KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ KESİRLERİN YİNELENME BAĞINTILARI İLE ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ AĞAÇLARIN ÖZEL KÖŞELERİ

DOKTORA TEZİ

Ümmügülsün AKBABA

KASIM 2022
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ KESİRLERİN YİNELENME BAĞINTILARI İLE ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ AĞAÇLARIN ÖZEL KÖŞELERİ

Ümmügülsün AKBABA
ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR(MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 / 10 /2022
Tezin Savunma Tarihi : 11 / 11 /2022

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER
ORCID : - - -

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeği, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Doç. Dr. Ali Hikmet Değer'e saygı ve şükranlarımı sunarım. Aynı zamanda yetişmemdeki maddi ve manevi katkılarından dolayı sayın Prof. Dr. Mehmet Akbaş'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. İlminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim her zaman desteğini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Zameddin İsmailov'a saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma yüksek lisans ve doktora öğrenimim sürecinde gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkür ederim.

Çalışanı olduğum "Karadeniz Teknik Üniversitesi BAP projesi; Sürekli Kesirlerin Yinelenme Bağıntıları ile Alt Yörüngesel Graflardaki Ağaçların Özel Köşeleri" adlı (Proje No: FDK-2018-7686) proje ile destek veren KTÜ BAP birimine ve doktora eğitimim boyunca maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime, ayrıca ailemden bildiğim dostlarıma çok teşekkür ederim.

Ümmügülsün AKBABA

Trabzon 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Sürekli Kesirlerin Yinelenme Bağıntıları ile Alt Yörüngesel Graflardaki Ağaçların Özel Köşeleri" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Ali Hikmet Değer'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 11/11/2022

Ümmügülsün AKBABA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III

TEZ ETİK BEYANNAMESİ IV

İÇİNDEKİLER V

ÖZET VII

SUMMARY VIII

ŞEKİLLER DİZİNİ IX

TABLOLAR DİZİNİ X

SEMBOLLER DİZİNİ XI

1. GENEL BİLGİLER 1

1.1. Giriş 1

1.2. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri 5

1.3. Fibonacci Matrisleri 8

1.4. Pell, Pell-Lucas Sayı Dizileri 10

1.5. Pell Matrisleri 12

1.6. Üreteç Fonksiyonlar 13

1.7. Sürekli Kesirler 15

1.8. Yinelenme Bağıntılarının Çözümü 20

1.9. **Γ** Modüler Grubu 21

1.10. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları 27

1.11. Farey, $\mathbf{F}_{u,N}$ ve $\mathbf{G}_{u,N}$ Grafları 30

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 37
2.1. Minimal Uzunluklu Yollar 37
2.2. Fibonacci Sayıları ve Alt yörüngesel Graflar Arasındaki İlişki 43
2.3. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Matris Uygulamaları 46
2.4. Pell Sayıları ve Alt Yörüngesel Graflar Arasındaki İlişki 52
2.5. Pell ve Pell-Lucas Sayı Dizilerinin Matris Uygulamaları 55
2.6. Üreteç Fonksiyonlar 60
2.7. En Kısa Yoldaki Köşelerin Bulunmasının Uygulaması 64
3. SONUÇLAR 68
4. ÖNERİLER 70
5. KAYNAKLAR 71
ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

SÜREKLİ KESİRLERİN YİNELENME BAĞINTILARI İLE ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARDAKİ AĞAÇLARIN ÖZEL KÖŞELERİ

Ümmügülsün AKBABA
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2022, 73 Sayfa

Bu tez çalışmasında esas amaç $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yol (ağaçlar) kavramından yola çıkarak, bu yoldaki köşeleri, sürekli kesir yapıları ile ilişkilendirerek incelemektir.

Tez çalışması iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda çalışmada kullanılacak ön bilgiler, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas sayı dizileri, üreteç fonksiyonlar, sürekli kesirler, yinelenme bağıntıları, Γ modüler grubu, Farey, $\mathbf{F}_{u,N}$, $\mathbf{G}_{u,N}$ grafları başlıkları altında verilmiştir. İkinci kısımda $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2$ ve $1 < k_i \leq N$ kongrüans denklemindeki k_i değerleri ile, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki köşeleri veren dönüşüm elde edildikten sonra, burada ortaya çıkan sürekli kesir yapısı ele alınmıştır. Daha sonra bu sürekli kesir yapısının yinelenme bağıntıları yardımıyla, k_i özel değerleri için köşeler, literatürdeki Fibonacci ve Pell tam sayı dizileri ile ilişkilendirilmiştir. Buradan, bu tam sayı dizilerinin matris bağıntıları elde edilmiştir. Daha sonra bu sürekli kesir yapısından elde edilen başka bir yinelenme bağıntısı yardımıyla üreteç fonksiyonlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alt yörüngesel graflar, Sürekli kesirler, Minimal uzunluklar, Fibonacci sayı dizisi, Lucas sayı dizisi, Pell sayı dizisi, Pell-Lucas sayı dizisi, Üreteç fonksiyonlar.

PhD Thesis

SUMMARY

SPECIAL VERTICES OF TREES ON SUBORBITAL GRAPHS WITH RECURRENCE RELATIONS OF CONTINUED FRACTIONS

Ümmügülsün AKBABA
Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Hikmet DEĞER
2022, 73 Pages

The main purpose of this thesis; from the notion of minimal length path (trees) of suborbital graph $\mathbf{F}_{u,N}$, is to examine the vertices in this path by associating them with continued fraction structures.

The thesis consists of two parts. In the first part, the preliminary information to be used in the study is under the headings of Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas number sequences, generating functions, continued fractions, recurrence relations, Γ modular group, Farey, $\mathbf{F}_{u,N}$, $\mathbf{G}_{u,N}$ graphs are given. In the second part, after obtaining the transformation that gives the vertices on the minimal-length path in the $\mathbf{F}_{u,N}$ suborbital graph with the k_i values on $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2 \ , 1 < k_i \leq N$ congruence equation, the continuous fraction structure that emerges here is discussed. Then, the vertices are associated with the Fibonacci and Pell integer sequences in the literature for special k_i values of that continuous fraction structure with the help of recurrence relations. From here, the matrix relations of these integer sequences are obtained. Then, the generating functions are examined with the help of another recurrence relation obtained from this continued fraction structure.

Key Words: Suborbital graphs, Continued fractions, Minimal length paths, Fibonacci sequences, Lucas sequences, Pell sequences, Pell-Lucas sequences.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Königsberg' in 7 Köprüsünün Graf Modeli 2

Şekil 2. Bir Elektrik Devresi ve Graf Modeli 2

Şekil 3. Sosyal Ağ Graf Model Örneği 3

Şekil 4. $m = 4$ durumunda $F = \mathbf{G}_{1,1}$ Farey grafı 31

Şekil 5. $\mathbf{G}_{1,2}$ Grafı 33

Şekil 6. $\mathbf{F}_{1,2}$ grafı 34

Şekil 7. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki köşeler 38

Şekil 8. $\mathbf{F}_{1,5}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki bazı köşeler..... 45

Şekil 9. $\mathbf{F}_{1,8}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşeleri..... 54

Şekil 10. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafının minimal uzunluklu yol köşelerini veren algoritma 65

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Bazı Fibonacci ve Lucas Sayılarını Veren Tablo 7

Tablo 2. Bazı Pell ve Pell-Lucas Sayılarını Veren Tablo 11

SEMBOLLER DİZİNİ

Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst yarı düzlemi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
Γ_∞	: ∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2,\mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
$\mathbf{F}$	: Farey grafı
$\mathbf{F}_m$	: Farey dizisi
$O(\alpha,\beta)$	: (α,β) nın yörüngesi
$\gamma \to \delta$	: γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
$\approx$	: G-invaryant denklik bağıntısı
$b_0 + \boldsymbol{K}(a_m/b_m)$	: Sürekli kesrin toplamsal sembol ile gösterimi
$d_0 + \cfrac{c_1}{d_1 + \cfrac{c_2}{d_2 + \cfrac{c_3}{d_3 + \ddots}}}$	: Sürekli kesrin klasik gösterimi
f_n	: Sürekli kesir için klasik yaklaşım
F_n	: n. Fibonacci sayısı
P_n	: n. Pell sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Temel olarak bir graf (çizge) bir ağın matematiksel temsilidir ve çizgiler ile noktalar arasındaki ilişkiyi belirler. Noktalardan ve onları birleştiren çizgilerden oluşur. Çizgilerin uzunluğu ve noktaların konumu önemli değildir. Bir graftaki her bir nesneye bir düğüm denir. Bir "G" grafı, *"e"* linkleri olarak adlandırılan kenarlarla birbirine bağlanan, *"v"* adı verilen bir köşe kümesidir. Böylece $G = (v, e)$ dir. Graftaki bir v köşesi, bir grafın kesişme noktasıdır. Şehir, yol kavşağı veya ulaşım terminali gibi bir konumu belirtir. Graftaki bir e kenarı ise, iki köşe arasındaki bağlantıdır. Bağlantı, köşeler arasındaki hareketleri ifade eder. Genellikle ok olarak gösterilen bir yönü vardır. Ok kullanılmıyorsa bağlantı çift yönlüdür. $G = (V, E)$ de bir yürüyüş G nin kenar ve köşelerini içeren $v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$ şeklindeki sonlu bir dizidir. Eğer her kenar en fazla bir kere geçilirse bu yürüyüş bir yoldur. Başladığı köşeye geri dönen ve aynı köşeden iki kez geçmeyen yola ise devre adı verilir. Her köşe çifti arasında bir yol varsa graf bağlantılı aksi halde bağlantısızdır. Ağaç ise yönlendirilmemiş, bağlantılı ve devre içermeyen graftır.

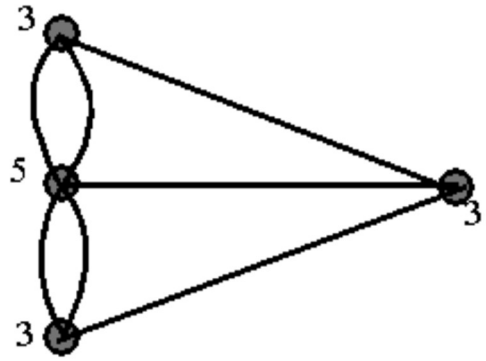
Graf teorisi kullanılarak bir rota planlama veya optimizasyon görevi formüle edilip çözülebilir hale getirilir. Buna bir örnek olarak gezgin satıcı (traveling salesman) problemi verilebilir. Teorik bilgisayar bilimi ve yöneylem araştırmasında önemli olan, kombinatoryal optimizasyonda iyi bilinen bir problemdir. (Biggs, 1986; Ruohonen, 2008)

Graf teorisinin 18. yüzyılda İsviçreli Matematikçi Leonhard Euler tarafından, ünlü "Königsberg'in Yedi Köprüsü" problemi üzerine yaptığı çalışma ile temeli atıldı (Biggs, 1986; Ruohonen, 2008). Bir şehir ve köprüler vb. ile ilgili somut bir problemden bir grafa dönüştürülen bir soyutlama yöntemi ile Euler, bu problemin bir çözümünün olmadığını matematiksel olarak kanıtladı. Sonrasında graf teorisi zamanla gelişerek bugün çok sayıda modern uygulaması olan bir alana dönüştü.

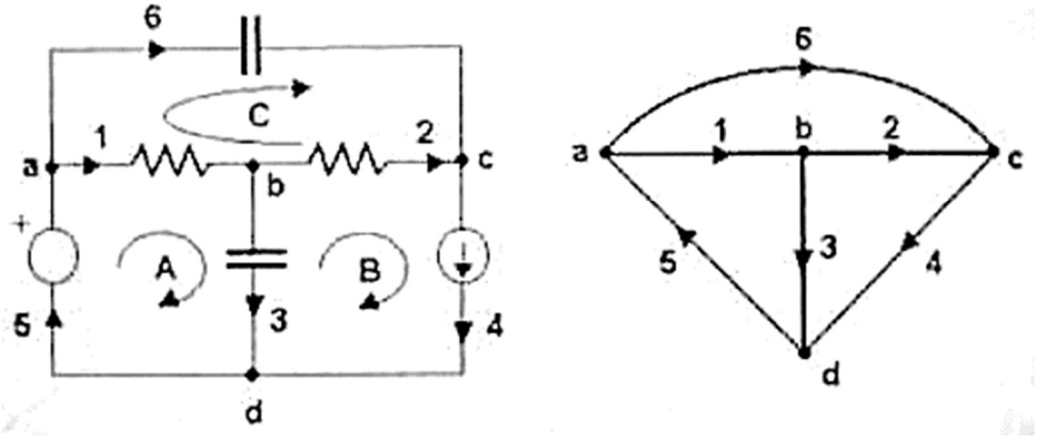
Graf teorisi nihayetinde ilişkilerin incelenmesidir. Şehir planlarından, bilgisayar verilerine kadar her şeyi soyutlayabilen bir dizi düğüm ve bağlantı verildiğinde, graf teorisi dinamik sistemlerin birçok hareketli parçasını ölçmek ve basitleştirmek için yararlı bir araç

sağlar. Grafları bu çatı altında incelemek, birçok düzenleme, ağ oluşturma, optimizasyon, eşleştirme ve operasyonel soruna çözüm sağlar.

Graflar; fiziksel, biyolojik, sosyal ve bilgi sistemlerinde birçok ilişki ve süreç türünü modellemek için kullanılabilir. Örneğin; sosyal medya (arkadaş/bağlantı önerileri), arama motorlarında sıralama, eve giden en kısa yolu bulmak için GPS haritaları, Kimyada molekül ve atomların incelenmesi, DNA dizilimi ve Bilgisayar ağ güvenliği gibi birçok alanda kullanılır.



Şekil 1. Königsberg' in 7 Köprüsünün Graf Modeli



Şekil 2. Bir Elektrik Devresi ve Graf Modeli



Şekil 3. Sosyal Ağ Graf Model Örneği

$G, PSL(2,\mathbb{Z})$ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu ve $\mathbb{H}$ kompleks düzlemin üst yarı düzlemi olmak üzere $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ olsun. Bu halde G nin cinsi (genus of G),

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{v_2}{4} - \frac{v_3}{3} - \frac{v_\infty}{2}$$

ile verilir. Burada $\mu = G$ nin $PSL(2,Z)$ deki indeksi;

$v_2 = G$ nin 2 mertebeli eşdeğer olmayan eliptik alt gruplarının sayısı

$v_3 = G$ nin 3 mertebeli eşdeğer olmayan eliptik alt gruplarının sayısı

$v_\infty = G$ nin eşdeğer olmayan uçlarının (cusp) sayısı

olarak alınır. (Hui, 2003)

Kongrüans alt grupların cins formüllerinin belirlenmesi günümüzde hala açık bir problem olarak ele alınmaktadır. $SL(2,\mathbb{Z})$'nin keyfi bir sonlu indeksli alt grubu verildiğinde, onun cinsi kolaylıkla hesaplanabilir. Fakat bu durumun tersi, yani keyfi bir cins verildiğinde, o cinse sahip olan kongrüans-olmayan ve kongrüans alt gruplar hakkında ne söylenebileceği konusu o kadar basit değildir (Cummins, 2003). Bu halde bir cinse

karşılık gelen grubun belirlenmesi ile grup hakkında daha fazla bilgi sahibi olunması mümkün olacaktır.

$\mathbb{H} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlem olmak üzere, Modüler grup $SL(2,\mathbb{Z}) \coloneqq \Gamma$ için otomorfik fonksiyonlar, $\Gamma\backslash H$ üzerindeki fonksiyonlardır. Otomorfik formlar olarak adlandırılan $SL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık alt gruplarının etkisi altında biraz farklı dönüşen fonksiyonları incelemek istiyoruz, öyle ki bunlardan herhangi ikisinin oranı (aynı ağırlıkta) otomorfik bir fonksiyon verecektir (Shimura, 1971).

Permütasyon grupları kullanılarak oluşturulan grafları C.C. Sims, Graphs and Finite Permutation Groups adlı çalışmasında ele aldı (Sims, 1967). Bu çalışmada Sims yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş grafları inceleyerek onları primitif gruplara uygulamıştır. Jones, Singerman ve Wicks ise Sims'in bu çalışmasından yola çıkarak Modüler grubun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketini tanımlayarak alt yörüngesel grafları oluşturdular (Jones, vd., 1991). Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki bu hareketinin transitif olduğunu gösterdiler. Ayrıca, bu grafların devre uzunluklarını incelediler. Alt yörüngesel graflardaki devreler ve eliptik elemanlar ise (Güler, vd., 2011; Kader, vd., 2011) çalışmalarında incelenmiştir. Akbaş, bir grafın hiçbir üçgen içermemesi için gerek ve yeter şart $u^2 \pm u + 1 \not\equiv mod(N)$ olduğunu göstermiştir. (Akbaş, 2001). Kader ve Güler genişletilmiş modüler grup $\widehat{\Gamma}$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketini inceleyerek, $\widehat{\mathbf{G}}_{u,N}$ ve $\widehat{\mathbf{F}}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarını oluşturdular. (Kader, vd., 2013) Γ^2 modüler grubu için alt yörüngesel graflar ise (Güler, vd., 2015) çalışmasında incelenmiştir. Alt yörüngesel graflardan oluşturulan kongrüans denklemler ise Kader, Güler ve Beşenk tarafından araştırıldı (Güler, vd., 2019).

Alt yörüngesel graflar ve sürekli kesirler arasındaki ilişki Değer, Beşenk ve Güler tarafından incelendi (Güler, vd., 2011). Ayrıca Sarma, Kushwaha ve Krishnan, Farey graflarına izmorfik alt yörüngesel graflarla oluşturulan sürekli kesirlerin yeni türleri üzerine çalıştılar (Sarma, vd., 2015; Kushwaha, vd., 2018).

