4.6 Bir Kare Matrisin İnversini(Tersini) Gauss Yöntemine Göre Üçgen Matrislere Ayrılarak Hesaplama

Gauss yöntemine göre $\det A \neq 0$ (determinantı sıfırdan farklı) olan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki *nxn* boyutlu bir kare matrisin *(Cayley)* inversini hesaplayabilmek için, önce bu matris; aynı boyutta, $A = B\,C$ çarpım özelliğine sahip B,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ..... & 0 \\ b_{21} & 1 & ..... & 0 \\ : & : & & : \\ b_{n1} & b_{n2} & ..... & 1 \end{bmatrix}$$

köşegen elemanları bir olan bir alt üçgen matris ve C,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ..... & c_{2n} \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}$$

bir üst üçgen olacak şekilde iki üçgen matrise ayrılır. A matrisinin bu şekildeki iki üçgen matris ayrılmasında, önce C üst üçgen matrisinin elemanları, daha sonra da A ve C matrisinin elemanlarından faydalanarak B alt üçgen matrisinin elemanları hesaplanır. Buna benzer şekilde; C matrisinin elemanlarının A matrisinden hesaplanmasında, A matrisinde ardı sıra yapılan satır indirgemelerinden faydalanılır. Böyle bir satır indirgemesi için; A matrisinin ilk satırı aynen C üst üçgen matrisinin birinci satırı olarak alınır. Yani; $c_{11} = a_{11}$, $c_{12} = a_{12}$ ve $c_{1n} = a_{1n}$ alınır. Sonra; A matrisinin birinci satır elemanları; sıra ile a_{11} elemanına bölünerek her biri için elde edilen değerler, önce ikinci satırın birinci sütun elemanı ile çarpılıp ikinci satır elemanlarından çıkartılarak,

$$a_{22.1} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$$

$$a_{23.1} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n.1} = a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{21}$$

sonra üçüncü satırın birinci elemanı ile çarpılıp üçüncü satır elemanlarından çıkartılarak,

$$a_{32.1} = a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}$$

$$a_{33.1} = a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}$$

$$\vdots$$

$$a_{3n.1} = a_{3n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{31}$$

ve nihayet $n.$ satırın birinci sütun elemanı ile çarpılıp $n.$ satır elemanlarından çıkartılarak

$$a_{n2.1} = a_{n2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{n1}$$

$$a_{n3.1} = a_{n3} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{n1}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn.1} = a_{nn} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{n1}$$

birinci indirgeme işlemleri gerçekleştirilmiş olur. Her bir satır için yapılan bu tür işlemler sonucunda;

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & ..... & a_{2n.1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2.1} & ..... & a_{nn.1} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir adım indirgenmiş matris elde edilir. Daha sonra, benzer işlemler, ikinci satır için tekrarlanıp

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & ..... & a_{2n.1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ..... & a_{nn.2} \end{bmatrix}$$

ikinci adım ve devam ederek,

$$a_{33.2} = a_{33.1} - \frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} a_{32.1}$$

$$\vdots$$

$$a_{3n.2} = a_{3n.1} - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} a_{32.1}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn.2} = a_{nn.1} - \frac{a_{2n.1}}{a_{2.1}} a_{32.1}$$

bütün indirgemeler elde edilir.

Aynı şekilde, indirgeme işlemlerine, en son satırın, satır indirgemesine karşılık gelen *n-1* adıma kadar devam edilerek sonuçta; *C* üst üçgen matrisi,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & ..... & a_{2n.1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ..... & a_{nn.n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ..... & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra, *C* ve *A* matrislerinden faydalanarak; *B C* = *A* olacağından *B* matrisinin de elemanları; bu adımda bilinenler olan, *C* matrisi ile bilinmeyenler olan *B* matrisinin elemanlarının çarpımlarının *A* matrisinin, her birine karşılık gelen, elemanlarına eşit olacağı koşulundan kurulacak denklemlerin çözümünden hesaplanabilir. Sonuçta, yapılan çözümlerden, *B* alt üçgen ve *C* üst üçgen matrisleri elde edilmiş olur.

