JEODEZİ'DE SAYISAL ÇÖZÜMLEME YÖNTEMLERİ (Nümerik Analiz), KTÜ Harita Mühendisliği Bölümü, Prof. Dr. Aslan DİLAVER, 2010 , Trabzon.

1. GİRİŞ

Tanınmış tarihçi *LAFARA 1973* söylediğine göre; bugün bile ilk kullanım tarihi ve sınırları kesin olarak bilinmemekle birlikte, *Nümerik Analizin* çok eski yıllardan beri farklı şekillerde ve isimler altında kullanıldığı ilgili birçok kaynaklarda yer aldığı görülmektedir.

Bunun açık bir kanıtı olarak; bundan yaklaşık 3700 yıl önce, *Babilliler'in* ikinci dereceden bir denklemin köklerinin nasıl çözülerek bulunabileceğini, tam sayıların kareköklerinin yaklaşık olarak nasıl hesaplanabileceğini ve bileşik faizle ilgili bazı problemlerin lineer *enterpolasyon* yöntemiyle nasıl çözülebileceğini, bildiklerini ilgili kaynaklarda rastlamak mümkündür.

Yine bundan yaklaşık 2000 yıl önce "*günümüzde Gauss eliminasyon yöntemi*" olarak bilinen, lineer denklem sistemlerinin çözümüyle ilgi bir örnekte matris gösteriminin kullanılmış olduğu bazı *Çinli* kaynaklarda ayrıca ifade edilmektedir. Benzer şekilde, bazı *Çinli* matematikçilerin (960-1279) yılları arasında yüksek dereceli denklemlerin nümerik çözümü için, *iteratif* yaklaşma yöntemini genelleştirdiklerine de ilgili kaynaklarda rastlamak mümkündür.

Bunun sonucunda; önceleri lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmış olan matris gösterimi ile çözüm teknikleri, aynı zamanda yüksek dereceli denklemlerin çözümü için de genişletilmiş olmaktadır.

Konuyla ilgili bir diğer örnek; bundan yaklaşık 900 yıl önce yaşamış *Ö. Hayam* 'ın üçüncü dereceden denklemlerin çözümüyle ilgili birçok araştırmalar yaptığı ve keşfetmiş olduğu yeni çözüm yöntemi yayınlamış olduğu kendi eserinde yer almaktadır. Bunu takıp eden yıllarda, halen günümüzde *Horner* yöntemi olarak bilinen *(W.G. Horner; 1819 yılında, bu konudaki eski çalışmalardanhabersiz olarak kendi yöntemini yayınlamıştır.)* genel cebir denklemlerinin çözümü için kullanılan *Horner* yöntemini, daha önce, 1436 yılında ölen *Çemşid El-Kaşi*, kübik denklemeleri iteratif ve trigonometrik yöntemlerle çözümünde de kullandığını ilgili kaynaklarda ayrıca rastlamak mümkündür.

İskoçyalı *John Napier* 1614 yılında logaritma tablolarını düzenleyerek yayınlamış ve neticede böyle bir çalışma sonucunda birçok hesaplamalar için kullanılabilecek bir hesaplama aracı hizmete sunmuştur. Bugün *Newton* ya da diğer adıyla *Newton-Raphson* yöntemi olarak bilinen bir yöntemin; 1700 yılından önce sadece bir polinomun köklerine *iteratif yaklaşımlarla* bulmada kullanıldığını ve daha sonraları, 1740 yıllarında *Thomas Simpson* tarafından bu yöntem daha da genişletilerek genel fonksiyonlar içinde kullanılabilir olduğunun kanıtlandığı ilgili kaynaklarda yer almaktadır.

Nümerik analizde adından sıkça söz edilen *Taylor* serisi; *Brook Taylor* tarafından 1715 yılında kuramsal olarak ele alınarak incelenmiş ve sonuçları genel hatları ile yayınlanmıştır. Ancak, bu formülün kalan terimi hakkında ilk bilgi; daha sonraları, 1797 yılında *Joseph Louis Lagrange* tarafindan incelenerek verilmiştir.

Günümüzde; adi diferansiyel denklemlerin çözümüyle ilgili kullanılan ve bilinen adıyla *Runge-Kutta* yöntemi; bundan yaklaşık 100 yıl önce alman uygulamalı matematikçilerinden *Carl Runge* (1856-1927) ve *M. W. Kutta*(1867-1944) tarafindan geliştirildiği ilgili kaynaklardan görülmektedir. Bunlar gibi, burada özet olarak verilmiş olan birkaç örnek daha da genişletilerek, farklı literatürlerde yer aldığı şekliyle daha da zenginleştirilebilir.

Uygulamalı matematikte konuyla ilgili bu gibi gelişmelere paralel olarak, çoğu zaman sayısal çözümleme ile ayrılmaz bir bütün olan hesaplama araçlarında da benzer şekilde geçen süre içerisinde çeşitli gelişmelerden bahsetmek mümkündür.

Bu amaçla kullanılmış ilk ve en ilkel hesaplama aracı; üzerine düğümler atılmış bir telin olduğu ilgili kaynaklarda söylenmektedir. Daha sonraları aynı amaca yönelik geliştirilmiş bir diğer hesaplama aracı; *Çinliler* ve *Greekler* ‘in birbirlerinden habersiz keşfettikleri “*abakus*” dır. Abakusler bugün dahi birçok doğu bloku ülkelerinde çeşitli pratik amaçlı aritmetik işlemlerin yapılmasında bir hesaplama aracı olarak kullanılmaktadır. Ancak, *abakusle* yapılan hesaplamalarda eldekileri işlemlere katmak oldukça zor ve yetenek gerektirdiğinden bunları kullanmak sanıldığı kadar kolay olmamaktadır. Çoğu zaman, bir hesaplama aracı olarak kullanılabilmeleri için özel beceri gerektirmektedir.