Değer, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarındaki kenar şartlarından yola çıkarak bir köşenin gidebileceği en uzak köşeyi tanımladı. Böylece minimal uzunluklu yol kavramının tanımını verdi (Değer, 2017).

Bu tez çalışmasında $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu yol kavramı her iki yön için incelendi. Minimal uzunluklu yoldaki köşelerin sürekli kesir yapısı içerdiği belirlendi. Bu sürekli kesir yapıları $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2$ ve $1 < k_i \leq N$ kongrüans denklemindeki k_i değeri ile karakterize edilerek minimal uzunluklu yoldaki köşeler her iki yön için yeni bir eşitlikle yazıldı. İlk önce, $k_i = 3$ değeri için sürekli kesirlerin yinelenme bağıntısının karakteristik denklemi kullanılarak, Fibonacci sayıları ile köşeler arasındaki ilişki incelendi. Bu ilişki sonucunda sürekli kesirlerin matris bağıntıları kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayılarını veren yeni matrisler elde edildi ve bu matrisler incelendi.

Daha sonra $k_i = 6$ değeri için özel olarak köşelerin içerdiği sürekli kesir yapısı incelenerek Pell sayıları ile ilişkili olduğu görüldü. Yine sürekli kesirlerin matris bağıntıları kullanılarak Pell ve Pell-Lucas sayılarını veren yeni matrisler elde edilip bu matrisler incelendi.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu yoldaki köşelerin sürekli kesir yapısı yeni bir yinelenme bağıntısı ile yazılarak bu yinelenme bağıntısının üreteç fonksiyonu yazılıp, özel durumlar için incelendi.

Son olarak $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu yoldaki köşeleri veren bir algoritma oluşturuldu. Bu algoritma sayesinde u, N ve k_i değerleri girilerek hem sağ hem de sol yön için köşelerin hızlı bir şekilde hesaplandığı görüldü.

Tezin ilk bölümünde ihtiyaç duyacağımız temel tanım, teorem ve kavramlar özetlenecek, ikinci bölümde ise ilgili hesaplamalar yapılıp, sonuçlar verilecektir.

1.2. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri tam sayı dizilerinin en geniş çalışma alanına sahip konularıdır. Sanat, müzik, mimarlık resim, fotoğraf gibi alanlarda dahi uygulamaları olan sayılardır. Fibonacci sayıları, Leonardo Fibonacci'nin klasik eseri Liber Abaci kitabında verdiği en meşhur problem olan tavşan probleminden doğar. Edouard Lucas ise bu

sayılardan faydalanarak kendi sayı dizisini oluşturmuş ve buna Lucas sayı dizisi adını vermiştir.

Fibonacci sayı dizilerinin matrislerle ilişkisi ilk olarak King (1960), tarafından master tezinde incelendi. Daha sonra Hoggatt and Ruggles, (1963) ve Moore, (1983) bu konuda başka çalışmalar yaptı. Fibonacci sayı dizilerinin matris uygulamaları ise, elektrik netvork sistemleri, bilgi güvenliği, kodlama teorisi vb. alanlarda kullanılır. (Basin, 1967; Prajapat vd., 2012; Stakhov, 2005).

Tanım 1.2.1.

$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

yinelenme bağıntısı ile tanımlanan diziye Fibonacci sayı dizisi denir. F_n ise n. Fibonacci sayısı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.2.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ yinelenme bağıntısı ile negatif indisli Fibonacci sayıları aşağıdaki şekilde verilir:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_{n-1}. \tag{2}$$

Tanım 1.2.3.

$L_0 = 2,\ L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{3}$$

yinelenme bağıntısı ile tanımlanan diziye Lucas sayı dizisi denir. L_n ise n. Lucas sayısı olarak adlandırılır.

Aşağıdaki tabloda bazı Fibonacci ve Lucas sayıları verilmiştir.

Tablo 1. Bazı Fibonacci ve Lucas Sayılarını Veren Tablo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

Teorem 1.2.4. (Cassini Formülü) (Koshy, 2001)

F_n, n. Fibonacci sayısı ve $n \geq 1$ olmak üzere:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{\mathrm{n}}. \tag{4}$$

Teorem 1.2.5. (Binet Formülleri) (Koshy, 2001)

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, $n \geq 1$ için n. Fibonacci sayısı aşağıdaki eşitlik ile verilir;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{5}$$

Teorem 1.2.6. (Binet Formülleri) (Koshy, 2001)

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, $n \geq 1$ için n. Lucas sayısı aşağıdaki eşitlik ile verilir;

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{6}$$

Sonuç 1.2.7. (Koshy, 2001)

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

i. $F_{2n} = F_n L_n$,

ii. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$,

iii. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$,

iv. $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$.

1.3. Fibonacci Matrisleri

Fibonacci sayılarının matris uygulamaları matematiğin birçok alanında kullanılır. Fibonacci sayıları ve matrisler arasındaki bağlantıyı veren en temel matris

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

olup, Q-matris olarak adlandırılır. Bu matris ilk olarak Charles H. King tarafından 1960 yılında çalışılmıştır.

Teorem 1.3.1. (King, 1960)

$n \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Q-Matrisi kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde dilir:

Sonuç 1.3.2. (Koshy, 2001)

i. $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n$,

ii. $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$,

iii. $F_{m+n+1} = F_m F_{n+1} + F_m F_{n-1}$,

iv. $F_{m+n-1} = F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1}$.

Diğer bir matris olan M-matrisi ise 1983 yılında Sam Moore tarafından çalışılmıştır;

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Teorem 1.3.3. (Moore, 1983)

$n \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Teorem 1.3.4. (Koshy, 2001)

Q^n matrisinin karakteristik kökleri α^n ve β^n dir.

Sonuç 1.3.5. (Koshy, 2001)

Q matrisinin karakteristik kökleri α ve β dır.

Lucas sayı dizilerini veren matris ise aşağıdaki R matrisidir.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Teorem 1.3.6. (Hoggatt ve Ruggles, 1963)

$n \geq 1$ olmak üzere;

$$RQ^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

3×3 tipindeki bir matris ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişki ise aşağıdaki P matrisi ile verilir;

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Teorem 1.3.7. (Koshy, 2001)

$n \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik verilir:

$$P^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & 2F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

1.4. Pell, Pell-Lucas Sayı Dizileri

Fibonacci sayıları gibi Pell sayıları da birçok önemli uygulama alanında kullanılan popüler sayı dizilerindendir. Ercolano, (1979), Bicknell, (1975) ve Horadam (1971) Pell ve Pell-Lucas sayılarının temellerini atan çalışmaları yapmışlardır.

Tanım 1.4.1.

$P_0 = 0,\ P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ olmak üzere;

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{15}$$

yinelenme bağıntısı ile tanımlanan diziye Pell sayı dizisi denir. P_n ise n. Pell sayısı olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.2.

$Q_0 = 1,\ Q_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ olmak üzere;

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{16}$$

yinelenme bağıntısı ile tanımlanan diziye Pell-Lucas sayı dizisi denir. Q_n ise n. Pell-Lucas sayısı olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.3.

$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ yinelenme bağıntısı ile negatif indisli Pell sayıları aşağıdaki şekilde verilir;

$$P_{-n} = (-1)^{n-1} P_n. \tag{17}$$

Tanım 1.4.4.

$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ yinelenme bağıntısı ile negatif indisli Pell-Lucas sayıları aşağıdaki şekilde verilir;

$$Q_{-n} = (-1)^n Q_n. \tag{18}$$

Aşağıdaki tabloda bazı Pell ve Pell-Lucas sayıları verilmiştir.

Tablo 2. Bazı Pell ve Pell-Lucas Sayılarını Veren Tablo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	1	3	7	7	17	41	99	239	1393	3363

Teorem 1.4.5. (Koshy, 2014)

$\gamma,\ x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü, δ ise negatif kökü olmak üzere; $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlik verilir;

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}. \tag{19}$$

Teorem 1.4.6. (Koshy, 2014)

$\gamma,\ x^2-2x-1=0$ denkleminin pozitif kökü, δ ise negatif kökü olmak üzere; $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlik verilir:

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}. \tag{20}$$

Teorem 1.4.7. (Simpson Formülü) (Koshy, 2014)

P_n, n. Pell sayısı, $n \geq 1$ olmak üzere;

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n. \tag{21}$$

Teorem 1.4.8. (Koshy, 2014)

Aşağıdaki ifadeler verilir;

i. $Q_n + Q_{n-1} = 2P_n$,
ii. $P_{2n} = 2P_nQ_n$,
iii. $Q_{n+1} + Q_{n-1} = 4P_n$.

1.5. Pell Matrisleri

Fibonacci sayılarında olduğu gibi Pell sayıları ve matrisler arasındaki bağlantı incelendiğinde,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

P-matrisi alınır.

Teorem 1.5.1. (Koshy, 2014)

$n \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

P-Matrisi kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 1.5.2. (Koshy, 2014)

$$P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n. \tag{24}$$

Teorem 1.5.3. (Koshy, 2014)

P^n matrisinin karakteristik kökleri $\gamma^n ve\ \delta^n$ dir.

Sonuç 1.5.4. (Koshy, 2014)

P matrisinin karakteristik kökleri γ ve δ dır.

1.6. Üreteç Fonksiyonlar

$\alpha_0, \alpha_1, ..$ gerçel sayılar olmak üzere, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dizisi alınsın. O zaman,

$$a(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \cdots \tag{25}$$

fonksiyonuna (α_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir. $\alpha_i = 0,\ i > n$ olacak şekilde sonlu $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dizisinin üreteç fonksiyonu ise aşağıdaki şekildedir:

$$a(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n. \tag{26}$$

Ayrıca, $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde, (α_n) dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n. \tag{27}$$

Örnek: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, F_0 = 0, F_1 = 1,$ Fibonacci yinelenme bağıntısını çözümlemek için üreteç fonksiyonu kullanılsın. O halde Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots + F_n x^n + \ldots \tag{28}$$

ile verilir. F_{n-1} ve F_{n-2} in mertebeleri sırasıyla 1 ve 2 olup, F_n nin mertebesinden az olduğundan, $xh(x)$ ve $x^2h(x)$:

$$xh(x) = F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \ldots + F_{n-1} x^n + \ldots$$

$$x^2h(x) = F_1 x^3 + F_2 x^4 + F_3 x^5 + \ldots + F_{n-2} x^n + \ldots$$

$$h(x) - xh(x) - x^2h(x) = F_1 x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \ldots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \ldots = x$$

yazılır. Böylece,

$$(1 - x - x^2)h(x) = x$$

$$h(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right]$$

$$\sqrt{5}h(x) = \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}$$

$$= \sum_0^\infty \alpha^n x^n - \sum_0^\infty \beta^n x^n = \sum_0^\infty (\alpha^n - \beta^n)x^n$$

$$\mathrm{h}(x) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

elde edilir. Fibonacci Binet formülleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kullanılırsa aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 1.6.1. (Hoggatt, 1971)

$$\frac{1-x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n. \tag{29}$$

Sonuç 1.6.2. (Hoggatt, 1971)

$$\frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n. \tag{30}$$

Sonuç 1.6.3. (Koshy, 2014)

$$\frac{2x^2}{1-6x^2+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}x^{2n} \tag{31}$$

Sonuç 1.6.4. (Koshy, 2014)

$$\frac{1-3x^2}{1-6x^2+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}x^{2n}. \tag{32}$$

1.7. Sürekli Kesirler

Tanım 1.7.1. (Cuyt, vd., 2008)

c_m, $d_m \in \mathbb{C}$, her m için $c_m \neq 0$ olmak üzere,

$$d_0 + \cfrac{c_1}{d_1 + \cfrac{c_2}{d_2 + \cfrac{c_3}{d_3 + \ddots}}} \tag{33}$$

ifadesine bir sürekli kesir denir. Başka bir ifade ile sürekli kesirler aşağıdaki sembollerle de ifade edilebilir;

$$d_0 + \frac{c_1|}{|c_1} + \frac{c_2|}{|c_2} + \frac{c_3|}{|c_3} + \cdots \tag{34}$$

$$d_0 + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} + \ldots \tag{35}$$

ve

$$d_0 + \underset{m=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{c_m}{d_m}\right) \tag{36}$$

veya kısaca

$$d_0 + K\left(\frac{c_m}{d_m}\right) \tag{37}$$

dir. Buradaki **K** sembolü Kettenbruch (sürekli kesir) Almanca kelimesinden gelir ve toplam sembolü olan **Σ** sembolü ile benzerlik gösterir. Bir sürekli kesir için n. yaklaşım, f_n ile gösterilir ve

$$f_n = d_0 + \cfrac{c_1}{d_1 + \cfrac{c_2}{d_2 + \cfrac{c_3}{d_3 + \ddots + \cfrac{c_n}{d_n}}}} \tag{38}$$

$$f_n = d_0 + \frac{c_1|}{|c_1} + \frac{c_2|}{|c_2} + \frac{c_3|}{|c_3} + + \cdots + \frac{c_n|}{|d_n} \tag{39}$$

$$f_n = b_0 + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \ldots + \frac{c_n}{d_n} \tag{40}$$

$$f_n = d_0 + \underset{m=1}{\overset{n}{K}} \left(\frac{c_m}{d_m}\right) \tag{41}$$

ile ifade edilir.

Tanım 1.7.2. (Cuyt, vd., 2008)

$\hat{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ile genişletilmiş kompleks düzlem gösterilsin. $N \coloneqq \{1,2,3,\dots\}$ ve $N_0 \coloneqq \{0,1,2,3,\dots\}$ verilsin. $t \geq 1$ için $c_t \neq 0$ olmak üzere bir $\left(\{c_t\}_{t\in N}, \{d_t\}_{t\in N_0}\right)$ sıralı kompleks dizi çifti;

$$s_0(\varphi) \coloneqq d_0 + \varphi, \quad s_n(\varphi)\frac{c_n}{d_n+\varphi},\ n = 1,2,3,\dots \tag{42}$$

$$S_0(\varphi) \coloneqq s(\varphi), \quad S_n(\varphi) \coloneqq S_{n-1}\left(s_n(\varphi)\right),\ n = 1,2,3,\dots \tag{43}$$

$$f_n = S_n(0) \in \hat{\mathbb{C}}, \quad n = 1,2,3,\dots \tag{44}$$

olacak şekilde, lineer kesirli dönüşümlerin $\{s_n(\varphi)\}_{n\in \mathrm{N}_0}$ ve $\{S_n(\varphi)\}_{n\in \mathrm{N}_0}$ dizileri ile bir $\{f_n\}$ dizisini oluşturur.

$$\left(\left(\{c_m\},\{d_m\}\right),\{f_n\}\right) \tag{45}$$

sıralı çifti (33),(34),(35),(36) ve (37) ile verilen sürekli kesre karşılık gelir.

Tanım 1.7.3. (Cuyt, vd., 2008)

Sürekli kesrin kısmi pay ve paydası sırasıyla c_m ve d_m sayıları ile ifade edilir. n. yaklaşım ise f_n değeridir ve (38),(39),(40) ve (41) ile gösterilir. Yaklaşım yerine yakınsak terimi de kullanılır. Kısmi pay ve paydaya ortak isim olarak eleman denir.

$S_n(\varphi)$ lineer kesirli dönüşümü

$$S_n(\varphi) = d_0 + \cfrac{c_1}{d_1+\cfrac{c_2}{d_2+\cfrac{c_3}{d_3+\ddots+\cfrac{c_n}{d_{n+\varphi}}}}} \tag{46}$$

ya da başka bir ifade ile

$$S_n(\varphi) = f_n = b_0 + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \ldots + \frac{c_n}{d_{n+\varphi}} \tag{47}$$

yazılır. Denk olarak "o" ifadesi bileşke işlemini göstermek üzere

$$S_n(\varphi) = s_0 \; o \; s_1 \; o \; s_2 \; o \; \ldots o \; s_n(\varphi), \tag{48}$$

olarak ifade edilir. Burada $s_0 \; o \; s_1(\varphi) := s_0(\; s_1(\varphi))$ dir. Özellikle

$$s^n(\varphi) \coloneqq \underbrace{s \; o \; s \; o \; \ldots o \; s(\varphi)}_{n \; defa}$$

olur.

Tanım 1.7.4. (Cuyt, vd., 2008)

$\{\varphi_n\}_{n\in \mathrm{N}_0}$ dizisi verilsin. O halde,

$$S_n(\varphi_n) \in \hat{\mathbb{C}} \tag{49}$$

sayısı n. değiştirilmiş yaklaşım olarak ifade edilir.

Tanım 1.7.5. (Cuyt, vd., 2008)

$d_0 + K\,(c_m/d_m)$ sürekli kesrine yakınsaktır denir :$\Leftrightarrow \{f_n\} = \{K_n(0)\}$ yaklaşımlar dizisi $f \in \hat{\mathbb{C}}$ limitine yakınsaktır. Bu durumda f ye bu sürekli kesirin değeri denir. Burada ∞ a yakınsama kabul edilir. Eğer bu sürekli kesir f ye yakınsıyor ise bu durumda sürekli kesri ifade eden bütün semboller
$\left(\left(\{c_m\}, \{d_m\}\right), \{f_n\}\right)$ sıralı çiftini ve hem de f yi temsil eder. O halde,

$$f = \lim_{n\to\infty} K_n\,(0) = b_0 + \mathop{K}_{m=1}^{\infty} \left(\frac{c_m}{d_m}\right). \tag{50}$$

yazılabilir. Bu ifadeye klasik yakınsaklık da denir.