A matrisinin bu şekildeki iki üçgen matrise ayrılması işlemleri, yapılacak genelleştirmeler neticesinde, her bir üçgen matrisin elemanlarının hesaplanmasında izlenecek yollar; özetle aşağıdaki gibi bazı kurallara bağlanabilir.

ÖNEMLİ

- *C matrisinin 1. satırındaki elemanları; A matrisinin 1. satırındaki elemanlarına eşit olur.*

$$c_{ij} = a_{ij} \quad ; \quad j = 1,2,3,...,n$$

- *B matrisinin köşegen terimleri, tanım gereği, 1 olur. Ayrıca, bu matrisin 1. sütunundaki diğer elemanları A matrisinin 1. sütunundaki elemanlarının sırası ile* $c_{11} = a_{11}$ *terimine bölünmeleri ile elde edilmektedir.*

$$b_{ii} = 1 \qquad ; \qquad i = 1,2,3,....,n$$

$$b_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad ; \qquad i = 1,2,3,....,n$$

- *C matrisinin 2. satırının elemanları, B matrisinin 1. sütunundaki aynı satır indisli elemanla, C matrisinin 1. satırındaki aynı sütun indisli elemanı çarpımının A matrisinin karşılık gelen elemandan çıkartılması ile elde edilmektedir.*

$$c_{2j} = a_{2j} - b_{21}c_{1j} \quad ; \quad j = 2,3,.....,n$$

- *B matrisinin 2. sütununun elemanları; B matrisinin 1. sütunundaki aynı satır indisli elemanlarının* c_{12} *ile çarpımının A matrisinin karşılık gelen elemanından çıkartılması ile bulunan değerin* c_{22} *değerine bölünmesi sonucunda elde edilmektedir.*

$$b_{i2} = \frac{a_{i2} - b_{i1}c_{12}}{c_{22}} \quad ; \quad i = 3,4,......,n$$

- *C matrisinin 3. ve daha sonraki satırlarındaki elemanlar; B matrisinin daha önce hesaplanmış aynı satır indisli elemanları ile C matrisinin daha önce hesaplanmış aynı sütun indisli elemanlarının karşılıklı çarpımları toplamının A matrisinin eşlenik teriminden çıkartılması ile bulunmaktadır.*
-

$$c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 3,4,.....,n \\ i = 3,4,.....,n \end{array}$$

- *B matrisinin 3. ve daha sonraki sütunlarındaki elemanları; bu matrisin daha önce hesaplanmış aynı satır indisli elemanları ile C matrisinin daha önce hesaplanmış aynı sütun indisli elemanlarının karşılıklı çarpımları toplamının A matrisinin karşılık gelen teriminden çıkartılması ile bulunan değerin C matrisinin aynı sütun indisli köşegen elemanına bölünmesi sonucunda elde edilmektedir.*

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj}}{c_{jj}} \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 3,4,.....,n \\ i = 3,4,.....,n \end{array}$$

Böylece; yapılan tüm işlemler sonucunda; sırasıyla, önce C üst üçgen matrisinin bir satırı, sonrada B alt üçgen matrisinin aynı indisli sütunu sırayla hesaplanarak, C ve B üçgen matrislerin tüm elemanları elde edilerek, üçgen matrislere ayırma işlemi tamamlanmış olur.

Sonra, bir ikinci işlem adımı olarak, B ve C matrislerinin B^{-1} ve C^{-1} inversleri; $BB^{-1} = I$ ve $CC^{-1} = I$ özelliğinden faydalanarak, çarpımları sonucunda elde edilecek denklemlerden, elemanları teker, teker hesaplanarak elde edilirler.

Sonuçta A matrisinin aranan A^{-1} inverisi de; bu iki B^{-1} ve C^{-1} invers matrislerinin tersi sıra çarpımlarından,

$$A^{-1} = C^{-1} B^{-1}$$

olarak hesaplanır.

Ayrıca unutulmamalıdır ki ; üçgen matrislerin determinantları köşe elemanlarının çarpımı bularak, A'nın determinatı kısa yoldan hesaplanabilmektedir.

$$A = B * C$$
$$det(A) = \det(B) * \det(C)$$

İşleminde B'nin köşe elemanları 1 olacağından B alt üçgen matrisinin determinantı 1, C üst üçgenin determinantı köşe elemanlarının çarpımı olacağında A matrisinin determinantı da bu değerlerin çarpımı olacaktır.