Bu gibi zorluklarda kurtulmak için daha sonraki yıllarda abakus ‘lerin yerine, biraz daha pratik sayılabilen bir diğer mekanik hesaplama aracı olan sürgülü hesap cetvellerinin geliştirildiği görülmektedir. Bu amaca yönelik konu ile ilgili yapılmış ilk olumlu çalışmalar; 1620 yılında, İngiliz matematikçi, *Edmund Gunter,* daha önce 1614 yılında *John Napier* ‘in bulmuş olduğu logaritmaları bir doğru üzerinde işaretlemeyi başarmasıyla başlanmıştır. Sürgülü hesap cetvellerinin de atası sayılabilecek bu hesaplama aracı ile çarpma ve bölme işlemleri yapabilmek için de bir pergel geliştirilerek kullanılmıştır. Bundan bir yıl sonra, bir başka İngiliz matematikçi olan *William Oughtred,* 1621 yılında, *Gunter* ‘in geliştirdiği bu sistemi daha da ileri düzeylere taşıyarak; çizgilerinin her ikisini birbiri üzerinde kayabilecek bir şekilde geliştirerek, pergel kullanma ihtiyacını ortadan kaldırmıştır. Konuyla ilgili birçok çalışmalar sonucunda, 1654 yılında *Robert Bissaker,* sabit bir gövdenin iki kısmı arasında kayabilen bir sürgüden ve iki tarafi sabit bir gövdeden oluşan ilk sürgülü hesap cetvelini yapmıştır. 1850 yılında, *Tavernier-Gravet,* sürgülü hesap cetvellerinde gösterge camı kullanarak ” *Mannheim*” sürgülü hesap cetvelini icat etmiştir.

Hesaplama araçları ile ilgili farklı yıllarda yapılmış bu gibi olumlu gelişmelere ilaveten, daha ileri düzeyde aritmetik işlem yapabilen ilk mekanik hesap makinesi; ünlü Fransız düşünürü *Blaise Pascal* tarafindan 1642 yılında geliştirilmiştir. Önceleri sadece toplama işlemleri yapabilen bu tür hesap makineleri 1671 yılında *Gottfried Wilhelm Leibniz* tarafindan geliştirilerek çarpma işlemi de yapabilen mekanik hesaplayıcıları; yanı bugün *“FACİT”* ya da “kollu mekanik hesap makinesi” olarak da bilinen hesaplama aracını elde edilmiştir.

Bilindiği gibi, bu hesaplama araçları ile hesap yapmada işlemlerin sırası büyük önem taşımaktadır. Bu tür makinelerin mekanik sistemler olmaları, neticede bunlara böyle bir yeteneği vermeği olanaksızlaştırmaktadır. Ayrıca, bu makinelerde işlem sırası kullanıcılar tarafindan dışardan idare edilmektedir.

Sonuçta bu makinelerde böyle bir işlemin hesaplayıcıya yaptırılabilmesi için, 1801 yılında Fransız asıllı *Jacquard* ‘ın gerçekleştirdiği otomatik dokuma tezgahlarındaki sistemin, “*makineler; üzerinde belli aralıklarda delikler bulunan bir kartonun her bir deliğine sıra geldiğinde hangi renk ipliğin kullanacağına karar vermesi prensibi*” çok büyük fikir katkısı olmuştur. Tarihinde, dokumacılıkta devrim sayılabilecek bu buluştan sonra, İngiliz Matematikçi; *Charles Babbage* ‘nin 1821 yılında işlemlerin birbiri ardı sırada yapabilen bir analitik makine tasarladığı kaynaklarda mevcuttur. Bu gün dahi bilgisayarların ilk atası sayılabilecek bir yenilik olan bu düşünceyi, ne yazık ki uygulama olanağı bulamadığı ayrıca vurgulanmaktadır. *Babbage* ‘nin bugünkü bilgisayarlara düşünce ve kavram bakımından çok yakın sayılan bu son derece önemli fikirlerinden sonra bu yöndeki araştırmalar bir sure duraklamalar yaşayarak, 1890 yılında, *ABD* yapılan nüfus sayımı sonuçlarını daha hızlı alabilmek için *H. Hollerith* tarafindan geliştirilen makinenin yapılmasında, *Pascal, Jacquard* ve *Babbage* ‘nin buluşlarından çok büyük oranda faydalanılmıştır.

Böylece; delikli kart sisteminin bilgisayarlarda kullanılmasının ilk adımı da atılmıştır. Bu nedenle, bilgisayar teknolojisinde kullanılmış olan bu delikli kart sistemine *Hollerith* kartları veya kısaca delikli kart sistemi de denmektedir.

Daha sonraları, ilk bilgisayar, 1945 yılında *ABD* ‘de askeri amaçlar için yapılmıştır. *UNIVAC* adlı bu bilgisayar 30 ton ağırlığında dev bir sistemden oluşmaktadır. Önceleri sadece askeri amaçlı işler için geliştirilmiş olan bu makinelerden birkaçı *ABD* ve İngilterede sayılı üniversitelerde kullanılabildiyse de; sivil amaçlı kullanılmalarına ilk defa 1953 yılında geçilerek piyasalarda satılmalarına başlanmıştır. Aynı yıllarda, mıknatıslı şerit ve çekirdek bellekler geliştirilerek, hızlı yazıcılar yapılmaya başlanmıştır. 1958 yılında bilgisayarların yapımında *transistörlerin* kullanılması ile yeni bir devir daha açılmıştır.