Tanım 1.7.6. (Yinelenme Bağıntıları) (Cuyt, vd., 2008)

$d_0 + K\ (c_m/d_m)$ sürekli kesri verilsin. Bu kesrin n. payı C_n ve n. paydası D_n değerleri, başlangıç koşulları $C_{-1} := 1,\ D_{-1} := 0,\ C_0 := b_0,\ D_0 := 1$ olacak şekilde, aşağıdaki yinelenme bağıntıları (ikinci mertebeden lineer fark denklemleri) ile bulunur;

$$\begin{bmatrix} C_n \\ D_n \end{bmatrix} := b_n \begin{bmatrix} C_{n-1} \\ D_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} C_{n-2} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{51}$$

Bu sürekli kesir için $S_n(\varphi_n)$ değiştirilmiş yaklaşımı

$$S_n(\varphi_n) = \frac{C_n + C_{n-1}\,\varphi_n}{D_n + D_{n-1}\varphi_n}, \qquad n = 0,1,2,3, \ldots \tag{52}$$

ile yazılır ve böylece f_n n. yaklaşımı

$$f_n = S_n(0) = \frac{C_n}{D_n},\ f_{n-1} = S_n(\infty) = \frac{C_{n-1}}{D_{n-1}} \tag{53}$$

bulunur.

Sürekli kesirlerin matris bağıntısı ise aşağıdaki şekilde incelenir:

$$s_m(z) := \frac{c_m}{d_m + z}, x_m := \begin{pmatrix} 0 & c_m \\ 1 & d_m \end{pmatrix}, \qquad m = 1,2,3, \ldots \tag{54}$$

olsun. Bu durumda $S_n(z)$ lineer kesirli dönüşümü

$$X_n := x_1 x_2 x_3\ \ldots\ x_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & C_n \\ D_{n-1} & D_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{55}$$

matrisine karşılık gelir.

Böylece 2x2 lik bu matrsilerin çarpımı $\{C_n\},\{D_n\}$ ile f_n $n.$ yaklaşımının $\{f_n\}$ dizilerinin oluşumunda kullanılabilir. Yani;

$$s_m(z) \coloneqq \frac{c_m + e_m z}{d_m + g_m z}, y_m \coloneqq \begin{pmatrix} e_m & c_m \\ g_m & d_m \end{pmatrix}, \qquad m = 1,2,3, \ldots \tag{56}$$

ise buradan

$$S_n(z) \coloneqq s_1 \; o \; s_2 \; o \; s_3 \; o \; \ldots \; s_n(z) = \frac{C_n + E_n z}{D_n + G_n z}, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{57}$$

ve

$$Y_n \coloneqq y_1 y_2 y_3 \; \ldots \; y_n = \begin{pmatrix} E_n & C_n \\ G_n & D_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{58}$$

dir.

1.8. Yinelenme Bağıntılarının Çözümü

Sabit Katsayılı Lineer Homojen Yinelenme Bağıntıları

$c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ve $c_k \neq 0$ olacak şekilde,

$$y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \ldots + c_k y_{n-k} \tag{59}$$

yinelenme bağıntısı alınsın. Bu denkleme sabit katsayılı k. mertebeden, lineer homojen yinelenme bağıntısı adı verilir. Burada, lineerlik şu anlama gelir: denklemin sağ tarafındaki her terim en fazla birinci mertebeden y_i öncülü içerir. Denklemin sağ tarafındaki her terim bazı y_i lerin çarpımı ise yani, bağıntı her n için $y_n = 0$ dizisi için sağlanıyorsa, bu yinelenme bağıntısı homojendir. Tüm c_i kat sayıları sabittir. y_n , k yakın öncülüne bağlı olduğundan, bağıntının mertebesi k olur. O halde k. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir yinelenme bağıntısını çözmek için, k tane başlangıç şartına ihtiyaç vardır, $y_0 = c_0, y_1 = c_1, \ldots, y_{k-1} = c_k$.

Şimdi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir yinelenme bağıntısı verilsin;

$$y_n = \alpha y_{n-1} + \beta y_{n-2}, \tag{60}$$

burada α ve β, $c\phi^n$ nin sıfır olmayan çözümleri olup, $c\phi^n = \alpha c\phi^{n-1} + \beta c\phi^{n-2}$ yazılır. O halde, $c\phi^n \neq 0$ olup, $\phi^2 = \alpha\phi + \beta$ yazılır. Buradan da , $\phi^2 - \alpha\phi - \beta = 0$ olur. Böylece, ϕ, $y_n = \alpha y_{n-1} + \beta y_{n-2}$ yinelenme bağıntısının karakteristik denklemi olan $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ nin çözümüdür. Bu yinelenme bağıntısının kökleri yinelenme $x^2 - \alpha x - \beta$ karakteristik denkleminin karakteristik kökleri olarak adlandırılır. Aşağıdaki teorem sabit katsayılı lineer homojen bir yinelenme bağıntısını çözmek için karakteristik köklerin nasıl yardım ettiğini verir;

Teorem 1.8.1. (Koshy, 2001)

ϕ ve δ , $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ denkleminin farklı çözümleri olsun. Burada, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ olarak verilir. O zaman sabit katsayılı lineer homojen bir yinelenme bağıntısının $y_n = \alpha y_{n-1} + \beta y_{n-2}$ her çözümü $y_0 = c_0$ ve $y_1 = c_1$, A ve B sabit olacak şekilde $y_n = A\phi^n + B\delta^n$ formundadır.

1.9. Γ Modüler Grubu

$\mathbb{C}$ kompleks uzayının üst yarı düzlemi $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ ile verilsin. $SL(2,\mathbb{R}) := \left\{g := \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix} : pt - rs = 1,\ p,r,s,t \in \mathbb{R}\right\}$ grubu verildiğinde, $z \in \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olacak şekilde, $SL(2,\mathbb{R})$ grubu $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks uzay üzerinde

$$gz = \frac{pz + r}{sz + t} \tag{61}$$

şeklinde hareket eder. $PSL(2,\mathbb{R})$ ile $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$ bölüm grubu incelendiğinde, katsayıları tamsayı olan matrislerden oluşan $SL(2,\mathbb{Z})$ grubu ise $SL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubudur. O halde, Γ modüler grubu, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemindeki

$$\pm\begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix}:\ p,r,s,t \in \mathbb{Z},\ \ pt - rs = 1 \tag{62}$$

elemanları tarafından

$$z \to \frac{pz + r}{sz + t} \tag{63}$$

dönüşümü ile hareket eden Möbiüs dönüşümlerinin bir grubudur. Her matris $\pm$ sembolü dikkate negatifi ile eş alınacaktır. Böylece,

$$SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\} \coloneqq \{(\pm I)A :\ A \in SL(2,\mathbb{Z})\} \tag{64}$$

bölüm grubu olacak şekilde,

$$\Gamma \coloneqq PSL(2,\mathbb{Z}) \cong\ SL(2,\mathbb{Z})\ /\ \{\pm I\} \tag{65}$$

olur. Aynı zamanda, $\Gamma = \langle X \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rangle$ modüler grubu X ve Y matrisleri tarafından üretilir ve $X^2 = Y^3 = I$ dır. $z \to \frac{pz+r}{sz+}$ dönüşümü Γ modüler grubunun diğer kümelerdeki hareketini de tanımlar. Rasyonel projektif doğrusu olan $\widehat{\mathbb{Q}} \coloneqq \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi en uygun seçimdir.

Burada, ∞ a karşılık $a \neq 0$ olacak şekilde, $\frac{p}{0}$ elemanı denk gelecektir. ∞ un bu dönüşüm altındaki görüntüsü süreklilik ile tanımlanacak. Buradan $A(z) \coloneqq \frac{pz+r}{sz+t}$ olacak şekilde

$$A(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{pz + r}{sz + t} = \frac{p}{s}$$

yazılır. $pt - sr \neq 0$ olup p ve s den en az biri sıfırdan farklı ve $A(\infty)$ iyi tanımlıdır. Böylece $A(\infty) = \infty \Leftrightarrow s = 0$ ve $A(0) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ olur.

$\infty = \frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$ ve $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olup $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın elemanlarının gösterimi tek değildir. Buradan Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\pm\begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix}: p,r,s,t \in \mathbb{Z},\ pt - rs = 1$elemanları tarafından

$$\begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix}: \frac{x}{y} \to \frac{p\frac{x}{y} + r}{s\frac{x}{y} + t} = \frac{px + ry}{sx + ty}$$

ile verilir.

Önerme 1.9.1. (Jones, vd., 1991)

i. $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki Γ nın hareketi transitiftir.
ii. Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirlidir.

$\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki Γ'nın imprimitif hareketi incelensin. $[G, \Omega]$ permütasyon grubu G grubunun Ω kümesi üzerindeki hareketi ile oluşsun ve " $\approx$ " Ω üzerinde bir denklik bağıntısı olacak şekilde;

"$\forall g \in G$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta \Rightarrow g(\alpha) \approx g(\beta)$"

bağıntısına Ω üzerinde bir *G*-invaryant denklik bağıntısı denir. Bu bağıntının denklik sınıfları ise bloklar olarak adlandırılır. $[G, \Omega]$ ikilisine impirimitiftir olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart Ω üzerinde

i. $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (özdeşlik bağıntısı)
ii. $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ *için* $\alpha \approx \beta$ (evrensel bağıntı)

bağıntıları dışında bir " $\approx$ " *G*-invaryant denklik bağıntısı olmasıdır. Aksi halde $[G, \Omega]$ ya primitiftir denir.

Önerme 1.9.2. (Jones, vd., 1991)

$[G,\Omega]$ bir transitif permütasyon grubu olarak verilsin. O halde, $[G,\Omega]$ ikilisinin primitif olması için gerek ve yeter şart bir $\alpha \in \Omega$ noktasının sabitleyeni olan $G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$, $\forall \alpha \in \Omega$ için G nin bir maksimal bir alt grup olmasıdır.

Eğer bir $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ olursa $[G,\Omega]$ permütasyon grubu primitif olmaz. Aynı zamanda G_α G'nin bir maksimal alt grubu olması için gerek ve yeter şart $G_\alpha \leqq H \leqq G$ olduğunda $H = G_\alpha$ veya $H = G$ olmasıdır. $G_\alpha < H < G$ olarak alınsın. Ω kümesinin her elemanı bir $g \in G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir çünkü G transitif olarak hareket eder.

Önerme 1.9.3. (Jones, vd., 1991)

$[G,\Omega]$ permütasyon grubu alındığında, hareket transitif olduğunda yörünge tektir.

Önerme 1.9.4. (Jones, vd., 1991)

Ω üzerinde "$\approx$" denklik bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin;

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH. \tag{66}$$

Bu bağıntı iyi tanımlı bir G-invaryant denklik bağıntısıdır.

Önerme 1.9.5. (Jones, vd., 1991)

$G_\alpha \subsetneqq H$ olup, $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$ bağıntısı özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir.

Önerme 1.9.6. (Jones, vd., 1991)

Önceki önermeden " $\approx$ " bağıntısı G-invaryant denklik bağıntısı ve özdeşlik veya evrensel bağıntı olmadığından, (G,Ω) imprimitiftir.

Önerme 1.9.7. (Jones, vd., 1991)

$\beta \in \Omega$ alınırsa $\beta = g(\alpha)$ olacak şekilde $\exists g \in G$ olur. Buradan β yı içeren $[\beta]$ bloğu $M \coloneqq \{gh(\alpha) \mid h \in H\}$ kümesi ile verilir.

$\alpha = e(\alpha)$ alındığında, $[\alpha] = [e(\alpha)] = \{eh(\alpha) \mid h \in H\} = \{h(\alpha) \mid h \in H\} = H(\alpha)$ yazılır. Buradan $[\alpha]$ bloğunun $H(\alpha) \coloneqq \{h(\alpha) \mid h \in h\}$ olacak şekilde H-yörüngesi olduğu görülür.

$\{l_i \mid i \in I\}$, H'nın G'deki sol yan sınıf gösterimlerinin bir kümesi olarak alınırsa, $i \in I$ olacak şekilde bloklar, $H(\alpha)$'nın $l_i H(\alpha)$ görüntüleridir. O halde, blokların sayısı H'nın G'deki $|I| \coloneqq |G:H|$ indeksine eşittir. Blokların $\Omega/\approx$ kümesi üzerinde, G'nin apaçık indirgenmiş bir hareketi vardır. $[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni H alt grubunu oluşturur.

$G \coloneqq \Gamma$ ve $\Omega \coloneqq \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere, Önerme 1.9.2. uygulandığında, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ keyfi elemanı için $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = 1 \; ve \; c = 0$ olur. Buradan $d = 1$ ve $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ yazılır. Böylece ∞ un Γ Modüler grubundaki Γ_∞ sabitleyeni $\Gamma_\infty = \langle Z \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ ile verilir. Sonuç olarak, Γ_∞ sabitleyenini içeren (veya denk olarak Z'yi içeren) Γ nın H alt grupları bularak $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ-invaryant denklik bağıntıları üretilebilir. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olup, H için $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde

$$\Gamma_0(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \; : c \equiv 0 \; (mod \; N) \right\}$$

kongrüans alt grupları alınabilir. $N \in \mathbb{N}, \; N > 1$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ alındığında $\Gamma_\infty < \Gamma_0(N) < \Gamma$ sağlanır. $\Gamma_0(N)$'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ-invaryant denklik bağıntısı $\underset{n}{\approx}$ (veya $\approx$) verildiğinde $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ-invaryant denklik bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir.

$\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ Modüler grubu transitif olduğundan $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} = \sigma\left(\frac{1}{0}\right)$ olmak üzere bir $\sigma \in \Gamma$ vardır. O halde $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde

$$\sigma(\infty) = \frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} = \tau(\infty) \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau \in H \coloneqq \Gamma_0(N) \tag{67}$$

yazılır. Buradan aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \ (mod\ N) \tag{68}$$

Gerçekten;

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau \in \Gamma_0(N) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \Leftrightarrow N|ry - sx$$

$$\Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \ (mod\ N)$$

olur. Bir başka ifade ile $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ denktir $\Leftrightarrow$ aynı $modn$ kısaltmasına sahiptirler. Yani,

$$\exists u \in U_n \coloneqq \{u \,|(u, N) = 1, u \leq N\} : \ x \equiv ur \ (mod\ N)\ ve\ y \equiv us \ (mod\ N) \tag{69}$$

(68) ve (69) ile verilen iki denklemin de $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ-invaryant denklik bağıntısı olarak tanımlandığına dikkat ediniz. ∞'u içeren, $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \ (mod\ N)\right\}$ ile verilen blok her iki durumda da aynıdır. Böylece bu iki bağıntı eşittir. O halde, Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi imprimitiftir.

Blokların sayısı ise

$$\psi(N) \coloneqq |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N\prod_{p|N}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \tag{70}$$

kadardır.

N değeri p asal sayısına eşit ise blok sayısı $\psi(p) = p + 1$ kadardır. Bu bloklar

$$[j] = \left\{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \,\middle|\, x \equiv jy \ (mod\ p)\right\}, j \neq \infty$$

$$[\infty] = \{x/y \in \widehat{\mathbb{Q}} \mid y \equiv 0 \ (mod\ p)\}$$

olacak şekilde $[0], [1], \cdots, [p-1][\infty]$ dur. Örnek olarak $p = 2$ için incelendiğinde, bu bloklar

$$[0] = \left\{\frac{\text{çift}}{\text{tek}}\right\}, [1] = \left\{\frac{\text{tek}}{\text{tek}}\right\}, [\infty] = \left\{\frac{\text{tek}}{\text{çift}}\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.9.8.

$\varphi \in PSL(2, \mathbb{R}), \varphi(z) = \frac{pz+r}{sz+t}$ olmak üzere;

i. $|p + t| < 2$ ise φ ye eliptik eleman,
ii. $|p + t| = 2$ *is*e φ ye parabolik eleman,
iii. $|p + t| > 2$ ise φ ye hiperbolik eleman denir.

1.10. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$[G, \Omega]$ bir transitif permütasyon grubu olarak verilsin. O halde $[G, \Omega]$ bir topolojik dönüşüm grubudur. Böylece, $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ olacak şekilde G, ΩxΩ üzerinde

$$\begin{array}{rcl} \wedge: Gx(\Omega x\Omega) & \rightarrow & (\Omega x\Omega) \\ \big(g, (\alpha, \beta)\big) & \rightarrow & \wedge\big(g, (\alpha, \beta)\big) \coloneqq g\wedge(\alpha, \beta) \coloneqq \big(g(\alpha), g(\beta)\big) \end{array} \quad (71)$$

ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt Yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $(O(\alpha, \beta) \coloneqq \{g(\alpha, \beta) \mid g \in G\})$. Buradan,

$$(x, y) \in O(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \exists g \in G : \ (x, y) = g(\alpha, \beta) = \big(g(\alpha), g(\beta)\big)$$

dır. $O(\alpha, \beta)$, (α, β) nın yörüngesi ile $\boldsymbol{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafı oluşturulur. $\boldsymbol{G}(\alpha, \beta)$ nın köşeleri Ω nın elemanları olarak verilir. $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ olduğunda γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar vardır denir ve $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilir.

Açıkça $O(\beta,\alpha)$ da bir yörüngedir veya $O(\alpha,\beta)$ ya eşittir ya da $O(\alpha,\beta)$ dan farklıdır. O halde, $O(\alpha,\beta) \neq O(\beta,\alpha)$ olduğunda $G(\beta,\alpha)$, $G(\alpha,\beta)$ nın kenarları ters yönlendirilmişi olup, $G(\alpha,\beta)$ ile $G(\beta,\alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$ ise $G(\beta,\alpha) = G(\alpha,\beta)$ olup bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda $G(\alpha,\beta)$ yönlendirilmiş olmayan bir graf olarak alınır ve $G(\alpha,\beta)$ ya kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graf denir. Yani, $\gamma \to \delta$ ise $\delta \to \gamma$ veya bu durum $\gamma \leftrightarrows \delta \Leftrightarrow \gamma - \delta$ ile gösterilir.