Konuyla ilgili bir örnek olarak: Gauss yöntemine göre;

ÖRNEK :
$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$$

matrisinin üçgen matrislere ayrılarak inversinin diğer adıyla tersinin hesaplanması verilebilir.

Çözüm: önce bu matris aynı boyuttan $A = B\,C$ özelliğine sahip, yukarıda anlatılan kurallara göre ardı sıra yapılan satır dönüşümü sonucunda;

B köşegen elamanları bir olan bir alt üçgen,

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\b_{21}&1&0\\b_{31}&b_{32}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

ve C bir üst üçgen matrise olacak şekilde,

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\0&c_{22}&c_{23}\\0&0&c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

iki farklı üçgen alt matrislere ayrılır. Böylece, her bir işlem sonucundan;

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\ \text{alt üçgen}\quad \text{ve}\quad C=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{üst üçgen}$$

matrisleri elde edilmiş olur.

Burada; işlemlerin doğru yapıldığını tekrar kanıtlamak için; *BC*=*A* çarpım özelliğinden faydalanarak,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\b_{21}&1&0\\b_{31}&b_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\0&c_{22}&c_{23}\\0&0&c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$$

denetimini yapılabilir.

Sonra; $CC^{-1}=I$ ve $BB^{-1}=I$ koşulundan,

$$CC^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}&q_{13}\\0&q_{22}&q_{23}\\0&0&q_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$BB^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{11}&0&0\\Q_{21}&Q_{22}&0\\Q_{31}&Q_{32}&Q_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

q_{ij} ve Q_{ij}; invers matrislerin elemanları çarpım işlemlerinden elde edilecek denklemlerin çözümünden,

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Daha sonra da A matrisinin inversi,

$$A^{-1}=C^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Denetim için, $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ koşulundan faydalanarak,

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

4.7 Bir Kare Simetrik Matrisin İnversi Gauss Yöntemine Göre Üçgen Matrislere Ayrılarak Hesaplanması

Bir kare matrisin Gauss yöntemine göre üçgen matrislere ayrılarak inversinin hesaplanmasında; matris kare-simetrik bir matris olunca; invers hesaplama işlemi oldukça basitleşir. Bu durumda invesi hesaplanacak matrisin elemanları köşegene göre simetrik olacaklarından, bu yolla inversinin hesaplanmasında sadece köşegen ve köşegen dışındaki üst elemanlarını kullanmak yeterli olur. Sonuçta, yapılacak hesaplama işlemleri de gösterim yönünden bir sadelik arz eder. Bu amaçla seçilecek bir kare simetrik matris, en genel şekliyle,

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&.....&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&.....&a_{2n}\\:&:&&:\\a_{1n}&a_{2n}&.....&a_{nn}\end{bmatrix}$$

ise, söylendiği gibi, yukarıdaki anlatılanlara benzer yönde; indirgemeler yoluyla üst ve alt üçgen matrisleri hesaplanır. Böyle bir çözüm içinde, Gauss yöntemine göre üçgen matrislere ayırmada anlatılan işlemlerin, kare simetrik matrisler için özelleştirilmesinden elde edilecek hesaplamalar algoritmasının tablo halinde yapılmasından faydalanılabilir. Bu amaçla, verilen matrisle aynı boyutta;

a_{11} -1	a_{12} $-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$	a_{13} $-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$	....	a_{1n} $-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}$
	a_{22} $a_{22.1}$ -1	a_{23} $a_{23.1}$ $-\dfrac{a_{23.1}}{a_{22.1}}$	....	a_{2n} $a_{2n.1}$ $-\dfrac{a_{2n.1}}{a_{22.1}}$
		a_{33} $a_{33.2}$ -1	....	a_{3n} $a_{3n.2}$ $-\dfrac{a_{3n.2}}{a_{33.2}}$
			....	....
				a_{nn} $a_{nn.n-1}$