Böylece ikinci kuşak sayılabilen bu dönemde, daha küçük boyutlu ve geniş kapasiteli bilgisayarların üretimi söz konusu olmuştur. 1965 yılında üçüncü kuşak sayılan daha karmaşık fakat çok daha yetenekli, transistörlerin yerine bütünleşik devrelerin kullandığı bilgisayarlar geliştirilmiştir. Her geçen gün bilgisayar teknolojisinde yeni gelişmeler birbirini takıp ederek, *Personel computer* diye tanınan *PC* ‘ler ve daha sonraları ilgili her türlü yeni gelişmeler gerçekleştirilerek günümüzdeki duruma ulaşılmıştır.

Burada yapılan bazı açıklamalardan görüldüğü gibi; tarihinin belirli dönemlerinde nümerik analiz konuları ile ilgili yapılan bir çok yeni gelişmeler, eskileri ile birlikte hiyerarşik bir düzen sırasında ele alınırsa; önceleri “*Approximate Computation*” veya “*Computational Mathematics*” gibi isimler altında kullanılmış olsalar bile, 1950 yıllardan sonra diğer isimler yanında *Numerical Analysis, (son zamanlarda ülkemizde bu isim yerine yaygın olarak Sayısal Çözümleme kullanılmaktadır),* adının da sıkça kullanıldığı görülmektedir. Aynı zamanda bu tarih, bilimde sıradan bir tarih olmayıp, açıklamalardan anlaşıldığı gibi, farklı bilimsel ve teknolojik gelişmelerin de birlikte hatırlanıldığı bir tarih olmaktadır.

Özetlemek gerekirse, bu gelişmelerden biri; *1947 yılında Los Angeles 'deki Kaliforniya üniversitesinin bünyesinde kurulmuş olan Institu of Numerical Analysis adlı enstitünün ilk defa bu tarihte kurulmuş olmasıdır. Bir diğeri de Bilgisayar teknolojisindeki önemli gelişmelerin bu tarihlere rastlamış olmasıdır. Bu durum, her birinin birbiriyle ne derece yakın ilişkide olduğunun bir kanıtı olmaktadır. Ayrıca, bu tarih; uygulamalı matematik konuları ile ilintili olarak matrisler konusunda olduğu gibi birçok diğer lineer cebir konularında da önemli gelişmelerin yapıldığı tarihler olmaktadır.*

Bu genel bilgilerin ışığı altında "*Sayısal Çözümleme*"; ilk bakışta sadece konusu itibariyle ele alındığında, sanki matematiğin veya uygulamalı matematiğin bir alt konusudur gibi düşünülebilir. Benzer şekilde; sadece kullanılan hesaplama araçları ve işlem algoritması yönünden ele alındığında ise; bilgisayarlarla olan yakın ilişkisinden dolayı bilişim veya bilgisayar mühendisliğinin bir alt konusu olduğu düşünülebilir.

Ancak, uygulamalı matematikte konu olarak; sadece bir problemin çözümü için gerekli olan matematik modelin kurulması yanı algoritma kurma işlemleri ile uğraşılmaktadır. Buna karşılık, bilgisayar mühendisliğinde ise; sadece modeli veya algoritması bilinen bir problemin bilgisayar yardımla çözümü için gerekli dillerin geliştirilmesi, donanımları, algoritmik çözüm süreçleri ve sayısal işlemler konu edilmektedir.

Sayısal çözümlemede hiçbir zaman amaç; sadece ne böyle bir modeli kurmak ne de sadece çözmektir. Sayısal çözümlemenin ana amacı; bir problemin çözümü için daha önceden bilinen bir modele göre, çeşitli hesaplama araçlarını bir vasıta olarak kullanıp en doğru ve etkin sonuçları bulmaktır. Bu durumuyla, sayısal çözümleme doğrudan ne uygulamalı matematiğin ne de bilgisayar mühendisliğinin bir alt disiplinidir. Her ikisiyle belli bir oranda ilintili olan ve kendine özgü amaç ve hesaplama özelliklerini içeren ortak bir disiplin olduğu söylenebilir.

Sayısal çözümlemenin, diğer adıyla *Nümerik Analiz'in* konusunun, uğraş alanının ve bilgisayarlarla olan yakın ilişkisinin daha anlaşılır olması için, konuyu basit birkaç örnekle açıklamak daha uygun olur.

Konuya bir örnek olarak; bir A şehrinden B şehrine doğru kara yolu ile giden bir aracın hızı belli zamanlarda ölçülerek, belli noktalar için,

$t_{(sn)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$v_{(m/sn)}$	*15.2*	*14.1*	*14.0*	*15.0*	*14.5*	*16.0*	*15.4*

olarak elde ediliyor. Bu şekilde analitik bağıntılar yerine gözlemlere dayalı deneysel veriler elde edilerek, bu aracın $t = 0,35$ saniyedeki hızı, ivmesinin ve başlangıç noktasından itibaren kat ettiği yolun ne kadar olduğunun hesaplanması istenebilir.