Önerme 1.10.1. (Jones, vd., 1991)

(G,Ω) transitif permütasyon grubunun bir alt yörüngesel grafı $\boldsymbol{G}$ olarak verlsin. O halde aşağıdaki ifadeler verilir;

(i) G, $\boldsymbol{G}$'nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder;
(ii) $\boldsymbol{G}$'nin köşeleri üzerinde G nin hareketi transitiftir;
(iii) Eğer $\boldsymbol{G}$ kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G, $\boldsymbol{G}$'nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder;
(iv) $\boldsymbol{G}$ 'nin kendisiyle eşleşmiş olmadığı durumda, $\boldsymbol{G}$'nin kenarları üzerindeki G nin hareketi transitiftir.

$O(\alpha,\alpha) = \{(\gamma,\gamma) \mid \gamma \in \Omega\}$ $\Omega \times \Omega$ nın köşegenidir. Her $\alpha \in \hat{\mathbb{Q}}$ köşesi için $G(\alpha,\alpha)$ alt yörüngesel grafı sadece bir düğüm içerir ve kendisiyle eşleşmiştir. Böyle graflar aşikâr alt yörüngesel graf olarak adlandırılır. Bu çalışmada aşikâr olmayan alt yörüngesel graflar ile çalışılacaktır.

Γ'nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi alınarak buradaki alt yörüngesel graflar incelensin. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan, her bir alt yörünge, bir $v \in \hat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) çiftini içerir; $n \geq 0$ ve $(u,N) = 1$ olacak şekilde, $v = \frac{u}{N}$ yazılırsa, bu alt yörünge $O_{u,N}$ ve buna karşılık gelen $G(\infty,v)$ alt yörüngesel grafı ise $\mathbf{G}_{u,N}$ ile gösterilsin. $v = \infty$ alındığında, $\mathbf{G}_{1,0} = \mathbf{G}_{-1,0}$ olup aşikâr alt yörüngesel graftır. O halde, $v \in \mathbb{Q}$ olduğu kabul edilir.

Önerme 1.10.2. (Jones, vd., 1991)

$v' \in \mathbb{Q}$ alındığında $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v \; ve \; v'$ Γ_∞ un aynı yörüngesindedir; Γ_∞ , $Z:$ $v \to v+1$ ile üretildiğinden, bu durum $u \equiv u' \; (mod \; N)$ olacak şekilde $v' = \frac{u'}{N}$ ifadesine denktir.

O halde, $\mathbf{G}_{u,N} = \mathbf{G}_{u',N'} \Leftrightarrow N \equiv N' \; ve \; u \equiv u' \; (mod \; N)$ olur. Buradan, $\forall N \geq 1$ tamsayısı için $\Phi(N) = |U_N| = N\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ (Euler fonksiyonu) tane farklı $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafı vardır. Bunlardan biri her u ∈ U_N birimi içindir.

Eğer $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O(u, N)$ yani, $\mathbf{G}_{u,N}$'de $\frac{r}{s}$ den $\frac{x}{y}$ ye yönlendirilmiş (veya eğer $\boldsymbol{G}_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiş ise yönlendirilmemiş) bir kenar varsa, $\mathbf{G}_{u,N}$ de $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ yazılır.

Teorem 1.10.3. (Jones, vd., 1991)

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathbf{G}_{u,N}$, yani bu köşelerin bir kenar oluşturması için gerek ve yeter şart

a) $x \equiv ur \; (mod \; N), y \equiv us \; (mod \; N) \; ve \; ry - sx = N$ veya,
b) $x \equiv -ur \; (mod \; N), y \equiv -us \; (mod \; N) \; ve \; ry - sx = -N.$

olur.

Sonuç 1.10.4. (Jones, vd., 1991)

Eğer, $u\bar{u} \equiv 1 \; (mod \; N)$ kongrüans denklemi sağlanırsa, $\mathbf{G}_{u,N}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $\boldsymbol{G}_{-\bar{u},N}$ olarak verilir.

Sonuç 1.10.5. (Jones, vd., 1991)

$\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmiş olması için gerek ve yeter şart $u^2 \equiv -1 \; (mod \; N)$ dir.

Sonuç 1.10.6. (Jones, vd., 1991)

$\mathbf{G}_{u,N}$ en az $\psi(N)$ tane bağlantılı bileşene sahiptir. Eğer $N > 1$ ise $\mathbf{G}_{u,N}$ bağlantılı değildir.

1.11. Farey, $\mathbf{F}_{u,N}$ ve $\mathbf{G}_{u,N}$ Grafları

$\boldsymbol{G}_{1,1}$ grafının köşe kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Sonuç 1.10.5 ten $G_{1,1}$ grafının kendisiyle eşleşmiş olduğu görülür. O halde, $\boldsymbol{G}_{1,1}$ yönlendirilmemiş bir graf olarak alınsın. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri alındığında Teorem 1.10.3 deki kenar şartlarından, komşu olabilmeleri için gerek ve yeter şart $ry - sx = \mp 1$ dir. Örneğin ∞'a komşu olan köşeler tamsayılardır. Γ grubu, köşeler ve kenarlar üzerinde hareketin transitif olduğu, $G_{1,1}$'in otomorfizmalarının bir grubudur. O halde, $Aut\boldsymbol{G}_{1,1}$ (62)'deki $pt - rs = \pm 1$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu $PGL(2,\mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grubu olduğu görülür.

$\boldsymbol{G}_{1,1}$ Farey grafı olarak adlandırılır ve $\boldsymbol{F}$ ile gösterilir. Her $m \geq 1$ tamsayısı için m mertebeli F_m-Farey dizisi, $|y| \leq m$ olmak üzere kesin artan bir şekilde sıralanan bütün $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ rasyonel sayılarından oluşur. Örnek olarak F_4 Farey dizisi aşağıdaki gibidir:

$$F_4 : \cdots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \cdots .$$

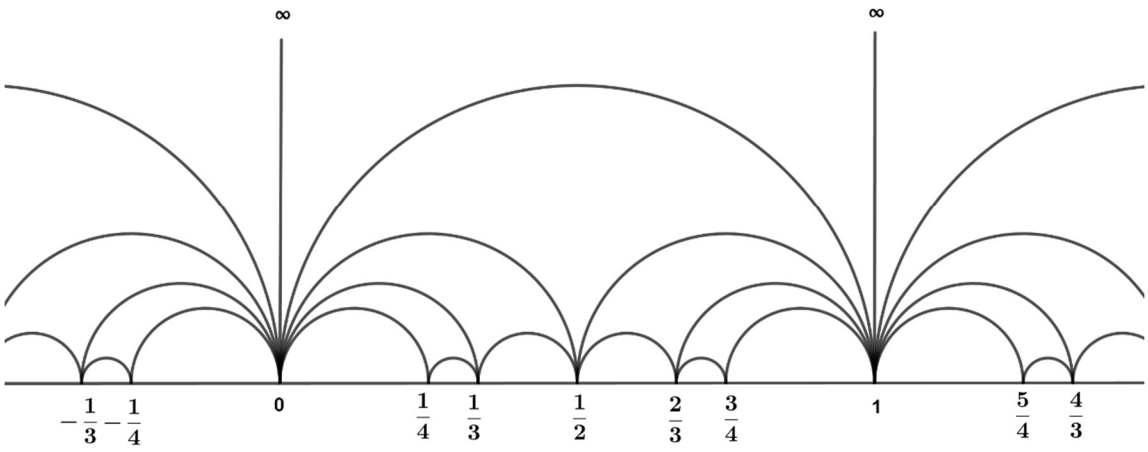
Daha kolay bir gösterim için F_m-Farey dizisinin elemanları $[0,1]$ veya $[-m,m] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralıklarına kısıtlanabilir. Açıkça, $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ve $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ 'dur.

Önerme 1.11.1. (Jones, vd., 1991)

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olmak üzere, aşağıdaki üç koşul denktir;

i. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F'de komşu köşelerdir;
ii. $ry - sx = \pm 1$;
iii. Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F_m de komşu terimlerdir.

Buradan artık F nin basit bir yapısını oluşturmak mümkündür. Her bir terime hemen öncesindeki ve sonrasındaki terimler eklendiğinde, her bir F_m , 2 değerli bir ağaç olur. Önceki önermeden bu ağaçların birleşiminin F nin $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmiş alt graf olduğu söylenir. O halde, ∞ ile işaretlenmiş bir köşe eklenerek ve bu tamsayılar ile birleştirilerek F oluşturulabilir.



Şekil 4. $m = 4$ durumunda $\mathbf{F = G_{1,1}}$ Farey grafı

Şekil 4 de F_4 Farey dizisine karşılık gelen alt yörüngesel graf verilmiştir. Burada kenarların ∞ ile ortak olduğunu veya F_4 ün elemanlarının birleşmesiyle meydana geldiği görülür. Bu örnek 1 periyotlu olup periyodiktir. Yani, $x \to y$ $[0,1]$ aralığında ise $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $x + k \to y + k$ $[k, k+1]$ aralığındadır. Görsel olarak uygunluk için F nin kenarları $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemindeki Öklid yarı-çemberleri veya $\mathbb{R}$'ye dik olan Öklid yarı-doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler olarak alınır. (Anderson James, 2000; Sheets, 2007) Alışıldığı üzere, yarı-doğrular "∞ ile birleşmiş" olarak kabul edilir. (63) ü $\mathbb{H}$ nın hiperbolik izometrilerinin bir grubu olarak, Γ ile bir hareketi tanımlamak için kullanılabilir. Bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece $\mathbb{H}$ daki F gösterimini Γ altında invaryant olduğu görülür.

Sonuç 1.11.2. (Jones, vd., 1991)

F nin kenarları $\mathbb{H}$ da kesişmez.

$F = \mathbf{G}_{1,1}$ in özellikleri kullanılarak, diğer $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarına genişletilmesi incelensin. Her bir $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafı en az $\psi(N)$ tane alt grafın ayrık birleşimidir. Her bir alt grafın köşeleri $ry - sx \equiv 0\ (mod\ N)$ ile tanımlanan $\underset{N}{\approx}$ Γ-invaryant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturur. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan, bu blokları transitif olarak permüte eder. Böylece alt grafların hepsi izomorfiktir.

$\mathbf{F}_{u,N}$, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0\ (mod\ N)\right\}$ bloğundan oluşan $\mathbf{G}_{u,N}$ nin bir alt grafı olarak alınsın. Böylece $\mathbf{G}_{u,N}$, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin $\psi(N)$ tane ayrık kopyasından oluşur. Teorem 1.10.3 ten aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 1.11.3. (Jones, vd., 1991)

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,N}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

a) $x \equiv ur\ (mod\ N)\ ve\ ry - sx = N$ veya,
b) $x \equiv -ur\ (mod\ N)\ ve\ ry - sx = -N$.

Yukarıda incelenen Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif hareketinin genel olarak irdelenmesinden, Γ nın $\mathbf{F}_{u,N}$ yi invaryant bırakan alt grubu, $\approx_N$ için $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde sonuç veren $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubudur. Böylece, $\Gamma_0(N) \leq Aut\mathbf{F}_{u,N}$ dir.

Teorem 1.11.4. (Jones, vd., 1991)

$\Gamma_0(N)$, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

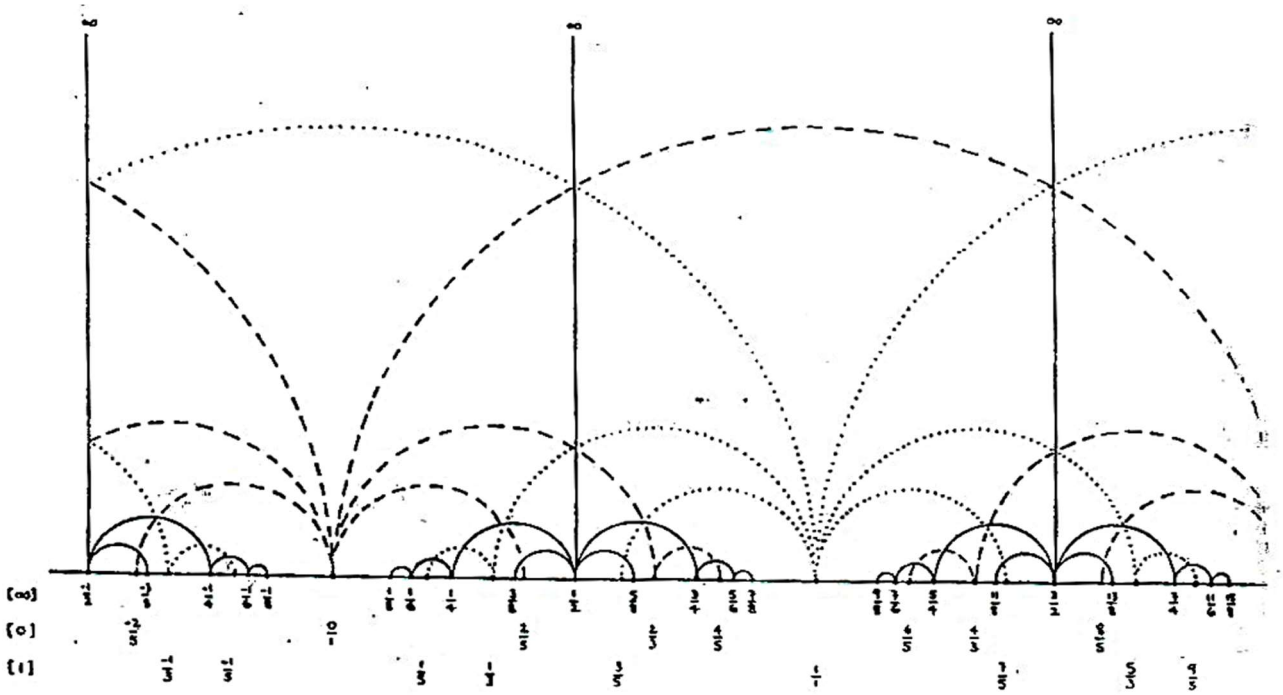
Önerme 1.11.5.

(i) $\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $v \to -v$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,N} \to \mathbf{F}_{-u,N}$ izomorfizmi vardır;
(ii) Eğer $m|N$ ise buradan, $\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $\mathbf{F}_{u,N}$ den bir $\mathbf{F}_{u,M}$ alt grafına, $v \to \frac{Nv}{M}$ ile verilen $\mathbf{F}_{u,N} \to \mathbf{F}_{u,M}$ izomorfizmi vardır.

ii. 'de $M = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 1.11.6. (Jones, vd., 1991)

$\mathbf{F}_{u,N}$ nin bütün v köşeleri için $f: v \to Nv$ ile verilen, $\mathbf{F}_{u,N}$ den bir $\mathbf{F}$ alt grafına, $\mathbf{F}_{u,N} \to \mathbf{F}_{-u,N}$ izomorfizmi vardır.

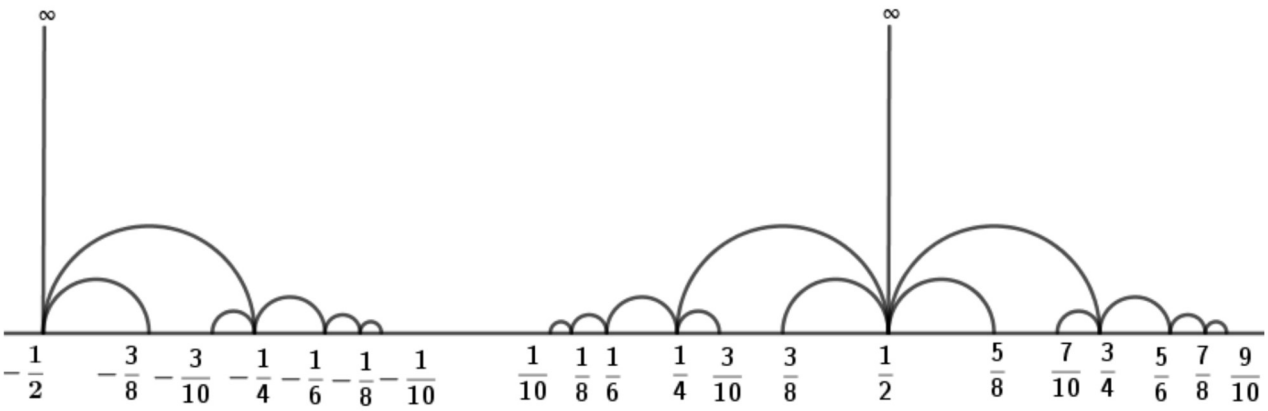


Şekil 5. $\mathbf{G_{1,2}}$ Grafı

Şimdi Şekil 5 de gösterilen $\mathbf{G}_{1,2}$ grafına bakalım. s çift, r çift veya her ikisi tek olmak üzere, $\frac{r}{s} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanlarını içeren, $[\infty], [0]\, ve\, [1]$ bloklarını gösteren sırasıyla kesik olmayan, kesik ve noktalı ($\mathbb{H}$ daki hiperbolik geodezikler ile gösterilen) biçimindeki kenarlar ile $\mathbf{F}_{1,2}$ nin $\psi(2) = 3$ tane izomorfik kopyasından oluşur. $\mathbf{G}_{1,2}$ ve böylece de $\mathbf{G}_{1,2}$ yönlendirilmemiş olduğu görülür.

Şekil 5'te gösterilen bu graf, s çift olmak üzere r/s köşelerine sahiptir:

r/s ve x/y arasında bir kenar vardır $\Leftrightarrow ry - sx = \pm 2$' dir.



Şekil 6. $\mathbf{F_{1,2}}$ grafı

Şimdi $\boldsymbol{F}_{u,N}$ grafındaki devreleri düşünelim. $F = \mathbf{G}_{1,1}$ Farey grafı üçgenler içerirken, $\mathbf{F}_{1,3}$ yönlendirilmiş grafı

$$\infty \to \frac{1}{3} \to \frac{2}{3} \to \infty$$

şeklinde yönlendirilmiş üçgenler içerir.