şekildeki gibi bir hesap algoritması tablosu düzenlenerek, kare simetrik matrisin bütün elemanları bu tabloya yerleştirilir ve her bir elemana ilişkin indirgeme işlemleri bu tablo üzerinde, genel kurallara uygun olara yapılır. Matrisin bu şekilde yapılan satır indirgenmesi sonucunda elde edilen katsayıları;

$$a_{22.1} = a_{22} - a_{12}\frac{a_{12}}{a_{11}} \qquad a_{33.2} = a_{33} - a_{13}\frac{a_{13}}{a_{11}} - a_{23.1}\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}}$$

$$a_{23.1} = a_{23} - a_{12}\frac{a_{13}}{a_{11}} \quad ; \quad a_{3n.2} = a_{3n} - a_{13}\frac{a_{1n}}{a_{11}} - a_{23.1}\frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{2n.1} = a_{2n} - a_{12}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \qquad a_{33.2} = a_{33} - a_{13}\frac{a_{13}}{a_{11}} - a_{23.1}\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}}$$

$$a_{nn.n-1} = a_{nn} - a_{1n}\frac{a_{1n}}{a_{11}} - a_{2n.1}\frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} - \ldots\ldots\ldots - a_{n-1,n.n-2}\frac{a_{n-1,n.n-2}}{a_{n-1,n-1.n-2}}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Bu şekilde yapılan çözüme; *Modernleştirilmiş Gauss Algoritmasına göre çözüm* denmektedir. Bu çözümün genel çözümde söylenenlerden farkı; her satır indirgeme adımı sonucunda elde edilen üst üçgen matrisin her bir satırındaki elemanları, bu satıra ilişkin köşegen üzerindeki elemanlarının ters işaretlisine bölünmesi sonucunda, elde edilen köşegen elemanı -1 olan üst üçgen matrisin alt üçgen matrisin transpozesinin ters işaretlisine eşit olmasıdır. Sonuçta; buradan; Köşegen elemanları 1 olan alt üçgen matris,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ..... & 0 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & 0 & ..... & 0 \\ \dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dfrac{a_{23.1}}{a_{22.1}} & 1 & ..... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} & \dfrac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} & \dfrac{a_{3n.2}}{a_{33.2}} & ...... & 1 \end{bmatrix}$$

ve C bir üst üçgen matrise olacak şekilde,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...... & a_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & a_{23.1} & ...... & a_{2n.1} \\ 0 & 0 & a_{33.2} & ..... & a_{3n.2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ...... & a_{nn.n-1} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bilindiği gibi, bir kare-simetrik matrisin inversi yine aynı boyut ve özeliklere sahip kare simetrik bir matris olmaktadır. Bu durum, üçgen matrislerin elde edilmesi amacıyla; hesap algoritmasının yapıldığı tablodaki üst ve alt üçgen matrislerin her biriyle ilgili değerlerden, üçgen matrislerle $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ genel invers alma bağıntısına göre, bir matrisin inversinin hesaplamasında da faydalanılacak bilgiler kaynağı olmaktadır. Bu bilgiler yardımıyla; hesap algoritması tablosundaki değerlerden, invers matrisin köşegen ve köşegen dışındaki üst elemanlarının hesaplanması ile simetrik olma özelliği nedeniyle, köşegen dışı alt elemanları da hesaplanmış olmaktadır.

Neticede; bu invers matris;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & ..... & q_{1n} \\ q_{12} & q_{22} & ..... & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & ..... & q_{nn} \end{bmatrix}$$

yapısında dolu bir matris olarak elde edilecektir. Bu amaçla, yukarıda verilmiş olan modernleştirilmiş *Gauss* algoritmasında yapılan indirgeme işlemlerinin tersi yönünde yapılan işlemlerden; bu kare simetrik matrisin inversi, bir kare matrisi üçgen matrislere ayırarak invers matrisini hesaplamadaki genel kurallara uygun olarak,

$$q_{nn} = \frac{1}{a_{nn.n-1}}$$

$$q_{3n} = .. - ...... - \frac{a_{3n.2}}{a_{33.2}} q_{nn}$$

$$q_{2n} = \quad - \frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{3n} - \quad ..... \quad - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q_{nn}$$

$$q_{1n} = \quad - \frac{a_{12}}{a_{11}} q_{2n} \quad - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{3n} ..... \quad - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{nn}$$