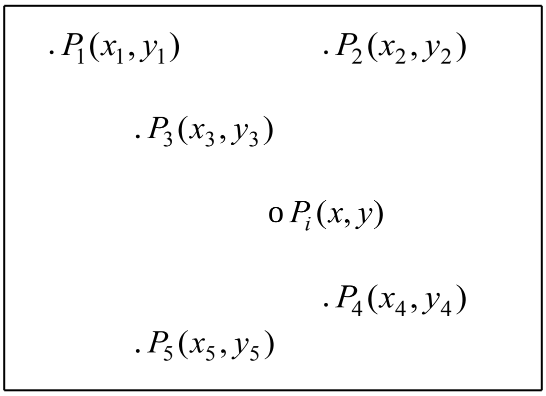
Şüphesiz, bu aracın, zamana bağlı olarak hızı bu şekilde değil de analitik bir fonksiyon olan $v = f(t)$ şeklinde sürekli türden bir bağıntı ile verilmiş olsaydı, sorunun cevabı bilinen matematik işlemlerle; $v = f(t)$ fonksiyonda $t = 0.35$ alınarak hızı, zamana göre türevi alarak ivmesi, başlangıç noktasından itibaren entegrali alınmakla da bu ana kadar kat ettiği yolun uzunluğunu bulmak mümkündür. Aksine, burada aracın hızı böyle analitik fonksiyon yerine, gözlemlere dayalı deneysel verilerle verilmiş olduğundan problemin çözümü bu yolla gerçekleştirilemez. Konu ancak, sayısal çözümlemenin bilinen basit enterpolasyon yöntemiyle cevaplandırılabilir.

Benzer şekilde aynı problemde, aracın belli noktalardaki hızı yanında ivmesi de verilmiş olsaydı; işlemler daha da karmaşık bir duruma dönüşecektir. Bu gibi durumlarda, hız değerleri ivme değerleri ile birlikte ele alınarak çözüm ancak *Hermite* yaklaşımlar şeklinde sonuçlandırılabilir.

Bir ikinci örnek; Arazide koordinatları bilinen bir noktanın yüksekliği, çevrede yükseklikleri ve koordinat değerleri bilinen noktalara göre belirlenmek isteniyor. Bu amaçla, noktaların H_i yükseklikleri ve $P_i(x,y)$ düzlem koordinat değerleri;

$H_i(m.)$	**103.6**	**105.6**	**107.0**	**104.5**	**106.9**
$P_i(x,y)$	$P_1(x_1,y_1)$	$P_2(x_2,y_2)$	$P_3(x_3,y_3)$	$P_4(x_4,y_4)$	$P_5(x_5,y_5)$

olarak verilmektedir.



Burada, eğer nokta yüksekliklerinin koordinat değerlerine göre yüzey denklemi analitik fonksiyon halinde bilinmiş olsaydı, bu denklemde $P_i(x,y)$ noktasının x , y koordinat değerlerini yerine yazmakla noktanın yüksekliği doğrudan bulunabilir.

Sonuçta, böyle bir denklem önceden bilinemediğinden, noktalara ilişkin sayısal koordinat ve yükseklik değerlerinden faydalanarak noktanın yüksekliği ancak sayısal yöntemlerle hesaplanabilir.

Benzer şekilde bir diğer örnek; fizikte mağnetik alan problemini formülüze eden iki boyutlu *Poisson* denklemi;

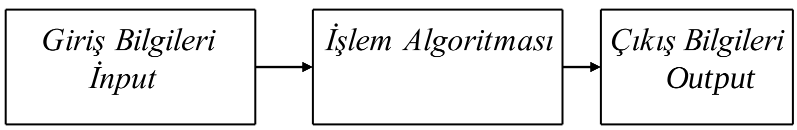
$$\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial A}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial A}{\partial y})=J$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemdeki;
A : *vektörel potansiyeli,*
J : *Akım yoğunluğunu,*
v : *çözüm yapılacak ortamın mağnetik direncini* göstermektedir.

Burada verilmiş olan *Poisson* denkleminde v değeri A değerinin doğrusal olmayan bir *non-lineer* bir fonksiyonudur. Bu denklem fizikçiler tarafindan uzun yıllar bilinmesine rağmen bazı özel durumlar dışında, çözümü gerçekleştirilememekteydi. Bugün ise yaygın bir şekilde uygulanan sayısal çözümleme yöntemleri ile bu denklem fazla sayıda doğrusal denklemlere dönüştürülerek, geniş kapasiteli bilgisayarların da kullanılması ile çözümü artık sorun olmaktan çıkmış, kolayca gerçekleştirilebilir hale gelmiştir. Örneğin, bu denklem sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmek istendiğinde; 100 ile 150 adet doğrusal eşitlik kurulması gerekmektedir. Bu gibi fazla sayıda doğrusal denklemden oluşan bir denklem sistemini elle çözmek önceleri oldukça zor bir işlem olması nedeniyle, günümüzde gerek matrislerin alt matrislere bölünmesi ve gerekse geniş kapasiteli bilgisayarların kullanılması ile artık sorun olmaktan çıkmıştır.