Teorem 1.11.7. (Jones, vd., 1991)

$\mathbf{F}_{u,N}$ yönlendirilmemiş alt yörüngesel grafının üçgen içermesi için gerek ve yeter şart $u^2 \pm u + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$ dir. Eğer $N > 1$ ise bu takdirde $\mathbf{F}_{u,N}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez.

Kendisiyle eşleşmiş bir $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafı $u^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ N)$'yi sağladığından Teorem 1.11.7 ye göre $N > 1$ için üçgen içermez.

Teorem 1.11.8. (Jones, vd., 1991)

$N > 1$ ise bu durumda tüm kendisiyle eşleşmiş $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel grafları birer ormandır.

Sonuç 1.11.9. (Jones, vd., 1991)

$\mathbf{G}_{1,2}$ bir ormandır.

Sonuç 1.11.10. (Jones, vd., 1991)

Eğer N çift ise $\mathbf{G}_{u,N}$ bir ormandır.

Teorem 1.11.11. (Akbaş, 2001)

$N > 1$ herhangi bir tamsayı olsun. Bu takdirde $\mathbf{G}_{u,N}$ bir ormandır $\Leftrightarrow$ $\mathbf{G}_{u,N}$ üçgen içermez; yani, $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0\ (mod\ N)$.

Sonuç 1.11.12. (Değer, 2011)

$(u, N) = 1$ ise $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0\ \ (mod N), i = 1,2$ olan bir $k_i \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 1.11.13. (Değer, 2011)

$\mathbf{F}_{u,N}$ grafı için $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0\ \ (mod N), i = 1,2$ ve $1 < k_i \leq N$ olsun. Buradan;

i. Sağ ve sol yönlendirme için, $\frac{u}{N}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\frac{u+(-1)^i \frac{1}{k_i}}{N} = \frac{k_i u+(-1)^i}{k_i N}$ ve $\frac{u}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur;

ii. $\frac{u+(-1)^i \frac{1}{k_i}}{N}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\frac{u+(-1)^i \frac{1}{k_i - \frac{1}{k_i}}}{N} = \frac{(k_i^2-1)u+(-1)^i k_i}{(k_i^2-1)N}$ ve $\frac{u+(-1)^i \frac{1}{k_i}}{N}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.

Teorem 1.11.14. (Değer, 2011)

$k_i \in \mathbb{N}$ ve $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0\ \ (mod N), i = 1,2$ olsun. Bu takdirde;

i. $1 < k_i \leq N$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafındaki her yol minimal uzunlukludur;

ii. $k_i = 1$ için $\mathbf{F}_{u,N}$ grafındaki herhangi bir yolun minimal uzunluklu olması gerekmez.

Teorem 1.11.15. (Akbaba, 2016)

$u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2, 1 < k_i \leq N,$ kongrüans bağlantısı verilsin. Bu durumda eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ kendisi ile eşleşmiş ise $k_1 = k_2 = N$, aksi taktirde $k_1 = N - k_2$ olur.

İspat. $1 < k_1, k_2 \leq N$ olduğunda,

$u^2 + k_2 u + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ ve $u^2 - k_1 u + 1 = 0 \ (mod\ N)$

kongrüans denklemlerinden

$$k_2 u + k_1 u \equiv 0 \ (mod\ N)$$

yazılır. $(u, N) = 1$ olduğunda, $k_2 \equiv -k_1 \ (mod N)$ elde edilir. O halde, $k_2 = Ny - k_1$ denklemini sağlayan y tamsayısı vardır. $N > 1$ alındığında, $2 < k_1 + k_2 \leq 2N$ eşitsizliğinden $2 < Ny \leq 2N$ buradan da $\frac{2}{N} < y \leq 2$ yazlılır. Böylece $N > 1$ olduğundan, y tamsayısının değeri 1 ya da 2 olabilir. Diğer taraftan, eğer $\boldsymbol{F}_{u,N}$ kendisi ile eşleşmiş bir graf ise Sonuç 1.10.5 ten

$$u^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$$

elde edilir ve $k_2 u \equiv 0 \ (mod\ N)$ ve $-k_1 u \equiv 0 \ (mod N)$ yazılır. $(u, N) = 1$ ifadesinden

$$k_2 \equiv 0 \ (mod\ N) \text{ ve } -k_1 \equiv 0 \ (mod\ N)$$

olup $k_2 - k_1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ elde edilir. Buradan, $k_2 - k_1 = Nx$ denklemini sağlayan bir x tamsayısı vardır. Eğer $k_2 = k_1 = N$ ise $x = 0$ olduğu görülür. Gerçekten, eğer $1 < k_2, k_1 \leq N$ ise $1 - N < k_2 - k_1 < N - 1$ olup $1 - N < Nx < N - 1$ dir. $N > 1$ olup $|x| < 1 - \frac{1}{N}$ ve buradan da $x = 0$ olmalıdır. Böylece $k_2 = k_1$ olur. Diğer taraftan, eğer graf kendisi ile eşleşmiş bir graf ise $1 < k_2 \leq N$ ve $k_2 u \equiv 0 \ (mod\ N)$ olduğundan $k_2 = N$ olmalıdır. Böylece $k_2 = k_1 = N$ bulunur. Sonuç olarak eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ grafı kendisi ile eşleşmiş ise $y = 2$ olup $k_2 = k_1 = N$ ve aksi taktirde ise $y = 1$ olup $k_1 = N - k_2$ yazılır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Minimal Uzunluklu Yollar

Tanım 2.1.1.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının farklı köşelerinin bir dizisi $v_0, v_1, v_2, \dots, v_j$ şeklinde verilsin. $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_j, j \geq 2$ olduğunda bu ifadeye yönlendirilmiş devre (kapalı yol) adı verilir. Bu ifadede en az bir ok (hepsi değil) geri dönüyorsa, bu yönlendirilmemiş (ters yönlendirilmiş) devre olarak adlandırılır. $j = 2$ alındığında devreye üçgen denir. Bu durumda devrenin yönlendirilmiş ya da yönlendirilmemiş olması önemli değildir. $j = 1$ durumunda ise $v_0 \to v_1 \to v_0$ ifadesi kendine eşleşmiş bir kenar verir. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki bir yol ve bir sonsuz yol kavramları sırasıyla $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_j$ ve $v_0 \to v_1 \to \cdots$ ile ifade edilir.

Tanım 2.1.2.

Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında alınan herhangi iki köşe için yani $\frac{r}{s} \overset{<}{\to} \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,N}$ (ya da $\frac{x}{y} \overset{<}{\leftarrow} \frac{r}{s} \in \mathbf{F}_{u,N}$) olduğunda kenar olma şartlarını sağlayan bu köşeler için en uzak köşe kavramı $\frac{r}{s}$ köşesinin gittiği $\frac{x}{y}$ den daha büyük değere sahip hiçbir köşe olmaması demektir.

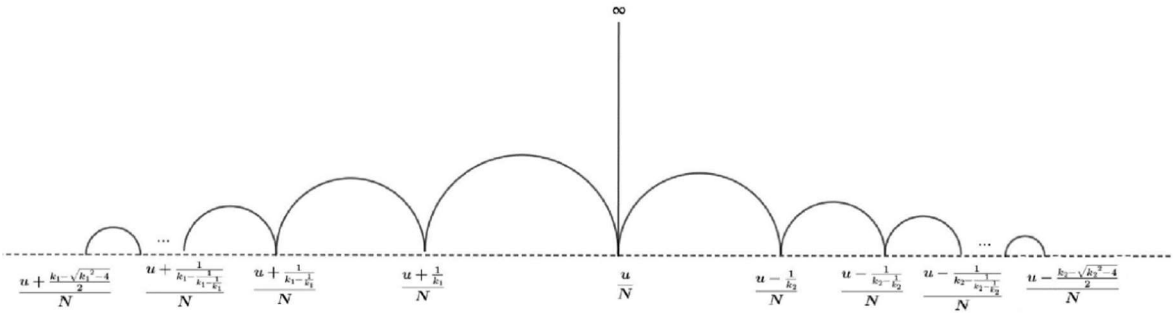
Tanım 2.1.3.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında alınan $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_J$ yolu minimal uzunlukludur :⇔ $i < l - 1, i \in \{0,1,2,3, \dots, j-2\}, j \in \{2,3, \dots, j\}$ olmak üzere $v_i \nleftrightarrow v_m$ ve v_{i+1}, bu grafta v_i köşesinin gittiği en uzak köşedir.

Tanım 2.1.4.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafı hiçbir devre içermezse orman adı verilir. Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ boş olmayan, bağlantılı, devre içermeyen bir grafsa ağaç olarak adlandırılır.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yollar bağlantılı ve devre içermediklerinden birer ağaçtır. Buradan itibaren $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki bir $\frac{r}{s}$ köşesi $\binom{r}{s}$ matrisi ile temsil edilecektir. $\varphi_i = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+(-1)^i k_i u+1}{N} \\ -N & u+(-1)^i k_i \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $i = 1,2$ dönüşümü alınsın. $(u,N) = 1$ olmak üzere $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2$ kongrüans bağıntısının varlığı Sonuç 1.11.12 'de söylendi. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında φ_i, $i = 1,2$ dönüşümü sağ ve sol yönlendirme için minimal uzunluklu sonsuz yoldaki köşeleri birbirine bağlayan dönüşümdür. Eğer $\begin{pmatrix} u+(-1)^i \frac{x}{y} \\ N \end{pmatrix}$, $i = 1,2$, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki bir köşe ise, o zaman bu köşenin bağlanacağı en uzak köşe, $\varphi_i \begin{pmatrix} u+(-1)^i \frac{y}{k_i y - x} \\ N \end{pmatrix}$, $i = 1,2$ olur. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\binom{1}{0}$ ile bağlanan başlangıç köşesi $v_0 = \binom{u}{N}$ olmak üzere, $v_n = {\varphi_i}^n(v_0)$, $i = 1,2$, $n \in \boldsymbol{Z}^+$ olur. Burada, v_n, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki n. köşe olarak alınır. Eğer, $i = 1$ ise yönlendirme sol tarafadır ve n. köşe $\overleftarrow{v_n}$ ile temsil edilir. $i = 2$, durumunda ise yönlendirme sağ tarafadır ve n. köşe $\overrightarrow{v_n}$ ile temsil edilir. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki köşeler her iki yön için de aşağıdaki gibidir;



Şekil 7. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki köşeler

Sonuç 2.1.5.

Eğer $u^2 - u + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ ise $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında $\frac{1}{0} \leftarrow \frac{u-1}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0}$ şeklinde bir üçgen vardır.

Sonuç 2.1.6.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında sol ve sağ yönlendirme için, minimal uzunluklu yoldaki köşelerin kümesi sırası ile $i = 1,2$ olacak şekilde aşağıdaki şekilde verilir;

$$M_i := \cup_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{u+(-1)^i S_n(0)}{N} : S_n = s_0 s_1 s_2 \dots s_n,\ s_0(z) = z, s_n(z) := s(z) = \frac{-1}{-k_i+z} \right\} \cup \{\infty\}$$

Sonuç 2.1.7.

$M_i,\ i = 1,2$ kümesinden, $k_i = 2$ alındığında, s Möbiüs dönüşümü parabolik, $k_i > 2$ durumunda ise s dönüşümü hiperboliktir. Böylece, $\varphi_i\ \Gamma_0(N)$ dönüşümünün bir elemanıdır aynı zamanda $k_i = 0$ ve $k_i = 1$ olduğunda, φ_i sırasıyla 2. ve 3. dereceden eliptik elemandır.

Sürekli kesirler, Möbiüs dönüşümlerinin bir dizisi ile ifade edilebilir. M_i kümesindeki köşeler de sürekli kesir yapısı içerdiğinden, bu kesirler Möbiüs dönüşümlerinin böyle bir dizisi ile verilir.

$a_n = -1,\ b_n = -k_i\ n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\ ve\ i = 1,2$ olacak şekilde, $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{-k_i}\right)$ sürekli kesiri verilsin. M_i kümesinden, $S_n(z) = s^n(z)$ olmak üzere;

$$S_1(z) = \frac{-1}{-k_i + z}, S_2(z) = \frac{-1}{-k_i + \frac{-1}{-k_i + z}}, S_3(z) = \frac{-1}{-k_i + \frac{-1}{-k_i + \frac{-1}{-k_i + z}}}, \cdots$$

yazılır. O halde, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki her iki yönlendirme için $n.$ köşe

$$\frac{u + (-1)^i S_n(0)}{N} = \frac{u + (-1)^i \frac{C_n}{D_n}}{N} = \frac{C_{n+1}u - (-1)^i C_n}{C_{n+1}N}, \qquad i = 1,2 \tag{72}$$

ile verilir.

Sonuç 2.1.8.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki sağ ve sol yönlendirme için $k_i \geq 2$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$C_n = -k_i C_{n+1} - C_{n+2},\ i = 1,2. \tag{73}$$

İspat. $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki her iki yönlendirme için minimal uzunluklu yoldaki n. köşe $\frac{u+(-1)^i\frac{C_n}{D_n}}{N} = \frac{C_{n+1}u-(-1)^i C_n}{C_{n+1}N}$ ile yazıldığından, $\omega\left(\frac{u+(-1)^i\frac{x}{y}}{N}\right) = \frac{u+(-1)^i\frac{y}{k_i y-x}}{N}$ eşitliği kullanılarak $x = C_n$ ve $y = D_n = -C_{n+1}$ olmak üzere bu köşenin gidebileceği en uzak köşe olan $(\mathrm{n}+1)$. köşe

$$\omega\left(\frac{u-(-1)^i\frac{C_n}{C_{n+1}}}{N}\right) = \frac{u+(-1)^i\frac{C_{n+1}}{k_i C_{n+1}+C_n}}{N} = \frac{uk_i C_{n+1} + uC_n + (-1)^i C_{n+1}}{Nk_i C_{n+1} + NC_n}$$

ile verilir. Diğer bir taraftan $(n+1)$. köşe $\frac{C_{n+2}u-(-1)^i C_{n+1}}{C_{n+2}N}$ ile de verilebilir. O halde bu iki ifade eşitlendiğinde, $\forall n \geq 0$ için $C_{n+1} \neq 0, k_i \geq 2$ olacak şekilde,

$$\frac{uk_i C_{n+1} + uC_n + (-1)^i C_{n+1}}{Nk_i C_{n+1} + NC_n} = \frac{C_{n+2}u - (-1)^i C_{n+1}}{C_{n+2}N}$$

$$= uk_i N C_{n+1}C_{n+2} + uNC_n C_{n+2} + (-1)^i N C_{n+1}C_{n+2}$$

$$= uk_i N C_{n+1}C_{n+2} + uNC_n C_{n+2} - (-1)^i N k_i (C_{n+1})^2 - (-1)^i N C_n C_{n+1}$$

ifadelerinden, $C_n = -k_i C_{n+1} - C_{n+2},\ i = 1,2.$ olur.

Teorem 2.1.9.

Eğer $k_i = 2$ ise $C_n = (-1)^n n$ ve eğer $k_i > 2$ ise aşağıdaki eşitlik verilir;

$$C_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^{n} \left(k_i + \sqrt{k_i^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k_i - \sqrt{k_i^2 - 4}\right)^{t-1}. \tag{74}$$

İspat. $C_n = -k_i C_{n+1} - C_{n+2}$ yinelenme bağıntısı biliniyor. $k_i = 2$ için $C_n + 2C_{n+1} + C_{n+2} = 0$ yinelenme bağıntısı elde edilir. Bu yinelenme bağıntısının karakteristik denklemi incelendiğinde, $t = -1$ olan tek bir köke sahip $t^2 + 2t + 1 = 0$ denklemi bulunur. O halde, $C_n + 2C_{n+1} + C_{n+2} = 0$ yinelenme bağıntısının bir çözümü

$$C_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^n \tag{75}$$

ile yazılır. Buradan, $C_0 = \alpha = 0$, $C_1 = -\alpha - \beta = -1$ olur. $\alpha = 0$ *ve* $\beta = 1$ olur. Böylece bulunanlar denklemde yerine yazıldığında, $C_n = (-1)^n n$ elde edilir. Şimdi $k_i > 2$ durumu için $C_n + k_i C_{n-1} - C_{n-2} = 0$ yinelenme bağıntısının çözümü incelensin. Bağıntının karakteristik denklemi $t_1 = \frac{-k_i + \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}$ *ve* $t_2 = \frac{-k_i - \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}$ olacak şekilde iki farklı gerçel köke sahip $t^2 + 2t + 1 = 0$ denklemidir. Bu halde $C_n + k_i C_{n-1} - C_{n-2} = 0$ denkleminin çözümü

$$C_n = \alpha \left(\frac{-k_i + \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{-k_i - \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}\right)^n \tag{76}$$

şeklindedir. O halde,

$$C_0 = \alpha + \beta = 0,\ C_1 = \alpha\left(-k_i + \sqrt{{k_i}^2 - 4}\right) + \beta\left(-k_i - \sqrt{{k_i}^2 - 4}\right) = -2$$

elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse, $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{{k_i}^2 - 4}}$ ve $\beta = \frac{1}{\sqrt{{k_i}^2 - 4}}$ bulunur. Bulunanlar $C_n = \alpha \left(\frac{-k_i + \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{-k_i - \sqrt{{k_i}^2 - 4}}{2}\right)^n$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$C_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{k_i^2-4}}\left[\left(k_i+\sqrt{{k_i}^2-4}\right)^n - \left(k_i-\sqrt{{k_i}^2-4}\right)^n\right]$$

elde edilir. Ayrıca, $\left(k_i+\sqrt{{k_i}^2-4}\right)^n - \left(k_i-\sqrt{{k_i}^2-4}\right)^n$ yerine

$2\sqrt{{k_i}^2-4}\sum_{t=1}^{n}\left(k_i+\sqrt{k_i^2-4}\right)^{n-t}\left(k_i-\sqrt{{k_i}^2-4}\right)^{t-1}$ yazılırsa,

$$C_n = (-1)^n 2^{1-n}\sum_{t=1}^{n}\left(k_i+\sqrt{k_i^2-4}\right)^{n-t}\left(k_i-\sqrt{k_i^2-4}\right)^{t-1}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.10.