$$\vdots$$

$$q_{33} = \frac{1}{a_{33.2}} - .... - \frac{a_{3n.2}}{a_{33.2}} q_{3n}$$

$$q_{23} = - \frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{33} - .... - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q3n$$

$$q_{13} = - \frac{a_{12}}{a_{11}} q_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{33} - ...... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{3n}$$

$$q_{22} = \frac{1}{a_{22.1}} - \frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{23} \text{ - } ..... \quad - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q_{2n}$$

$$q_{12} = - \frac{a_{12}}{a_{11}} q_{22} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{23} - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{2n}$$

$$q_{11} = \frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} q_{12} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{13} - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{1n}$$

her bir elemanı doğrudan hesaplanarak; A gibi kare simetrik bir matrisin A^{-1} inversine daha basit bir şekilde hesaplanmış olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

kare simetrik matrisinin inversi; *Gauss* yöntemine göre üçgen matrislere ayrılarak hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: Bu amaçla; A matrisi simetrik bir matris olduğu için, yukarda anlatılanlara benzer bir hesap algoritması düzenlenir. Bu tabloda; her bir satır ardı sıra indirgenerek önce üst üçgen matrisinin elemanları, sonra da indirgenmiş her satır köşegen terimlerine bölünerek ters işaretlilerinin alınması ile, alt üçgen matrisinin transpoze matrisinin ters işaretlisi elde edilir.

16 *-1*	**-4** *0.25*	**5** *-0.3125*
	8 *7* *-1*	**-2** *-0.75* *0.1071*
		12 *10.357*

Sonuçta;

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

matrisine ilişkin B alt üçgen matrisi;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.3125 & -0.1071 & 1 \end{bmatrix}$$

ve C üst üçgen matrisi de

$$C = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -0.75 \\ 0 & 0 & 10.357 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Yapılan işlemlerin doğruluğunu denetim için; *BC*=*A* olması özelliğinden,

$$BC = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.3125 & -0.1071 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -0.75 \\ 0 & 0 & 10.357 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan; genel kurala göre; B alt üçgen ve C üst üçgen matrisleri için hesaplanacak olan B^{-1} ve C^{-1} invers matrisleri,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0.2500 & 1 & 0 \\ -0.2857 & 0.1071 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0357 & -0.0276 \\ 0 & 0.1429 & 0.0103 \\ 0 & 0 & 0.0965 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bunların $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ şeklindeki çarpımından, A^{-1} matrisinin inversi *(tersi),*

$$A^{-1} = C^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0357 & -0.0276 \\ 0 & 0.1429 & 0.0103 \\ 0 & 0 & 0.0965 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0.2500 & 1 & 0 \\ -0.2857 & 0.1071 & 1 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0.079 & 0.033 & -0.028 \\ 0.033 & 0.144 & 0.010 \\ -0.028 & 0.010 & 0.097 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

olarak hesaplanır. Aynı inver matrisin elemanları daha kısa yol olan; *Gauss* algoritması tablosundaki değerlerden, doğrudan,

$$q_{33} = \frac{1}{10.357} = 0.097$$
$$q_{23} = (0.1071)(0.097) = 0.010$$
$$q_{13} = (0.25)(0.010) + (-0.3125)(0.097) = -0.028$$
$$q_{22} = \frac{1}{7} + (0.1071)(0.010) = 0.144$$
$$q_{12} = (0.25)(0.144) + (-0.3125)(0.010) = 0.033$$
$$q_{11} = \frac{1}{16} + (0.25)(0.033) + (-0.3125)(-0.028) = 0.079$$

olarak da hesaplanabilmektedir. Sonuçta; A kare-simetrik matrisinin inversi;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.079 & 0.033 & -0.028 \\ 0.033 & 0.144 & 0.010 \\ -0.028 & 0.010 & 0.097 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiş olur.