Benzer duruma, bir ülke ya da kıta büyüklüğündeki arazi parçalarını ölçmek için araziye birkaç kilometre aralıklarla işaretlenen sabit noktaların koordinatlarını tek bir koordinat sisteminde belirlemek için; her noktada yapılan gözlemlerden noktaların kesin koordinat değerlerini; En küçük kareler çözümüne göre hesaplamakta da rastlamak mümkündür. Bu durumda, gözlem sayısı kadar düzeltme denklemleri kurulmakta ve düzeltmelerin ağırlıklı karelerinin toplamını minimum kılan amaç fonksiyonuna göre de bilinmeyen sayısı kadar normal denklemler elde edilmektedir. Bu denklemlerin, katsayılar matrisinin boyutları çok büyük olacağından bunları her hangi bir şekilde çözmenin çok zor olabileceği gibi, bazı durumlarda *kondisyon* bozukluklarına da rastlanmaktadır. Bu gibi sorunlardan kurtulmak için; daha etkin çözüm yöntemleri kullanılarak, uygun kapasiteli bilgisayarlar yardımıyla ancak anlamlı sonuçlara ulaşmak mümkün olmaktadır. Böylece; hızlı ve geniş kapasiteli hesaplama aracı olan bilgisayarların ilk gelişme ve kullanma tarihi olan 1950 yıllar; aynı zamanda sayısal çözümlemenin veya matris matematiği gibi lineer cebir konularının da büyük gelişme ve önem kazandığı yıllar olmaktadır. Neticede, yapılan açıklamalardan, bu tekniklerin birbiriyle ne kadar yakın ilişkili ve iç içe oldukları, her durumda birbirlerini tamamlar konular oldukları bir kez daha, verilmiş olan örneklerden açıkça görülmektedir.

Matematikte bir problemin arzulanan çözümü; gerek bilgisayar, gerekse farklı hesaplama araçları kullanılarak çözüm için gerekli olan sonlu sayıdaki tüm ara işlemleri, belli bir sırada sürekli yapılarak elde edilmektedir. Çözüm için, bu şekilde düzenli olarak yapılması öngörülen tüm işlem adımları hesaplama yönteminin matematik algoritması olarak adlandırılır ve başlıca; *İnput, İşlem* ve *Output* yada bir diğer ifade ile giriş, işlem ve sonuç bilgilerini içeren üç ayrı ünite halinde ele alınabilir(şekil.1)



Şekil.1: *Sayısal çözümlemede işlem akışı*

Bir probleme ilişkin matematik modelin çözümü için kullanılabilecek çeşitli algoritmalarından hangisinin daha elverişli olduğu yargısına, algoritmanın hızı, etkin ve doğru sonuçlar vermesi gibi özelliklerinden faydalanarak verilir. Zamanı en ekonomik kullanarak en kısa sürede sonuca ulaşmaya yarayan yöntem hız bakımından ekonomik olmakta ve daima tercih edilmektedir. Buna karşılık, sonuçların doğruluğu hafizaları en fazla yoran ve sürekli emek gerektiren bir konu olarak her zaman önemini korumaktadır.

Bir çözümde duyarlık kaybına neden olabilecek faktörlerin kaynağını teşkil eden *input* veri hataları veya algoritma hataları denetim altında tutulduğu sürece elde edilecek *output* ya da sonuç bilgileri istenen duyarlıkta ve güvenirlikte değerler olmaktadır. Özetle, bir çözüm algoritması için bu durum,

Şekil. 2 : *Sayısal çözümlemedeki hatalar*

olarak ifade edilebilir(şekil. 2).

Sayısal çözümlemede, çeşitli problemleri çözmek için genellikle analitik fonksiyonlardan elde edilmiş kesin veriler yerine, gözlemlere dayalı deneysel veriler kullanıldığında her zaman *input* ya da giriş bilgilerindeki hataların sonuçlar üzerindeki etkilerinden söz etmek mümkün olur. Verilerdeki bu hatalar sonuç bilgilerine, çözüm için kullanılan algoritmanın fonksiyonel özelliklerine bağlı olarak etki ederek sonuçları olumsuz yönde etkilerler.

Çözüm için input verisi olarak kullanılacak veriler hatasız olsalar bile, her problemle ilgili çözüm işlemleri; çözüm algoritmasına uygun belli işlem sırasında, bilgisayarlar gibi çeşitli hesaplama araçları kullanılarak yapılmaktadır. Günümüzde, bütün hesaplama araçları her ne kadar geniş kapasiteli olsalar bile, onunda bir sınırı olması nedeniyle, belli bir doğrulukta işlem yapma kapasitesine sahiptirler. Bu hesaplama araçları işlemleri yaparken kapasite sınırını aşan terimleri ya dikkate almadan ya da sayıları yuvarlatarak işlemlere devam eder. Neticede elde edilecek sonuç bilgileri belli bir oranda hatalı olarak, gerçek değerden farklı bir değer olarak elde edilecektir. Sayısal çözümlemede bu özellikteki hatalar yuvarlatma hataları*(Roundoff error)* ve kesme hataları*(Truncation* error) olarak adlandırılmaktadırlar.

Sonuçta; sayısal çözümleme problemlerinin çözümü sırasında oluşan bu tür hatalar; yuvarlatma hataları*(Roundoff error)*, kesme hataları*(Truncation error)* ve veri hataları, çözüm sonucunda elde edilen değerlerin gerçek veya gerçeğe en yakın doğru kabul edilebilecek değerler olması yönünden büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla, hesaplamalarda yapılabilecek bu tür hataların sonuçlar üzerindeki olumsuz etkileri veya sonuçların doğruluğu; bir diğer ifade ile hesaplanan sonuç bilgilerinin gerçek değerleri ne derece ifade edebildikleri bazı hata ölçütleri tanımlanarak ya da kullanılarak denetlenebilir. Sayısal çözülmede bu durum her türlü problem çözümleri için bilinmesi gereken bir diğer konu olmaktadır.

