7. Anthony, J.M. ve Sherwood, H., Fuzzy groups redefined, *J. Math. Anal. Appl.*, 69 (1979) 124-130.
8. Bahadır, O., *TL-fuzzy grup homomorfileri*, Yüksek Lisans, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.
9. Bayrak, D. ve Yamak, S., The lattices of generalized normal L-subgroups, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27 (2014) 1143–1152.
10. Bayrak, D., ve Yamak, S., A note on the lattice of TL-submodules of a module, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10 (2015) 323-330.
11. Bayrak, D., Genelleştirilmiş L-altgrupların kafesleri, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2015.
12. Bayrak, D. ve Yamak, S., Distributivity and pseudocomplementation of lattices of generalized (L)-subgroups, *International Journal of Algebra and Statistics*, 5 (2016) 107-114.
13. Bayrak, D., ve Yamak, S., A note on distributivity of the lattice of L-ideals of a ring, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48 (2019) 180-185.
14. Bhambri, S.K. ve Kumar, P., Lattices of fuzzy submodules, *International Mathematical Forum*, 4 (2009) 653–659.

15. Bhattacharya, P., Fuzzy groups: Some characterisations.II, Information Sciences, 38 (1986) 293-297.
16. Birhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Rhode Island, 1967.
17. Brungs, H. H., Rings with a distributive lattice of right ideals, Journal of Algebra, 40 (1976) 392-400.
18. Camillo, V., Distributive modules, Journal of Algebra, 36 (1975), 16-25.
19. Das, P., Fuzzy vector spaces under triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 25 (1988) 73-85.
20. Dixit, V.N., Kumar, R. Ve Ajmal, N., On fuzzy rings, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992) 205-213.
21. Gao, N., Li Q. ve Li, Z., When do L-fuzzy ideals of a ring generate a distributive lattice?, Open Mathematics, 14(2016) 531-542.
22. Goguen, J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 145-174.
23. Gupta, K.C. ve Ray, S., Modularity of the quasi-Hamiltonian fuzzy subgroups, Information Sciences, 79 (1994) 233-250.
24. Head, T., A meta theorem for deriving fuzzy theorems from crisp versions, Fuzzy Sets and Systems, 73 (1995) 349-358.
25. Isaac, P., On L-modules, Proceedings of the National Conference on Mathematical Modelling, Baseliuss College, Kottayam, Kerala, India, March 2002, 123-134.
26. Isaac, P., Studies In Fuzzy Commutative Algebra, Phd Thesis, Cochin University Of Science And Technology, Cochin University, India, 2004.
27. Isaac, P., Simple and semisimple L-modules, J. Fuzzy Math., 12(4), 2004.
28. Jacobson, N., Basic Algebra I, W.H. Freeman and Company, USA, 1980.
29. Jahan I., Modularity of Ajmal for the lattices of fuzzy ideals of a ring, Iran. J. Fuzzy Syst., 5 (2008) 71-78.
30. Jahan, I., The lattice of L-ideals of a ring is modular, Fuzzy Sets and Systems, 199 (2012) 121-129.
31. Katsaras, A.K. ve Liu, D.B., Fuzzy vector spaces and topological vector spaces, J. Math. Anal. Appl., 58 (1977) 135-146.
32. Kim, H.-D., Kim, Y.-H. ve Kim, J.-G., TL-subgroups having the property, Fuzzy Sets and Systems, 106 (1999) 455-462.
33. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

34. Kumar, R., Bhambri, S.K. ve Kumar, P., Fuzzy submodules: some analogues and deviations, Fuzzy Sets and Systems, 70 (1995) 125-130.
35. Kumar, R., Non-distributive of the lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 97 (1998) 393-394.
36. Kumbhojkar, V. ve Bapat, M.S., Correspondence theorems for fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991) 213-219.
37. Kuroki, N., On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 5 (1981) 203-215.
38. Liu, W.J., Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 8 (1982) 133-139.
39. Liu, W.J., Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 11 (1983) 31-41.
40. Lubczonok, P., Fuzzy vector spaces, Fuzzy Sets and Systems, 38 (1990) 329-343.
41. Ma, J.L. ve Yu, C.H., Fuzzy rings(1), Northeast Normal Univ. (Nat. Sci. Edu.), 1 (1981) 23-28.
42. Majumdar, S. ve Sultana, Q.S., The lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 81 (1996) 271-273.
43. Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., Fuzzy subfields, Fuzzy Sets and Systems, 37 (1990) 383-388.
44. Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., Fuzzy vector spaces, Information Sciences, 55 (1991) 271-281.
45. Martinez, L., Fuzzy Subgroups of Fuzzy Groups and Fuzzy Ideals, J. Fuzzy Math., 3 (1995) 833-849.
46. Martinez, L., Fuzzy Modules over Fuzzy Rings in Connection with Fuzzy Ideals of Fuzzy Rings, J. Fuzzy Math., 4 (1996) 843-857.
47. Martinez, L., Prime and primary L -fuzzy ideals over L -fuzzy rings, Fuzzy Sets and Systems, 101 (1999) 489-494.
48. Mashinchi, M. ve Zahedi, M.M., On L -fuzzy primary submodules, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992) 231-236.
49. Mordeson, J.N. ve Malik, D.D., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific, 1998.
50. Mukherjee, N.P. ve Bhattacharya, P., Fuzzy groups: Some group theoretic analogs, Information Sciences, 39 (1986) 247-267.