$u^2+(-1)^i k_i u+1 \equiv 0\ (mod N),\ i=1,2$ denkleminde $k_i = 2,$ alındığında, sol ve sağ yönlendirme için sırasıyla, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki $n.$ köşeler aşağıdaki şekilde verilir;

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{(n+1)u-n}{(n+1)N} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{v_n} = \frac{(n+1)u+n}{(n+1)N}. \tag{77}$$

İspat. $C_n = (-1)^n 2^{1-n}\sum_{t=1}^{n}\left(k_i+\sqrt{k_i^2-4}\right)^{n-t}\left(k_i-\sqrt{k_i^2-4}\right)^{t-1}$ ifadesinde $k_i = 2,$ $i = 1,2$ alındığında, $C_n = (-1)^n n$ olur. Böylece, istenilen köşe değeri, $\frac{(-1)^{n+1}(n+1)u+(-1)^i(-1)^n n}{(-1)^{n+1}(n+1)N} = \frac{(n+1)u+(-1)^i n}{(n+1)N}$ elde edilir.

Önerme 2.1.11.

$$\begin{pmatrix} C_{n-1} & C_n \\ -C_n & -C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_i \end{pmatrix}^n \tag{78}$$

yazılır.

2.2. Fibonacci Sayıları ve Alt yörüngesel Graflar Arasındaki İlişki

Bu bölümde $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yolundaki köşeleri ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişki incelendi. Bu ilişki sonuncunda Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bağlantılar elde edildi.

Teorem 2.2.1.

$\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki n. köşeler, sırasıyla sol ve sağ yönlendirme için, $u^2+(-1)^i k_i u+1\equiv 0\ (modN), i=1,2$ kongrüans denkleminde $k_i=3,\ i=1,2$ alındığında, F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\overleftarrow{v_n}=\frac{u-\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}\ \ ve\ \ \overrightarrow{v_n}=\frac{u+\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}. \tag{79}$$

ile verilir.

İspat. $u^2+(-1)^i k_i u+1\equiv 0\ (modN), i=1,2$ denkleminde $k_i=3$ alınsın. Böylece (73) ifadesinden, n ≥ 0 olmak üzere;

$$C_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)=(-1)^n\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$$

$$=2^n\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)-\left[\left(6+2\sqrt{5}\right)^n-\left(6-2\sqrt{5}\right)^n\right]$$

$$=2^n\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)-2^n\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

elde edilir. Fibonacci sayıları için Binet formülleri $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ uygulanırsa,

$$C_n = (-1)^n F_{2n} \tag{80}$$

yazılır. Buradan sağ yönlendirme için, $\mathbf{F}_{u,N}$ altyörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki n. köşesi

$$\vec{v_n} = \frac{C_{n+1}u - C_n}{C_{n+1}N} = \frac{F_{2n} + F_{2n+2}u}{F_{2n+2}N}. \tag{81}$$

ve sol yönlendirme için n. köşesi

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{C_{n+1}u + C_n}{C_{n+1}N} = \frac{uF_{2n+2} - F_{2n}}{F_{2n+2}N} \tag{82}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.2.2.

F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} := S_n \tag{83}$$

olur.

Örnek. $u := 1$ ve $N := 5$ alınsın. O halde, $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ (mod N), i = 1,2$ kongrüans denkleminde, $k_2 = 3$ ve $k_1 = 2$ olarak bulunur. Böylece $\mathbf{F}_{1,5}$ alt yörüngesel grafı için, minimal uzunkuklu yolda $v_0 = 1/5$ başlangıç köşesinin bağlanacağı en uzak köşe sırasıyla sağ ve sol yönlendirme için $\vec{v_1} = \frac{1+\frac{1}{3}}{5} = \frac{4}{15}$ ve $\overleftarrow{v_1} = \frac{1-\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$ köşeleridir. Benzer şkelilde $\vec{v_1} = \frac{4}{15}$ ve $\overleftarrow{v_1} = \frac{1}{10}$ köşelerinin bağlanacağı en uzak köşeler $\vec{v_2} = \frac{1+\frac{1}{3-\frac{1}{3}}}{5} = \frac{1+\frac{3}{8}}{5} = \frac{11}{40}$ ve $\overleftarrow{v_2} = \frac{1-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}{5} = \frac{1-\frac{2}{3}}{5} = \frac{1}{15}$ köşeleridir. Bu yöntemle diğer köşerler de elde edilebilir. Ancak bu köşeler yukarıda verilen formüllerle daha kolay bir şekilde yazılabilir.

$k_2 = 3$ ve $k_1 = 2$ olduğundan köşeleri bulmak için, $\vec{v_n} = \frac{u - \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$ ve $\overleftarrow{v_n} = \frac{1 - \frac{n}{n+1}}{5}$ formülleri kullanılabilir. O halde, $n = 4$ alınıp 4. köşe

$$\vec{v_4} = \frac{1+\frac{1}{3-\frac{1}{3-\frac{1}{3}}}}{5} = \frac{1+S_4(0)}{5} = \frac{1+\frac{F_8}{F_{10}}}{5} = \frac{1+\frac{21}{55}}{5} = \frac{76}{275}$$

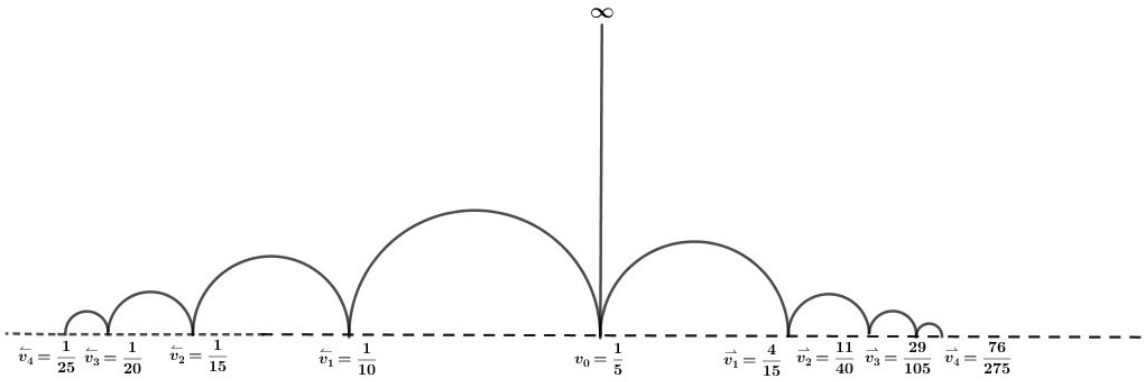
olarak yazılır. Burada F_8 ve F_{10} Fibonacci sayıları da

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n$$

eşitliğinden yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} -F_6 & F_8 \\ -F_8 & F_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} -8 & 21 \\ -21 & 55 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\vec{v_4} = \frac{1+\frac{F_8}{F_{10}}}{5} = \frac{1+\frac{21}{55}}{5} = \frac{76}{275}$ olur. Aynı şekilde sol yönlendirme için de $\overleftarrow{v_n} = \frac{(n+1)u-n}{(n+1)N}$ formülünden 4. köşe $\overleftarrow{v_4} = \frac{(4+1)1-4}{(4+1)5} = \frac{1}{25}$ olarak bulunur.



Şekil 8. $\mathbf{F_{1,5}}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki bazı köşeler

2.3. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Matris Uygulamaları

Bu bölümde, önceki bölümdeki incelemeler sonucu elde edilen özellikler yardımı ile Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni bağıntılar verilmiştir.

Önerme 2.3.1.

L_n, n. Lucas sayısı, $tr[S_n]$, S_n matrisinin izi ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$L_{2n} = (-1)^n tr[S_n]. \tag{84}$$

İspat. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_{n+2} - F_{n-2}$ özdeşliği kullanılarak, $L_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n-2}, n \geq 2$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte, L_{2n} yi $L_{2n} = (-1)^n[(-1)^n F_{2n+2} - (-1)^n F_{2n-2}] = (-1)^n[(-1)^n F_{2n+2} + (-1)^{n-1} F_{2n-2}]$ olarak yazılırsa önermedeki ifade elde edilir.

Teorem 2.3.2.

L_n, n. Lucas sayısı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} L_{2n-2} & (-1)^n L_{2n} \\ (-1)^{n+1} L_{2n} & (-1)^n L_{2n+2} \end{pmatrix} := T_n \tag{85}$$

ve

$$det(T_n) = {L_{2n}}^2 - L_{2n-2} L_{2n+2} = -5 \tag{86}$$

sağlanır.

İspat. İspat için $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$ özdeşliği kullanır. İlk olarak bu özdeşlik $(2n-2)$ için yazılır ve $L_{2n-3} = L_{2n-1} - L_{2n-2}$, $L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$ özdeşlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 5F_{2n-2} &= L_{2n-3} + L_{2n-1} \\ &= -3L_{2n-2} + 2L_{2n} \end{aligned}$$

$$-F_{2n-2} = \frac{3}{5}L_{2n-2} - \frac{2}{5}L_{2n}.$$

elde edilir. Daha sonra aynı özdeşlik $2n$ için yazılır ve $L_{2n-1} = L_{2n+1} - L_{2n}$, $L_{2n+1} = L_{2n+2} - L_{2n}$ özdeşlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 5F_{2n} &= L_{2n-1} + L_{2n+1} \\ &= -3L_{2n} + 2L_{2n+2} \\ F_{2n} &= -\frac{3}{5}L_{2n} + \frac{2}{5}L_{2n+2} \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda $-F_{2n} = \frac{2}{5}L_{2n-2} - \frac{3}{5}L_{2n}$ elde edilir. Son olarak da $2n+2$ için yazılır ve $L_{2n+1} = L_{2n+2} - L_{2n}$, $L_{2n+3} = L_{2n+1} - L_{2n+2}$ özdeşlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 5F_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n+3} \\ &= -2L_{2n} + 3L_{2n+2} \\ F_{2n-2} &= -\frac{2}{5}L_{2n} + \frac{3}{5}L_{2n+2} \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece S_n matrisinin yeni bir formu aşağıdaki şekilde yazılır

$$\begin{aligned} S_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{5}L_{2n-2} - \frac{2}{5}L_{2n} & -\frac{3}{5}L_{2n} + \frac{2}{5}L_{2n+2} \\ \frac{2}{5}L_{2n-2} - \frac{3}{5}L_{2n} & -\frac{2}{5}L_{2n} + \frac{3}{5}L_{2n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}L_{2n-2} & (-1)^n L_{2n} \\ (-1)^{n+1}L_{2n} & (-1)^n L_{2n+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matrisini alalım. Buradan A matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dir. Eğer yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı A^{-1} matrisi ile çarpılırsa, çift indeksli Lucas sayılarını veren T_n matrisi elde edilir. T_n matrisinin determinantı, teoremdeki eşitliğin her iki tarafı için de incelendiğinde, $(-5)1 = (-1)^{n-1}L_{2n-2}(-1)^n L_{2n+2} - (-1)^n(-1)^{n+1}{L_{2n}}^2$ yazılır. Buradan ${L_{2n}}^2 - L_{2n-2}L_{2n+2} = -5$ elde edilir.

Önerme 2.3.3.

F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$5F_{2n} = (-1)^n tr[T_n], n \in \mathbb{Z}^+ \tag{87}$$

sağlanır.

İspat. T_n matrisinin izi incelendiğinde, $tr[T_n] = (-1)^n(-1)L_{2n-2} + (-1)^n L_{2n+2} = (-1)^n[L_{2n+2} - L_{2n-2}] = (-1)^n[L_{2n+1} + L_{2n-1}]$ yazılır. $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$ özdeşliği kullanılarak $5F_{2n} = L_{2n-1} + L_{2n+1}$ elde edilir. Böylece $5F_{2n} = (-1)^n tr[T_n]$ sağlanır.

Sonuç olarak, $\boldsymbol{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşeleri bir matrisin izi ile yazılabilir.

Sonuç 2.3.4.

$i = 1,2$ için, $k_i = 3$ alınırsa, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki indirgenmiş kesir olan n. v_n köşesi, sırasıyla sol ve sağ yönlendirme için aşağıdaki şekilde verilir

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{u+\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N} \; ve \; \overrightarrow{v_n} = \frac{u-\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N}. \tag{88}$$

İspat. Önerme 2.3.3 den $F_{2n} = \frac{(-1)^n}{5} tr[T_n]$ yazılır. Bu eşitlik (79) denkleminde yerine yazılırsa, sonuç sağlanır.

Önerme 2.3.5.

F_n, n. Fibonacci sayısı, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve , $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik verilir

$$P^n = \begin{pmatrix} (-1)^n F_{n-1} & 0 & (-1)^{n+1} F_n \\ 3[(-1)^{n+1} F_{n-2} - 1] & 1 & 3[(-1)^n F_{n-1} - 1] \\ (-1)^{n+1} F_n & 0 & (-1)^n F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{89}$$

İspat. $P^n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ olarak alınsın. İlk önce p_{11} elemanı için tüme varım yöntemini kullanıldığında, $n = 2$ için, $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ve $p_{11} = (-1)^2 F_{2-1} = 1$ olur ve böylece ifadenin doğruluğu görülür. Şimdi $n = k$ için ifadenin doğru olduğu kabul edilir. O halde, $P^k = \begin{pmatrix} (-1)^k F_{k-1} & 0 & (-1)^{k+1} F_k \\ 3[(-1)^{k+1} F_{k-2} - 1] & 1 & 3[(-1)^k F_{k-1} - 1] \\ (-1)^{k+1} F_k & 0 & (-1)^k F_{k+1} \end{pmatrix}$ yazılır. $n = k + 1$ için de ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$P^{k+1} = PP^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k F_{k-1} & 0 & (-1)^{k+1} F_k \\ 3[(-1)^{k+1} F_{k-2} - 1] & 1 & 3[(-1)^k F_{k-1} - 1] \\ (-1)^{k+1} F_k & 0 & (-1)^k F_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} F_k & 0 & * \\ & 1 & * \\ & 0 & * \end{pmatrix}$$

olup, $n = k + 1$ için de doğrudur. Böylece diğer elemanlar için de incelendiğinde, ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.6.

F_n, n. Fibonacci sayısı, $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{k} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$Z^n = \begin{pmatrix} (-1)^n F_{n-1} & 0 & (-1)^{n+1} F_n \\ k[(-1)^{n+1} F_{n-2} - 1] & 1 & k[(-1)^n F_{n-1} - 1] \\ (-1)^{n+1} F_n & 0 & (-1)^n F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{90}$$

İspat. İspat için Z matrisinin diagonal matrisi kullanılır. Çünkü istenilen Z matrisinin $n.$ kuvvetini aşağıdaki denklemle yazılabilir;

$$D^n = (P^{-1}ZP)^n = P^{-1}ZPP^{-1} \cdots P^{-1}ZP = P^{-1}Z^nP \ .$$

Burada, D diagonal matris, P ise matrisin i sütununun, $i.$ öz vektörüdür. Böylece, $Z^n = PD^nP^{-1}$ yazılır. Şimdi Z matrisinin öz vektörleri ve öz değerleri bulunacak. Öz değerler $P_Z(\lambda) = det(\lambda I - Z) = \lambda^3 - 2\lambda + 1$ denkleminden $\lambda_{1,2,3} = 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ olarak bulunur. O halde öz değerler

$$V_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2k}{3-\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2k}{3+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. P ve tersi olan P^{-1} matrisleri aşağıdaki gibidir

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \frac{2k}{3-\sqrt{5}} & \frac{2k}{3+\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -k & 1 & -k \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

D diagonal matrisini ise $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$ ile verilir. Sonuç olarak $\mathbb{Z}^n$ matrisi aşağıdaki şekilde yazılır

$$Z^n = PD^nP^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-1)^n-(\sqrt{5}-5)(-\sqrt{5}-1)^n}{10\ 2^n} & 0 & \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^n-\sqrt{5}(-\sqrt{5}-1)^n}{5\ 2^n} \\ \frac{(\frac{3\sqrt{5}+5}{10})k(\sqrt{5}-1)^n+(\frac{-3\sqrt{5}+5}{10})k(-\sqrt{5}-1)^n}{2^n}-k & 1 & \frac{(\frac{\sqrt{5}+5}{10})k(\sqrt{5}-1)^n+(\frac{-\sqrt{5}+5}{10})k(-\sqrt{5}-1)^n}{2^n} \\ \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^n-\sqrt{5}(-\sqrt{5}-1)^n}{5\ 2^n} & 0 & \frac{(\frac{\sqrt{5}+5}{10})(-\sqrt{5}-1)^n+(\frac{-\sqrt{5}+5}{10})(\sqrt{5}-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Eğer Fibonacci sayılarının Binet formülü kullanılırsa; $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$, Z^n matrisini Fibonacci sayıları ile ifade edebiliriz.

Sıradaki Teorem, Fibonacci ve Lucas sayılarını veren yeni bir matris verir.

Teorem 2.3.7.

F_n, n. Fibonacci sayısı, L_n ise n. Lucas sayısı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$X^n = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} L_{2n-2} & -L_{2n} \\ L_{2n} & -L_{2n+2} \end{pmatrix}, & n \text{ tek ise,} \\ 5^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} -F_{2n-2} & F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n+2} \end{pmatrix}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{91}$$

sağlanır.