Konuyla ilgili bu gibi kısa açıklamalardan sonra; sayısal çözümlemenin amacı, karmaşık nümerik analiz problemlerinin çok daha basit sayısal işlemleri kullanarak çözmek ve eldeki sonlu sayıdaki verilerden istenen nümerik sonuçlara ulaşmak için etkin yöntemleri seçerek, sonuçlarını değerlendirmektir diye ifade edilebilir.

Böyle bir amaca uygun olarak da sayısal çözümlemeyi veya diğer adıyla nümerik analizi; *"matematiksel modellerle ifade edilmiş olan çeşitli disiplinlere ilişkin problemlerin çözümünde belli sayıda ve sırada belirlenmiş işlemleri bilgisayarlar yardımıyla yaparak belli bir duyarlığa sahip sonuçların elde etmesi için kullanılabilecek yöntemlerin bulunması, geliştirilmesi, var olanların irdelenmesi ve en etkin olanların tespit edilmesi"* diye tanımlamak mümkün olur.

Sonuç olarak; yukarıda sözü edildiği gibi sayısal çözümlemenin, fizik, kimya, biyoloji, işletme, ekonomi ve daha birçok mühendislik dalları gibi bazı uygulamalı matematiğe dayalı disiplinlerde kullanılması, her geçen gün önemini daha da artırmaktadır. Deneysel bilgilere ve uygulamalı bilim dallarına dayalı olan mühendislik disiplinleri, her zaman doğada var olan olaylarla uğraştıklarından sayısal olarak ifade edilebilen gerçek, nesnel değerleri konu alırlar. Sanal konularla uğraşmazlar. Halbuki, nümerik analizin genel konuları içerisinde sanal çözümlere de yer verilmektedir.

Uygulamalı mühendislik disiplinleri ile ilgili konular bu haliyle ele alındığında, burada daha çok teknik yönünden uygulanabilir ve çözüm sonuçları gerçel ya da diğer adıyla reel sayılar olan sayısal yöntemlerin çözümleri üzerinde durulmaktadır. Yeri geldikçe bazı problemler için az da olsa sanal çözümlerden söz edilmektedir. Bu nedenle burada konu; daha çok reel problemlerle ilgili ve mühendislik disiplinleri yönünden önemli olan çözüm yöntemleri üzerinde yoğunlaştırılmıştır.

- - - - - - - - -
- - - -- -

3. SAYISAL ÇÖZÜMLEMEDE HATALAR VE HATA ÖLÇÜTLERİ

Sayısal çözümlemede, hatalar bir girdi bilgileri de dahil algoritmanın çözümünde uygulanan her işlem adımında farklı şekillerde oluşurlar. Bunlar, bir algoritma içinde,

Input(Girdi) Ünitesinde oluşan hatalar	→	İşlem Ünitesinde oluşan hatalar	→	Output Ünitesinde Hataların Toplam Etkisi

şeklinde ele alınabilirler.

Sayısal çözümlemede *input* veri hataları kadar bilgi işleme ünitesinde oluşan diğer hatalarla da uğraşılmaktadır. Bu nedenle, nümerik analizde hatalar; input veri hataları ve algoritmalarda yapılan işlem hataları diye iki kısımda ele alınabilirler. Output yani çıktı ünitesinde elde edilmiş hatalar ise; girdi ve bilgi işleme ünitelerinde oluşan hataların bir işlenen algoritmaya göre sonuç değerleri üzerindeki toplam etkileri olmaktadır. Bu durum, hataların yayılması olarak adlandırılır.

Sayısal çözümlemede *input* veri hatalarına iki şekilde rastlanmaktadır. Bunlardan biri; bir işlem algoritmasında *input* bilgilerinin denemeler sonucunda elde edilmiş örnekleme yada gözlem değerleri olması durumunda oluşan hatalar, bir diğerinin de; bir işlem algoritmasında *input* verilerinin kesme ve yuvarlatma hatalarını içeren yuvarlatılmış sayılardan olması durumunda karşılaşılan hatalar olması halıdır. Bu hatalardan her biri, özellikleri gereği farklı şekillerde ele alınarak incelenebilirler.

3.1 INPUT VERİ VEYA ÖLÇÜ HATALARI

Sayısal çözümlemede *input* veri hatalarına ilgili ölçü hataları, sayısal işlem algoritmalarında deneysel gözlem değerlerinin*(ölçülerin)* veri olarak kullanıldığı durumlarda rastlanılmaktadır. Bu hatalar, daha çok ortamdan, aletten ve kişilerden kaynaklanırlar. Bunlardan her biri bir deneysel sonucu, veya veriyi farklı karakterde etkilerler. Özellikleri gereği, farklı şekillerde ele alınabilirler. Bunlar,

1) *Kaba hatalar,*
2) *Sistematik hatalar,*
3) *Düzensiz hatalar*

olarak başlıca üç gruba ayrılabilirler. Bunlardan sistematik hatalar, karakterleri gereği, kendi aralarında da;

2-a) Sabit sistematik hatalar,
2-b) Tek taraflı sistematik hatalar,
2-b) Çift taraflı sistematik hatalar

şeklinde üç gruba ayrılabilirler.

Kaba hatalar, deneysel verilerdeki büyük yanılmaları temsil etmektedir. Bunlar daha çok deneyi yapan kişiden veya aletlerdeki kalibrasyon bozukluklarından kaynaklanırlar. Kalibrasyonu tam bir aletin kullanılması halinde, bu hatalar; deney sayısını artırmakla ve verilerin karşılaştırılmaları neticesinde fark olunabilirler.