51. Nanda, S., Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 (1986) 89-94.
52. Nanda, S., Fuzzy algebras over fuzzy fields, Fuzzy Sets and Systems, 37 (1990) 99-103.
53. Negoita, C.V. ve Ralescu, D.A., Applications of Fuzzy Sets and System Analysis, Birkhauser, Basel, 1975.
54. Ore, O., Structures and group theory, II, Duke Mathematical Journal, 4 (1938) 247–269.
55. Pan, F., Fuzzy finitely generated modules, Fuzzy Sets and Systems, 21 (1987) 105-113.
56. Ray, S., Modified TL-subgroups of a group, Fuzzy Sets and Systems, 91 (1997) 375-387.
57. Rosenfield, A., Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl., 35(1971) 512-517.
58. Schmidt, R., Subgroup Lattices of Groups, Walter de Gruyter, New York, 1994.
59. Sidky, F.I., Essential and superfluous fuzzy submodules, J. Inst. Math. Comput. Sci. Math., 4 (1991) 103-106.
60. Stephenson, W., Modules whose lattice of submodules is distributive, Proceedings of the London Mathematical Society, 28 (1974) 291-310.
61. Tarnauceanu, M., Distributivity in lattices of fuzzy subgroups, Information Sciences, 179 (2009) 1163-1168.
62. Tarnauceanu, M., A Note on the lattice of fuzzy subgroups of a finite group, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 19 (2011) 537–545.
63. Tu, L. ve Wenxiang, G., Some properties of fuzzy vector spaces, J. Fuzzy Math., 3 (1995) 921-931.
64. Tuganbaev, A.A., Modules whose lattice of submodules is distributive, Russian Mathematical Surveys, 44 (1989) 263-264.
65. Wang, Z., On L- subsets and TL-subalgebras, Fuzzy Set and Systems, 65 (1994) 59-69.
66. Wang, Z., TL-submodules and TL-linear subspaces, Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994) 211-225.
67. Wang, Z. Ve Yu, Y., TL-subrings and TL-ideals, Part 2: Generated TL-ideals, Fuzzy Sets and Systems, 87 (1997) 209-217.

68. Wang, Z., Primary TL-submodules and P primary TL-submodules, Fuzzy Sets and Systems, 88 (1997) 237-254.
69. Wenxiang, G. ve Tu, L., Fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992) 377- 380.
70. Yazgan, D., TL-alt modüller ve TL-lineer uzaylar için bazı tanım ve teoremler, Yüksek Lisans Tezi, RTEÜ, Fen bilimleri Enstitüsü, Rize, 2019.
71. Yu, Y., Fuzzy linear spaces redefined, Fuzzy Math., 4 (1984) 59-62.
72. Yu, Y., Finitely generated fuzzy linear space, J. Fuzzy Math., 6 (1986) 83-88.
73. Yu, Y., Finitely generated T-fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 30 (1989) 69-81.
74. Yu, Y., Mordeson, J.N. ve Cheng, S.C., Elements of L-algebra, in: Lecture Notes in Fuzzy Mathematics and Computer Science, Creighton University, Omaha, 1994.
75. Yu, Y. ve Wang, Z., TL-subrings and TL-ideals, Part 1: Basic concepts, Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994) 93-103.
76. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.
77. Zahedi, M.M., Some result on L-Fuzzy modules, Fuzzy Sets and Systems, 55 (1993) 355-361.
78. Zahedi, M.M. ve Ameri, A., Fuzzy exact sequences in category of fuzzy modules, J. Fuzzy Math., 2 (1994) 409-424.
79. Zhang, Q. ve Meng, G., On the lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 112 (2000) 349–353.
80. Zhang, Q., The lattice of fuzzy (left, right) ideals of a ring is modular, Fuzzy Sets and Systems, 125 (2002) 209-214.

ÖZGEÇMİŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi.
Matematik Bölümü lisans eğitimini tamamladı.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programına kabul edildi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi yüksek lisans İngilizce hazırlık programını tamamladı. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.