İspat. İspat yapılırken tek n tam sayıları ve çift n tam sayıları için tüme varım yöntemi kullanılır. İlk önce tek n tam sayıları incelendiğinde, $n = 1$ durumu için ifadenin doğru olduğu açıktır. $n = k$ için doğruluğu kabul edilip $n = k + 2$ *i*çin incelendiğinde,

$$X^{k+2} = X^k X^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^2$$

$$= 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} L_{2k-2} & -L_{2k} \\ L_{2k} & -L_{2k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -15 & 40 \end{pmatrix}$$

$$= 5^{\frac{k+1}{2}} \begin{pmatrix} L_{2k} & -L_{2k+2} \\ L_{2k+2} & -L_{2k+4} \end{pmatrix}$$

ifadenin doğru olduğu görülür. Aynı şekilde n çift tam sayıları için de incelendiğinde ispat tamamlanır.

2.4. Pell Sayıları ve Alt Yörüngesel Graflar Arasındaki İlişki

Bu bölümde Pell ve Pell-Lucas sayıları ile alt yörüngesel graflardaki minimal uzunluklu yollardaki köşeler arasındaki ilişki incelendi. Daha sonra bu ilişki kullanılarak Pell ve Pell-Lucas sayıları matrisler açısından araştırıldı.

Teorem 2.4.1.

P_n, n. Pell sayısı, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve v_n indirgenmiş kesir olmak üzere, sırasıyla sağ ve sol yönlendirmede, $i = 1,2$ için $k_i = 6$ alındığında $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki köşeler aşağıdaki gibidir:

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{u - \frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}}{N} \quad ve \quad \vec{v_n} = \frac{u + \frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}}{N}. \tag{92}$$

İspat. $k_i = 6$ alalım. Böylece $n \geq 0$ olmak üzere;

$$C_n = (-1)^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\sqrt{8}} [(6 + 2\sqrt{8})^n - (6 - 2\sqrt{8})^n]$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[\frac{(2+\sqrt{8})^{2n}}{2^{2n}} - \frac{(2-\sqrt{8})^{2n}}{2^{2n}} \right]$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2} \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}} \right]$$

elde edilir. Pell sayıları için binet formülleri $P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ uygulanırsa,

$$C_n = \frac{(-1)^n P_{2n}}{2}. \tag{93}$$

bulunur. Buradan sağ yönlendirme için, $\mathbf{F}_{u,N}$ altyörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki n. köşesi

$$\frac{C_{n+1}u - C_n}{C_{n+1}N} = \frac{uP_{2n+2} + P_{2n}}{P_{2n+2}N}. \tag{94}$$

ve sol yönlendirme için n. köşesi

$$\frac{C_{n+1}u + C_n}{C_{n+1}N} = \frac{uP_{2n+2} - P_{2n}}{P_{2n+2}N} \tag{95}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.4.2.

P_n, n. Pell sayısı olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{2}P_{2n-2} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2}P_{2n} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n+2} \end{pmatrix} = V_n \tag{96}$$

olur.

İspat. Sürekli kesirlerin matris bağlantısından,

$$\begin{pmatrix} C_{n-1} & C_n \\ -C_n & -C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_i \end{pmatrix}^n \tag{97}$$

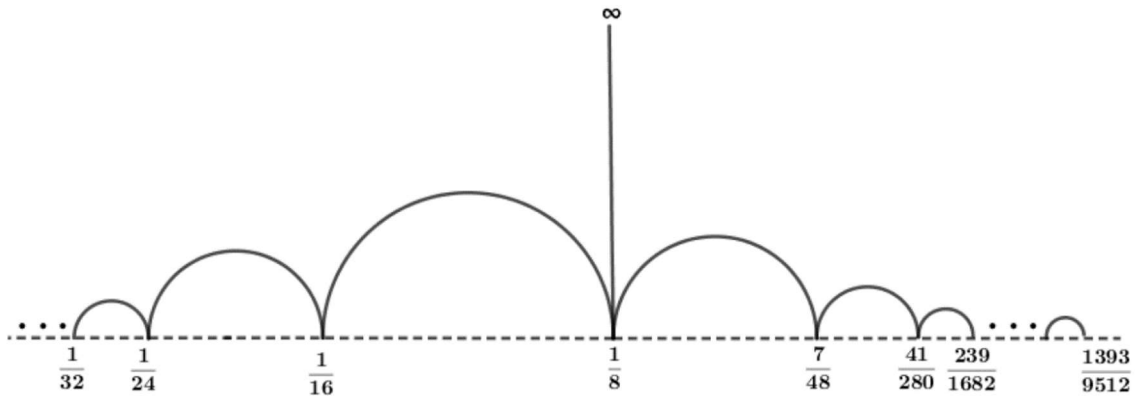
verilir. Diğer taraftan $k_i = 6$ ve $C_n = \frac{(-1)^n P_{2n}}{2}$ olduğundan, $C_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}P_{2n-2}}{2}$ ve $C_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}P_{2n+2}}{2}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{pmatrix} C_{n-1} & C_n \\ -C_n & -C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{2}P_{2n-2} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2}P_{2n} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n \tag{98}$$

elde edilir.

Örnek

Sağ yönlendirme için, $k_2 = 6$ alalım. $u^2 + 6u + 1 \equiv 0 \ (modN)$ kongrüans bağıntısından, $u = 1$ ve $N = 8$ olsun. $\mathbf{F}_{1,8}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşeleri aşağıdaki şekildeki gibidir:



Şekil 9. $\mathbf{F_{1,8}}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşeleri

$$\infty = \frac{1}{0} \to \underbrace{\frac{1}{8}}_{\vec{v}_0} \to \underbrace{\frac{1+\frac{1}{6}}{8}}_{\vec{v}_1} \to \underbrace{\frac{1+\frac{1}{6-\frac{1}{6}}}{8}}_{\vec{v}_2} \to \cdots \to \underbrace{\frac{1+\frac{1}{6-\frac{1}{6-\ddots-\frac{1}{6}}}}{8}}_{\vec{v}_{n-1}} \to \underbrace{\frac{1+\frac{1}{6-\frac{1}{6-\ddots-\frac{1}{6-\frac{1}{6}}}}}{8}}_{\vec{v}_n} \to \cdots.$$

Burada n. köşeyi $\vec{v}_n = \frac{1+\frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}}{8}$ olarak yazılır. Örneğin, $\mathbf{F}_{1,8}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki 5. köşesi elde edilmek istenirse iki metot kullanılabilir. İlk önce genel metot ile $\vec{v}_5 = \frac{1+\frac{1}{6-\frac{1}{6-\frac{1}{6-\frac{1}{6-\frac{1}{6}}}}}}{8}$ yazılır. İkinci olarak da. 5. köşe daha kullanışlı bir yol olan Teoremden kullanılarak bulunabilir. Teoremden $\vec{v}_5 = \frac{1+\frac{P_{10}}{P_{12}}}{8} = \frac{1+\frac{2378}{13860}}{8} = \frac{8119}{55440}$ elde edilir. Aynı zamanda sonuçtan çift indeksli Pell sayılarını kullanarak aşağıdaki matrisi elde edilir:

$$\begin{pmatrix} \frac{P_{16}}{2} & -\frac{P_{18}}{2} \\ \frac{P_{18}}{2} & -\frac{P_{20}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^9.$$

2.5. Pell ve Pell-Lucas Sayı Dizilerinin Matris Uygulamaları

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen çift indeksli Pell sayılarını veren V_n matrisi incelenecektir.

Önerme 2.5.1.

Q_n, n. Pell-Lucas sayısı olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$Q_{2n} = \frac{(-1)^n}{2} tr(V_n), n \in \mathbb{Z}^+ \tag{99}$$

İspat. V_n matrisinin izi incelendiğinde $tr(V_n) = \frac{(-1)^n}{2}[P_{2n+2} - P_{2n-2}]$ elde edilir. Pell sayılarının yinelenme bağıntısından $P_{2n+2} = 2P_{2n+1} + P_{2n}$ ve $P_{2n} = 2P_{2n-1} + P_{2n-2}$ yazılır. Bu eşitlikleri $tr(V_n)$ yi veren denklemde yerlerine yazılırsa,

$$tr(V_n) = \frac{(-1)^n}{2}[2P_{2n+1} + P_{2n} - P_{2n} + 2P_{2n-1}] = \frac{(-1)^n}{2} 2\ [P_{2n+1} + P_{2n-1}]$$

elde edilir. Daha sonra, $P_{n+1} + P_{n-1} = 2Q_n$ özdeşliği kullanılarak $tr(V_n) = (-1)^n 2\ Q_{2n}$ yazılır.

Teorem 2.5.2.

Q_n, n. Pell-Lucas sayısı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^{n-1} Q_{2n-2} & 2(-1)^n Q_{2n} \\ 2(-1)^{n+1} Q_{2n} & 2(-1)^n Q_{2n+2} \end{pmatrix} = W_n \tag{100}$$

İspat. İspat için temel olarak $4P_n = Q_{n+1} + Q_{n-1}$ özdeşliği kullanılacaktır. İlk olarak bu özdeşlik $2n-2$ için yazılıp, $Q_{2n} = 2Q_{2n-1} + Q_{2n-2}$, $Q_{2n+1} = 2Q_{2n} + Q_{2n-1}$, $Q_{2n-1} = 2Q_{2n-2} + Q_{2n-3}$ özdeşlikleri kullanılırsa,

$$4P_{2n-2} = Q_{2n-1} + Q_{2n-3}$$

$$= -3Q_{2n-2} + Q_{2n}$$

$$-Q_{2n-2} = \frac{3}{4}Q_{2n-2} - \frac{1}{4}Q_{2n}.$$

yazılır. Daha sonra aynı özdeşlik $2n$ için yazılır ve $Q_{2n+2} = 2Q_{2n+1} + Q_{2n}$, $Q_{2n+3} = 2Q_{2n+2} + Q_{2n+1}$ özdeşlikleri kullanılırsa,

$$4P_{2n} = Q_{2n+1} + Q_{2n-1}$$

$$= Q_{2n+2} - 3Q_{2n}$$

$$P_{2n} = \frac{3}{4}Q_{2n} + \frac{1}{4}Q_{2n+2}$$

yazılır. Aynı zamanda $-P_{2n} = \frac{1}{4}Q_{2n-2} - \frac{3}{4}Q_{2n}$ eşitliği elde edilir. Son olarak özdeşlik $2n+2$ için yazılır ve $Q_{2n+3} = 2Q_{2n+2} + Q_{2n+1}$, $Q_{2n+2} = 2Q_{2n+1} + Q_{2n}$, özdeşlikleri kullanılırsa,

$$4P_{2n+2} = Q_{2n+3} + Q_{2n+1}$$

$$= 3Q_{2n+2} - 2Q_{2n}$$

$$P_{2n-2} = -\frac{1}{4}Q_{2n} + \frac{3}{4}Q_{2n+2}$$

elde edilir. Bulunan değerler V_n matrisinde yerine yazılırsa, V_n yeni formunda aşağıdaki gibi elde edilir,

$$V_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{2}P_{2n-2} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2}P_{2n} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{4}Q_{2n-2} - \frac{1}{4}Q_{2n} & \frac{3}{4}Q_{2n} + \frac{1}{4}Q_{2n+2} \\ \frac{1}{4}Q_{2n-2} - \frac{3}{4}Q_{2n} & -\frac{1}{4}Q_{2n} + \frac{3}{4}Q_{2n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(-1)^{n-1}Q_{2n-2} & 2(-1)^{n}Q_{2n} \\ 2(-1)^{n+1}Q_{2n} & 2(-1)^{n}Q_{2n+2} \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$ alınırsa, A matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ olarak yazılır. Eğer yukarıdaki denklemin her iki tarafını A^{-1} matrisi ile çarparsak, çift indisli Pell-Lucas sayılarını veren W_n matrisini elde ederiz.

Önerme 2.5.3.

P_n, n. Pell sayısı olmak üzere,

$$P_{2n} = \frac{(-1)^n}{16} tr(W_n), n \in \mathbb{Z}^+. \tag{101}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. W_n matrisinin izi incelenirse, $tr(W_n) = 2(-1)^{n-1}Q_{2n-2} + 2(-1)^{n}Q_{2n+2}$ yazılır. Pell-Lucas sayılarının yinelenme bağıntısından, eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa, $tr(W_n) = 2(-1)^{n-1}(-2)[Q_{2n+1} + Q_{2n-1}]$ $elde$ edilir. $Q_{n+1} + Q_{n-1} = 4P_n$ özdeşliği de kullanılarak $P_{2n} = \frac{(-1)^n}{16} tr(W_n)$ sağlanır.

Böylece, $k_i = 6$ için alt yörüngesel grafların minimal uzunluklu yoldaki köşeleri özel bir matrisin izi ile de yazılır.

Sonuç 2.5.4.

$i = 1,2$ için, $k_i = 6$ alınırsa, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yodaki indirgenmiş kesir olan n. v_n köşesi, sırasıyla sol ve sağ yönlendirme için aşağıdaki şekilde verilir,

$$\overleftarrow{v_n} = \frac{u + \frac{tr[W_n]}{tr[W_{n+1}]}}{N} \quad ve \quad \overrightarrow{v_n} = \frac{u - \frac{tr[W_n]}{tr[W_{n+1}]}}{N}.. \tag{102}$$

İspat. Önerme 2.5.3 ten $P_{2n} = \frac{(-1)^n}{16} tr(W_n)$ yazılır. Böylece bu denklem (92) denkleminde yerine yazılırsa, durum ispatlanmış olur.

Teorem 2.5.5.

P_n, n. Pell sayısı, Q_n, n. Pell-Lucas sayısı, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik verilir,

$$Z^n = \begin{pmatrix} (-1)^n P_{n-1} & 0 & (-1)^{n+1} P_n \\ \frac{k}{2}[(-1)^{n+1} Q_{n-1} - 1] & 1 & \frac{k}{2}[(-1)^n Q_n - 1] \\ (-1)^{n+1} P_n & 0 & (-1)^n P_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{103}$$

İspat. Z matrisinin $n.$ kuvvetini elde etmek için diyagonal matrisi incelenir. D, Z nin diagonal matrisi olmak üzere aşağıdaki eşitlik verilir,

$$D^n = (P^{-1} Z P)^n = P^{-1} Z P P^{-1} \cdots P^{-1} Z P = P^{-1} Z^n P.$$

P matrisi ise $i.$ sütunu $i.$ özvektör olan matristir. Böylece $Z^n = P D^n P^{-1}.$ yazılır. Z matrisinin özdeğer ve özvektörleri bulunursa,

$$\mathrm{P_Z}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{Z}) = \lambda^3 - 2\lambda + 1,$$

denkleminden, özdeğerler $\lambda_{1,2,3} = 1, -\sqrt{2} - 1, -1 + \sqrt{2}$ ve özvektörler

$$V_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ k\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. P matrisi ve tersi olan P^{-1} matrsileri

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2}\\ 1 & k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) & k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ve \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{k}{2} & 1 & -\frac{k}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}+2}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{-\sqrt{2}+2}{4}\end{pmatrix}$$

ile verilir. Böylece, diagonal matris $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2}-1 & 0\\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ olur. Sonuç olarak, Z^n matrisi aşağıdaki gibi yazılır,

$$Z^n = PD^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)^n-(\sqrt{2}-2)(-\sqrt{2}-1)^n}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-1)^n}{4}\\ \frac{(\sqrt{2}+1)k(\sqrt{2}-1)^n-(\sqrt{2}-1)k(-\sqrt{2}-1)^n}{4}-\frac{k}{2} & 1 & \frac{k(\sqrt{2}-1)^n-k(-\sqrt{2}-1)^n}{4}-\frac{k}{2}\\ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-1)^n}{4} & 0 & \frac{(-\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)^n+(-\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)^n}{4}\end{pmatrix}.$$

Eğer, Pell ve Pell-Lucas sayılarının $\gamma=1+\sqrt{2}\ ve\ \delta=1-\sqrt{2}$ olacak şekilde $P_n=\frac{\gamma^n-\delta^n}{\gamma-\delta}$, $Q_n=\frac{\gamma^n+\delta^n}{2}$ Binet formülleri kullanılırsa, Z^n matrisi Pell ve Pell-Lucas sayıları ile verilir.

Teorem 2.5.6.

P_n, n. Pell sayısı, Q_n, n. Pell-Lucas sayısı, $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $V_L=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & -17\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$V_L^n=\begin{cases}2^{\frac{3}{2}n-1}\begin{pmatrix}-P_{2n-2} & P_{2n}\\ -P_{2n} & P_{2n+2}\end{pmatrix} & eğer\ n\ çift\ ise,\\ 2^{\frac{3}{2}(n-1)}\begin{pmatrix}Q_{2n-2} & -Q_{2n}\\ Q_{2n} & -Q_{2n+2}\end{pmatrix} & eğer\ n\ tek\ ise\end{cases}. \tag{104}$$

İspat. İspat için tümevarım yöntemi kullanılır. İlk önce tek n değerleri için durum incelenir. $n=1$ için ifade doğrudur. $n=k$ için doğruluğu kabul edilip, $n=k+2$ için de doğru olduğu gösterilmelidir. O halde,

$$V_L^{k+2} = V_L^k V_L^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -17 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -17 \end{pmatrix}^2$$

$$= 2^{\frac{3}{2}(k-1)} \begin{pmatrix} Q_{2k-2} & -Q_{2k} \\ Q_{2k} & -Q_{2k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 48 \\ -48 & 280 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}(k+1)} \begin{pmatrix} Q_{2k+2} & -Q_{2k+4} \\ Q_{2k+4} & -Q_{2k+6} \end{pmatrix}$$

yazılır. Böylece ifade bütün n değerleri için doğru olduğu görülür. Aynı şekilde çift n değerlei için de benzer şekilde tüme varım yöntemi uygulanırsa ispat tamamlanır.