4.8 Bir Kare Simetrik Matrisin İnversini Cholesky Yöntemine Göre Üçgen Matrislere Ayrılarak Hesaplama

Cholesky yöntemine göre bir kare simetrik matrisin üçgen matrislere ayrılarak inversinin hesaplanmasında; *Gauss* yönteminde yapılan işlemlerin aynı yolu izlenir. Ancak, bu yöntemde; *Gauss* yöntemindeki bir kare matrisin $A=BC$ şeklindeki alt ve üst üçgen matrislere ayırmadaki işlemlere benzer şekilde; $B = C^T$ olacak şekilde bir $A = C^T C$ alt üçgen ve üst üçgen matrise ayırma söz konusu olmaktadır. Bu haliyle; *Cholesky* yöntemi, *Gauss* yöntemine göre kare simetrik matrislerin üçgen matrislere ayrılarak inversinin hesaplamasındaki özel bir uygulaması olmaktadır. A matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & ..... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare simetrik bir matris olmaktadır. A matrisinin, *Cholesky* yöntemine göre hesaplanacak üst üçgen matrisi de;

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ..... & c_{2n} \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}$$

ve alt üçgen matris de onun transpozesi olan,

$$C^T=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & ..... & 0 \\ c_{12} & c_{22} & ..... & 0 \\ : & : & & : \\ c_{1n} & c_{2n} & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu matrislerin elemanlarını hesaplamak için, $A=C^T C$ bağıntısına göre;

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & ..... & 0 \\ c_{12} & c_{22} & ..... & 0 \\ : & : & & : \\ c_{1n} & c_{2n} & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ..... & c_{2n} \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & ..... & c_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{1n} & a_{2n} & ..... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matris çarpımları yapılıp elde edilen çarpım sonuçların, A matrisindeki karşılığı olan eşlenik elemanlar eşitlenmesi neticesinde üçgen matrisin bütün c_{ij} elemanları hesaplanabilir. *Cholesky* yöntemine göre bir kare simetrik matrisin, üçgen matrislere ayrılmasında yapılacak bu tür işlemlerin çözümü sonucunda elde edilecek bilgilerin genelleştirilmesinden, üçgen matrislerin elemanlarının hesaplanması için,

$$c_{11}=\sqrt{a_{11}} \quad ; \quad c_{1j}=\frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}} \quad ; \quad j=2,3,4,.....,n$$

$$c_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}c_{ki}^2} \quad ; \quad i=2,3,4,......,n$$

$$c_{ij}=\frac{1}{c_{ii}}(a_{ij}-\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{i-1}}c_{ki}c_{kj}) \quad ; \; i=2,3,4,.....,n \quad ; \quad j=(i+1),(i+2),.....,n$$

genellemeleri kullanılabilir.

Böyle bir çözüm içinde, kare simetrik matrislerin Gauss yöntemine göre üçgen matrislere ayrılmasında yapılan işlemlere benzer şekilde; bir hesap algoritması tablosu düzenlenerek,

a_{11} $\sqrt{a_{11}}$	a_{12} $\dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$	a_{13} $\dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}$	....	a_{1n} $\dfrac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}}$
	a_{22} $a_{22.1}$ $\sqrt{a_{22.1}}$	a_{23} $a_{23.1}$ $\dfrac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}$	....	a_{2n} $a_{2n.1}$ $\dfrac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}$
		a_{33} $a_{33.2}$ $\sqrt{a_{33.2}}$	....	a_{3n} $a_{3n.2}$ $\dfrac{a_{3n.2}}{\sqrt{a_{33.2}}}$
			....	....
				a_{nn} $a_{nn.n-1}$ $\sqrt{a_{nn.n-1}}$

gibi tüm hesaplamalar bir arada daha pratik bir şekilde yapılabilir. Tabloda; matrisin bu şekilde yapılan satır indirgenmesi sonucunda elde edilen katsayıları;

$$a_{22.1} = a_{22} - \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 \quad ; \quad a_{33.2} = a_{33} - \left(\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 - \left(\frac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$a_{23.1} = a_{23} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} \qquad a_{3n.2} = a_{3n} - \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}\frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}} - \frac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}\frac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}$$

$$a_{2n.1} = a_{2n} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}} \quad ; \quad a_{nn.n-1} = a_{nn} - \left(\frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 - \left(\frac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}\right)^2 - .... - \left(\frac{a_{n-1,n.n-2}}{\sqrt{a_{n-1,n-1.n-2}}}\right)^2$$

olarak hesaplanmaktadır.