İkinci tür hatalar sistematik karakterlidir, bunlar daha çok, deneyde kullanılan aletlerden ve ortam koşullarından kaynaklanırlar. Sabit karakterli olanları, genellikle aletlerden kaynaklanmaktadır. Aletlerin uygun şekilde kullanılmaları ile, bir diğer deyişle, uygun deney yöntemleri kullanılarak giderilebilirler. Tek taraflı olan sistematik karakterli hatalar ise; değerce farklı ancak işaretçe sabit yönde sonuçları etkilerler. Genelde, kişi yada ortamdan kaynaklanırlar. Bunlar, hiçbir zaman tam giderilemezler, deney sayısını ve şeklini artırarak azaltabilirler. Çift taraflı sistematik hatalar, genelde ortamdan kaynaklanırlar. İşaretçe ve miktarca farklı olurlar. Hataya neden olan parametrenin bulunup etkileri hesaplandıktan sonra verilerden özel hesaplamalar yoluyla giderilebilirler.

Üçüncü tür hatalar, düzensiz hatalar olmaktadır. Bunlar, bunların nedenleri hiçbir zaman bilinemez. Tekrar sayısını artırmakla verilerden giderilemezler. İşaret ve değerce değişkendirler. Her zaman deneysel verilerde bulundukları düşünülür. Değerce oldukça küçük hatalardırlar. Bunlar hakkında sadece iki özellik bilinmektedir. Bir deneyde, tekrar sayısı sonsuz gidince; işaretçe simetrik olurlar ve küçük miktarlı olanlarının sayısı büyük miktarlı olanlarından daima fazladır. Bu haliyle, istatistik normal dağılıma uyduklarından ancak matematik istatistik kurallara göre hata teorisi konuları içerisinde incelenebilirler. Sayısal çözümleme konuları içerisinde ele alınmazlar.

3.2 İŞLEM HATALARI

Genellikle daha önce sözü edilen veri hatalarına, sadece, gözlemlere dayalı deneysel işlemlerde ilk verilerdeki ölçü hataları olarak rastlanırken, algoritmik işlemlerde verilerle ilgili başka tür hatalara da rastlamak mümkündür. Bu hatalar, genellikle, sayılardaki veya algoritmalardaki yuvarlatma hatalarından *(Roundoff Error)* veya kesme *Truncation Error)* hatalarından kaynaklanırlar. Bunlar sayısal çözümlemenin konuları içinde ele alınan ve en sık karşılaşılan hata türlerini oluşturmaktadır. Belli bir algoritmanın çözümü neticesinde elde edilen verileri doğrudan etkilerler. Hatta çoğu zaman sonuçların yanlış olmalarına bile sebep olabilirler. Bu nedenle, bu tür hatalar sayısal çözümlemede, input veri hatalarına oranla, üzerinde en çok durulması gereken konulardan biri olmaktadır. Bir problemin çözümünde bu tür hatalar denetim altında tutulduğu sürece, ancak, etkin sonuçlar elde edilmektedir.

3.2.1 Kesme Hatası

Bilgisayarlarda işlemler yapılırken bazı kapalı fonksiyonlarla ifade edilen fonksiyonların*(Trigonometrik, Üssel fonksiyonlar ... gibi)* sayısal değerlerine ihtiyaç duyulur. Bilgisayarlar da bu gibi fonksiyonların değerlerini kullanırken, bunların seri açılımından elde edilen; *n* adet teriminden belli sayıdaki terimlerinden hesaplanmış değerleri kullanılır.
Örnek 1: *Sin x* fonksiyonunun belli bir *x* değerine karşılık gelen değerini hesaplayabilmek için bu fonksiyon *Taylor serisine* açılır ve açılım neticesinde,

$$Sin\ x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$$

seri ifadesi elde edilir. İlgili hesaplamalarda *Sinx* kapalı fonksiyonu yerine bu ifadenin seriye açılmış ifadesinin, $Sinx = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$ şeklindeki 7. dereceden terimine kadar olan terimler dikkate alınarak elde dilen seri kullanılarak, değeri hesaplandığında; arda kalan daha yüksek dereceden terimler dikkate alınmadığından,

$$Kesme\ hatası = Sin\ x - (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!)$$

kadar bir kesme hatası oluşmaktadır.

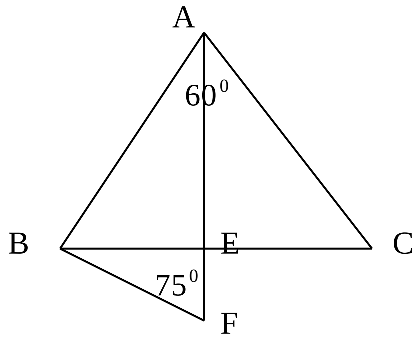
Bu şekilde; kapalı fonksiyonların belli bir değere karşılık gelen fonksiyon değerlerini, seriye açılmış ifadelerinde belli dereceden terimine kadar olan terimlerini dikkate alarak, göz ardı edilen daha yüksek dereceden diğer terimlerinin dikkate alınmamış olmasının, fonksiyonun değeri üzerindeki olumsuz etkisi *kesme hatası* olarak adlandırılır. Değeri, göz ardı edilen terimlerin değerlerinin toplamı kadar bir değer olmaktadır.