Bu şekilde yapılan çözüme; *Cholesky Algoritmasına göre çözüm* denmektedir. Bunun genel çözümde söylenenlerden farkı; her satır indirgeme adımı sonucunda elde edilen üst üçgen matrisin her bir satırındaki elemanları, bu satıra ilişkin köşegen üzerindeki elemanlarının kareköküne bölünmüş olmasıdır. Sonuçta, A kare simetrik matrisinin üst üçgen matrisi;

$$C=\begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \ldots\ldots & \dfrac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & \sqrt{a_{22.1}} & \dfrac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}} & \ldots\ldots & \dfrac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{33.2}} & \ldots\ldots & \dfrac{a_{3n.2}}{\sqrt{a_{33.2}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \sqrt{a_{nn.n-1}} \end{bmatrix}$$

ve alt üçgen matrisi de; bunun transpozesi olan,

$$C^T=\begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \sqrt{a_{22.1}} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \dfrac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}} & \sqrt{a_{33.2}} & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}} & \dfrac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}} & \dfrac{a_{3n.2}}{\sqrt{a_{33.2}}} & \ldots\ldots & \sqrt{a_{nn.n-1}} \end{bmatrix}$$

matrisleri olmaktadır.

Bu üçgen matrislerden faydalanarak; A kare simetrik matrisinin,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots\ldots & q_{1n} \\ q_{12} & q_{22} & \ldots\ldots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \ldots\ldots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki inversi; C üçgen matrsinin inversi hesaplandıktan sonra,

$$A^{-1}=(C^TC)^{-1}=C^{-1}(C^T)^{-1}=C^{-1}(C^{-1})^T$$

üçgen matrislere göre invers alma bağıntısından hesaplanabilir. Bunun yerine, uygulamada daha çok, aynı işlemleri kullanan ve aynı sonucu veren pratik ve daha basit bir yol olan; satır indirgemelerinin yapıldığı hesap algoritması tablosunda mevcut değerlerden faydalanarak inversin doğrudan tablo üzerinden hesaplanmasıdır. Bu amaçla, aşağıda verilmiş olan *Cholesky* algoritmasında yapılan satır indirgeme işlemlerinin sonucunda köşegen elemanı kare köklü olan satır; köşegen üzerindeki kare köklü elemanına bölünerek ters işaretlisi bu satırın altına; yeni bir satır olarak yazılır. Bu satır *Gauss* algoritmasında köşegen elemanı -1 olan satırın aynısı olur.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	......	a_{1n}
$\sqrt{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$	$\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}$	......	$\frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}}$
-1	$-\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}}$	....	$-\frac{a_{1n}}{a_{11}}$
	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
	$a_{22.1}$	$a_{23.1}$	....	$a_{2n.1}$
	$\sqrt{a_{22.1}}$	$\frac{a_{23.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}$	....	$\frac{a_{2n.1}}{\sqrt{a_{22.1}}}$
	-1	$-\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}}$	....	$-\frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}}$
		a_{33}	....	a_{3n}
		$a_{33.2}$	....	$a_{3n.2}$
		$\sqrt{a_{33.2}}$	....	$\frac{a_{3n.2}}{\sqrt{a_{33.2}}}$
		-1	....	$-\frac{a_{3n.2}}{a_{33.2}}$
			....	....
				a_{nn}
				$a_{nn.n-1}$
				$\sqrt{a_{nn.n-1}}$

Bu satırlarda kullanılarak *Gauss* algoritması tablosundan invers nasıl hesaplanıyor ise; benzer şekilde bu tablodan da satır indirgeme işlemlerinin tersi yönünde;

$$q_{nn} = \frac{1}{a_{nn.n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{a_{nn.n-1}})^2}$$

$$q_{3n} = ..-......-\frac{a_{3n.2}}{a_{33.2}} q_{nn}$$

$$q_{2n} = \quad -\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{3n} - \quad ..... \quad -\frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q_{nn}$$

$$q_{1n} = \quad -\frac{a_{12}}{a_{11}} q_{2n} \quad -\frac{a_{13}}{a_{11}} q_{3n} ..... \quad -\frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{nn}$$

$$\vdots$$

$$q_{33} = \frac{1}{a_{33.2}} - .... - \frac{a_{3n.2}}{a_{33.2}} q_{3n}$$

$$q_{23} = -\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{33} - .... - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q3n$$

$$q_{13} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} q_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{33} - ...... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{3n}$$

$$q_{22} = \frac{1}{a_{22.1}} - \frac{a_{23.1}}{a_{22.1}} q_{23} \text{ - ..... } - \frac{a_{2n.1}}{a_{22.1}} q_{2n}$$

$$q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} q_{22} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{23} - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{2n}$$

$$q_{11} = \frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} q_{12} - \frac{a_{13}}{a_{11}} q_{13} - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} q_{1n}$$

işlemleri yapılarak invers matrisin tüm elemanları, "*A^{-1} invers matrisinin kare simetrik bir matris olduğu da göz önünde bulundurularak"*, kolayca hesaplanabilir.

Burada, tekrar vurgulamak gerekir ki; *üçgen matrislerin hesaplanmasında, köşegen terimlerinin karekökleri alındığından, indirgeme işlemleri sırasında oluşacak yuvarlatma hatalarının hesap sonuçları üzerindeki etkileri; "ondalıklı sayıların kare kökleri kendisinden büyük, büyük değerli sayılarınki da küçük olacağından," belli oranda az olacaktır. Bu nedenle, determinantı sıfıra yakın küçük değerli matrislerin bu yöntemle inverslerinin hesaplanması; Gauss yöntemine oranla daha doğru sonuçlar vereceğinden önerilmektedir.*

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

kare simetrik matrisinin inversi; *Cholesky* yöntemine göre üçgen matrislere ayrılarak hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: *Gauss* yöntemiyle yapılan çözümde izlenen işlem yoluna benzer şekilde, önce bu matris *Cholesky* yöntemine göre;

16 *4*	**-4** *-1*	**5** *1.25*
	8 *7* *2.6458*	**-2** *-0.75* *-0.2835*
		12 *10.357* *3.2182*

olarak indirgenir. Sonuçta; üst üçgen matrisleri;

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1.25 \\ 0 & 2.6458 & -0.2835 \\ 0 & 0 & 3.2182 \end{bmatrix}$$

ve alt üçgen matrisine de; üst üçgen matrisin transpozesi alınarak,

$$C^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2.6438 & 0 \\ 1.25 & -0.2835 & 3.2182 \end{bmatrix}$$

hesaplanmış olur. $C^T C = A$ denetiminin yapılması ile;

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2.6438 & 0 \\ 1.25 & -0.2835 & 3.2182 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1.25 \\ 0 & 2.6458 & -0.2835 \\ 0 & 0 & 3.2182 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan; genel kurala göre; C^T alt üçgen ve C üst üçgen matrisleri için hesaplanacak olan $(C^T)^{-1}$ ve C^{-1} invers matrislerinin $A^{-1} = C^{-1}(C^T)^{-1}$ şeklindeki;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}$$

invers matrisinin elemanları *Cholesky* algoritması tablosundaki değerlerin,

16 *4*	**-4** *-1*	**5** *1.25*
-1	*0.25*	*- 0.3125*
	8 *7* *2.6458*	**-2** *-0.75* *-0.2835*
	-1	0.1072
		12 *10.357* *3.2182*

$$q_{33} = \frac{1}{10.357} = 0.097$$

$$q_{23} = (0.1071)(0.097) = 0.010$$

$$q_{13} = (0.25)(0.010) + (-0.3125)(0.097) = -0.028$$

$$q_{22} = \frac{1}{7} + (0.1071)(0.010) = 0.144$$

$$q_{12} = (0.25)(0.144) + (-0.3125)(0.010) = 0.033$$

$$q_{11} = \frac{1}{16} + (0.25)(0.033) + (-0.3125)(-0.028) = 0.079$$

olarak hesaplanarak, *Cholesky yöntemine* göre A kare simetrik matrisini inversi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0079 & 0.033 & 0.028 \\ 0.033 & 0.144 & 0.010 \\ 0.028 & 0.010 & 0.097 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiş olur.