Örnek 2: $\alpha = 75^0$ derecelik bir açının $\tan\alpha$ trigonometrik fonksiyon değerini

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

şeklindeki bir seri açılımı yardımıyla hesaplandığında yapılacak kesme hatası miktarı ne keder olur? hesaplayınız

Çözüm 2: Bu problemde yapılabilecek kesme hatasını hesaplayabilmek için önce $\alpha = 75^0$ açının $\tan\alpha$ değerinin kesin olarak bilinmesi gerekir. Böyle bir durum aşağıdaki gibi çözülebilir.



Bir *ABC* eşkenar üçgeninde tüm iç açılar birbirine eşit ve 60^0 derecedir. Her köşe noktasındaki yükseklikleri aynı zamanda hem kenar, hem de açı ortayıdır. Bu özelliklerden faydalanarak, *A* noktasındaki *AE* yüksekliğini veya kenar ortayını aynı doğrultuda uzatarak *AB=AF* olacak şekilde bu kenar ortayı üzerinde bir *F* noktası alınarak *E* noktasındaki açısı dik 90^0 açı olan bir BFE dik üçgeni oluşturulur. *BFE* dik üçgeninin *F* noktasındaki açısı, *ABF* bir ikizkenar üçgen olacağından $\alpha = 75^0$ kadardır. *BE* ve *EF* dik kenar uzunlukları da; *ABC* eşkenar üçgeninin kenar uzunlukları a ise, $BE = a/2$ ve $EF = a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ olur.

BFE dik üçgeninde, *F* noktasındaki $\alpha = 75^0$ açısının $\tan\alpha$ yazılırsa; bunun kesin değeri,

$$\tan\alpha = \frac{BE}{EF} = \frac{a/2}{a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 3.732050807..$$

olarak hesaplanır.

Aynı açının yine $\tan\alpha$ değeri $\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ formülünden $\alpha = 75^0$ derece değeri $\widehat{\alpha} = 75^0 / \rho^0$ ve $\rho^0 = 180^0 / \pi = 57.2\quad 9\quad 5$ alınarak $\widehat{\alpha} = 75^0 / \rho^0 = 1.308996939$ radyan birimine dönüştürülerek hesapladığında,

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} = 2.05664057...$$

değeri elde edilir.

Bu şekilde, farklı iki yoldan hesaplanan $\tan\alpha$ değerlerinin farkından, yapılacak kesme hatasının değeri,

$$\text{Kesme hatası} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} - -(\alpha + \frac{\alpha^3}{3}....) =$$
$$= 3.732050807..-2.05664057\ldots=$$
$$= 1.675410237..$$

olarak hesaplanır.

3.2.2 Yuvarlatma Hatası

Çeşitli hesaplamalar sırasında, hesaplama işlemlerinin sonuçları istenilen sayıdaki rakamdan daha fazla olurlar. Böyle sayılardan istenilen basamaktaki yada sayıdaki rakamdan oluşan bir değeri almak için son haneleri yuvarlatılır. Bu yuvarlatma işlemi, istenen basmağın sağındaki rakamın 5 ile karşılaştırılması ile yapılır.

İstenen son rakam 5 den küçükse dikkate alınmaz, büyükse bir artırılır, eşitse birlik olsun diye çift sayı olmasına dikkat edilir. Bu durumlar bir örnekle açıklanmak istenirse;

Verilen sayı	**Yuvarlatılan Sayı**		**Karşılaştırma**				**Hatası**
54.763	54.76	3	küçüktür	5		atılır	- 0.003
54.766	54.77	6	büyüktür	5	1	ilave edilir	+0.004
54.765	54.76	5	eşittir	5		atılır	+0.005
54.7652	54.77	52	büyüktür	50	1	ilave edilir	+0.0048
54.7649	54.76	49	küçüktür	50		atılır	- 0.0049

şeklinde yuvarlatmalar yapılarak sayıları elde edilir. Benzer durum; aynı basamaklı iki sayını çarpma işlemi sonucunda hesaplanan sayının üç basamaklı olarak yuvarlatılması için düşünüldüğünde;

$$\begin{array}{rl}
 & 0.236 * 10^1 \\
 & 0.127 * 10^1 \\
x & \overline{} \\
 & 1652 \\
 & 472 \\
 & 236 \\
+ & \overline{} \\
 & 0.0299 \mid 72 * 10^2 \\
 & \mathbf{0} \mid \mathbf{5}\ \textbf{\textit{yuvarlatma sınırı}} \\
 & 0.300 \mid * 10^1\ \textbf{cevap}
\end{array}$$

olarak verilebilir.

Burada $|Yu\,\mathrm{var}\,latmahatası| = 0.28*10^{-2}$ kadar olmaktadır. Yuvarlatma hatası ile benzer düşünce; toplama ve çıkarma işlemlerinden elde edilen sonuçlar için de gösterilmek istenirse;

Toplama İşlemi

$$\begin{array}{r} 0.742*10^{2} \\ 0.927*10^{2} \\ \hline 1.669*10^{2} \\ 5\ \textit{Yuvarlatma sınırı} \\ \hline 0.167*10^{3} \end{array}$$

Çıkarma İşlemi

$$\begin{array}{r} 0.314*10^{1} \\ -0.313*10^{1} \\ \hline 0.001*10^{1} = 0.100*10^{-1} \end{array}$$

şeklinde açıklamaları yapılabilir.

Günümüzde, bu gibi el veya mekanik hesap makineleri ile yapılan hesaplamalar yerine daha çok gelişmiş teknolojinin ürünü olan bilgisayarlar kullanılmaktadır.