2.6. Üreteç Fonksiyonlar

Sağ yönlendirme için $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki köşeler aşağıdaki şekilde verilir;

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{N} \longrightarrow \frac{u+\frac{1}{k_2}}{N} \longrightarrow \frac{u+\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2}}}{N} \longrightarrow \frac{u+\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2}}}}{N} \longrightarrow \cdots.$$

Burada, $\vec{v}_0 = \frac{u}{N}$, $\vec{v}_1 = \frac{u+\frac{1}{k_2}}{N}$, $\vec{v}_2 = \frac{u+\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2}}}{N}, \cdots$ olur. Her köşenin bir sürekli kesir belirttiği açıktır ki, bu sürekli kesir $\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2-\ddots}}}$ şeklindedir. Bu sürekli kesrin n. değeri $\frac{G_n}{G_{n+1}}$ ile yazılırsa, burada G_n değeri $G_1 = 1, G_2 = k_2$, $n \geq 3$ olacak şekilde, yeni bir yinelenme bağıntısı ile tanımlanır;

$$G_n = k_2 G_{n-1} - G_{n-2}.$$

Bu yinelenme bağıntısı

$$G_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}}\left[\left(k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4}\right)^n - \left(k_2 - \sqrt{{k_2}^2 - 4}\right)^n\right].$$

şeklinde de verilir.

Önerme 2.6.1.

$G_1 = 1$, $G_2 = k$, $n \geq 3$, olmak üzere $G_n = k_2 G_{n-1} - G_{n-2}$ yinelenme bağıntısının üreteç fonksiyonu,

$$a(x) = \frac{1}{1 - k_2 x + x^2}. \tag{105}$$

yazılır. Böylece,

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}} \sum_0^\infty \left[\left(\frac{2}{k_2 - \sqrt{{k_2}^2 - 4}}\right)^n - \left(\frac{2}{k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4}}\right)^n\right] x^n \tag{106}$$

elde edilir.

İspat. $G_1 = 1$, $G_2 = k$, $n \geq 3$, olmak üzere $G_n = kG_{n-1} - G_{n-2}$ yinelenme bağıntısı için üreteç fonksiyonu yazılırsa,

$$a(x) = G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \ldots + G_n x^n + \cdots$$

$$k_2 x a(x) = k_2 G_0 x + k_2 G_1 x^2 + \ldots + k_2 G_{n-1} x^n + k_2 G_n x^{n+1} + \cdots$$

$$x^2 a(x) = G_0 x^2 + \ldots + G_{n-2} x^n + G_{n-1} x^{n+1} + G_n x^{n+2} + \cdots$$

$$\begin{aligned} a(x) - k_2 x a(x) + x^2 a &= G_0 + (G_1 - k_2 G_0)x + (G_2 - k_2 G_1 + G_0)x^2 + \cdots + (G_n - k_2 G_{n-1} \\ &\quad + G_{n-2})x^n + \cdots = 1 \end{aligned}$$

$$a(x) = \frac{1}{1 - k_2 x + x^2}$$

elde edilir. Eğer $\Delta = t^2 - 4$ alarak $a(x) = \frac{1}{1-k_2 x+x^2}$ fonksiyonu parçalı kesirlerin toplamı şeklinde yazılırsa,

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}} \frac{1}{x - \frac{k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}} \frac{1}{x - \frac{k_2 - \sqrt{{k_2}^2 - 4}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2-4}} \left[\frac{-1}{1-\frac{2x}{k_2+\sqrt{{k_2}^2-4}}} + \frac{1}{1-\frac{2x}{k_2-\sqrt{{k_2}^2-4}}} \right]$$

sağlanır. $\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n$ denklemi kullanılırsa, üreteç fonksiyonu

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{k_2 - \sqrt{{k_2}^2 - 4}} \right)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4}} \right)^n x^n \right].$$

$$= \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 - 4}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{k_2 - \sqrt{{k_2}^2 - 4}} \right)^n - \left(\frac{2}{k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4}} \right)^n \right] x^n$$

olarak bulunur.

Teorem 2.6.2.

F_n $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, $a(x)$ üreteç fonksiyonunda $k = 3$ alınırsa, aşağıdaki ifade sağlanır

$$a(x) = \frac{1}{1 - 3x + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2} x^n \tag{107}$$

İspat. Önerme 2.6.1'den $k = 3$ alınırsa, $a(x) = \frac{1}{1-3x+x^2}$ yazılır. Eğer $a(\mathrm{x}) = \frac{1}{1-3\mathrm{x}+\mathrm{x}^2}$ fonksiyonu kısmi kesirlerin toplamı olarak yazılırsa,

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \frac{x}{1-3x+x^2} + \frac{1-x}{1-3x+x^2}$$

olur. $\frac{1-x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n$ ve $\frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}x^n$$

olarak yazılır. Eğer Fibonacci sayılarının yinelenme bağıntısı kullanılırsa $a(x) = \frac{1}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n$ elde edilir.

Teorem 2.6.3.

P_n $n.$ Pell sayısı olmak üzere, $a(x)$ üreteç fonksiyonunda $k = 6$ alınırsa, aşağıdaki ifade sağlanır

$$a(x) = \frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}x^n \tag{108}$$

İspat. Önerme 2.6.1 de $k = 6$ alınırsa, $a(x) = \frac{1}{1-6x+x^2}$ yazılır. Eğer $a(x) = \frac{1}{1-6x+x^2}$ fonksiyonu kısmi kesirlerin toplamı olarak yazılırsa,

$$\frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{2}\left(3\frac{2x}{1-3x+x^2} + 2\frac{1-3x}{1-3x+x^2}\right)$$

olur. $\frac{2x^2}{1-6x^2+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}x^{2n}$ ve $\frac{1-3x^2}{1-6x^2+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}x^{2n}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3P_{2n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2Q_{2n}x^n\right)$$

olarak yazılır. Eğer $2Q_n + 3P_n = P_{n+2}$ özdeşliği kullanılırsa $a(x) = \frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}x^n$ elde edilir.

Sonuç 2.6.4.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, $\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $|x| < \frac{1}{\alpha^2}$ ile verilir.

İspat. Kuvvet serilerinin oran testi ve $lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ eşitliği kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{F_{2n+4}x^{n+1}}{F_{2n+2}x^n} \right| = |x| \frac{F_{2n+4}}{F_{2n+2}} = |x|\alpha^2$$

yazılır. O halde serinin yakınsak olması için yukarıdaki ifade 1 den küçük olmalı. Yani $|x| < \frac{1}{\alpha^2}$ dir.

Sonuç 2.6.5.

$\gamma = 1 + \sqrt{2}$ olmak üzere, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $|x| < \frac{1}{\gamma^2}$ ile verilir.

İspat. Kuvvet serilerinin oran testi ve $lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \gamma$ eşitliği kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{P_{2n+4}x^{n+1}}{P_{2n+2}x^n} \right| = |x| \frac{P_{2n+4}}{P_{2n+2}} = |x|\gamma^2$$

yazılır. O halde serinin yakınsak olması için yukarıdaki ifade 1 den küçük olmalı. Yani $|x| < \frac{1}{\gamma^2}$ dir.

2.7. En Kısa Yoldaki Köşelerin Bulunmasının Uygulaması

Bu bölümde, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yolundaki köşeleri veren bir algoritma verilecek. Bu algoritma yardımı ile sağ ve sol yönlendirme için istenilen $n.$ köşe ve köşelerin yaklaştığı değer kolay bir şekilde bulunabilir. Bu algoritma aşağıdaki şekilde

verilir:

Input: $u, N, step \in \mathbb{N}$
if $(u, N) = 1$ **then**
  $k_1 \leftarrow 1;$
  $k_2 \leftarrow 1;$
  if $(u^2 + 1) \mod N = 0$ **then**
    $k_1 \leftarrow N;$
    $k_2 \leftarrow N;$
  else
    for $i \in [2, N]$ **do**
      if $((u^2 + 1) + i * u) \mod N = 0$ **then**
        $k_2 \leftarrow i;$
      end
      if $((u^2 + 1) - i * u) \mod N = 0$ **then**
        $k_1 \leftarrow i;$
      end
    end
  end
  $\overleftarrow{V} \leftarrow \{\frac{u}{N}\};$
  if $k_1 = 1$ **then**
    $\overleftarrow{V} \leftarrow \overleftarrow{V} \cup \{\frac{u-1}{N}\}$
  else
    for $n \in [1, step]$ **do**
      if $k_1 = 2$ **then**
        $\overleftarrow{V} \leftarrow \overleftarrow{V} \cup \left\{\frac{(n+1)u-n}{(n+1)N}\right\}$
      else
        $A_0 \leftarrow (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^{n} \left(k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4}\right)^{t-1};$
        $A_1 \leftarrow (-1)^{n+1} 2^{-n} \sum_{t=1}^{n+1} \left(k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4}\right)^{n+1-t} \left(k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4}\right)^{t-1};$
        $\overleftarrow{V} \leftarrow \overleftarrow{V} \cup \left\{\frac{u}{N}\left(1 + \frac{A_0}{A_1 u}\right)\right\}$
      end
    end
  end
  $\overrightarrow{V} \leftarrow \{...\};$
  $\overleftarrow{V} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{u - \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2-4}}{2}}{N};$
  $\overrightarrow{V} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{u + \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2-4}}{2}}{N};$
end

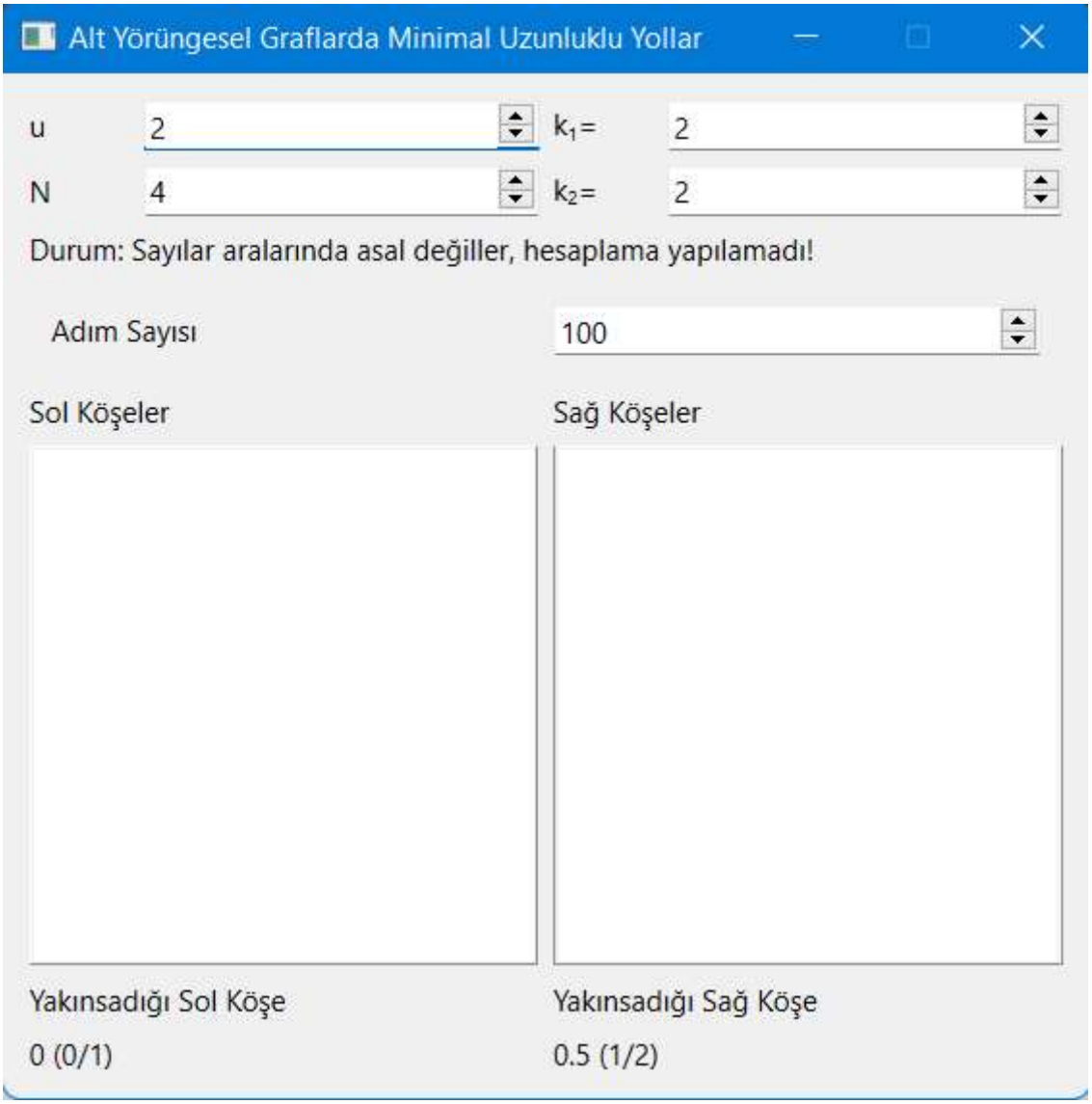
Şekil 10. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafının minimal uzunluklu yol köşelerini veren algoritma

Aynı zamanda, aşağıdaki link ise kullanıcılara bu algoritmayı kullanan bir program sunar;

https://www4.ktu.edu.tr/matematik-program

Bu programın kullanıldığı örnekler aşağıdaki gibidir:

Örnek: $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $u = 2, N = 4$ alınsın. $(u, N) \neq 1$ olup, böyle bir grafın mümkün olmadığı bilinir. Verilen programda ise görünüm aşağıdaki gibidir:

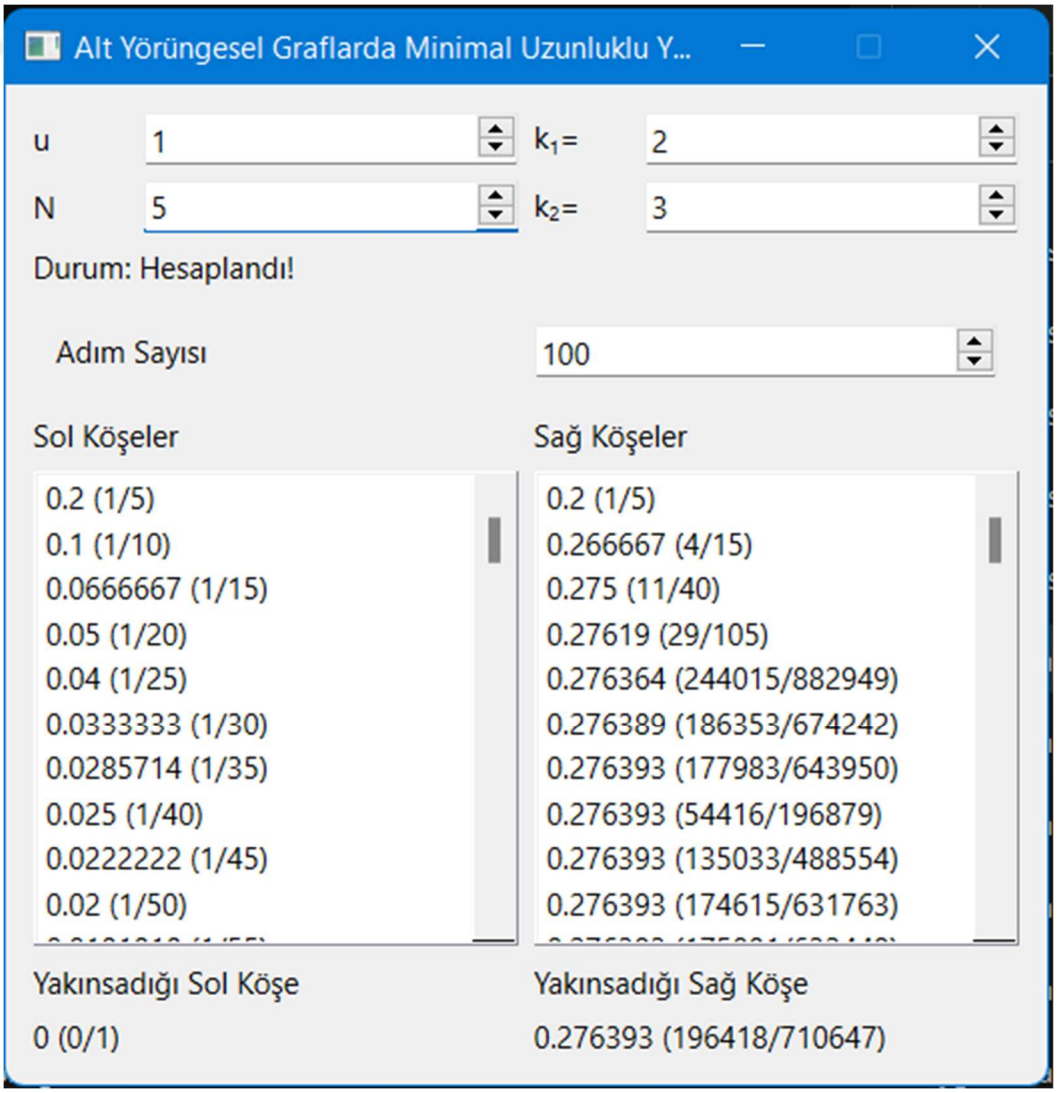


Örnek: $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $u = 1, N = 5, , (u, N) = 1$ olsun. Böylece Sonuç 1.11.13 den $k_1 = 2$, k_2=3 yazılır. Bu grafdaki sağ ve sol yönlendirme için bazı köşeler aşağıdaki gibi verilir:

$$\overleftarrow{v_1} = \frac{1}{10}, \ \overleftarrow{v_2} = \frac{1}{15}, \ \overleftarrow{v_3} = \frac{1}{10}, \ \overleftarrow{v_4} = \frac{1}{20}, \ldots$$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{4}{15}, \ \overrightarrow{v_2} = \frac{11}{40}, \ \overrightarrow{v_3} = \frac{29}{105}, \ \overrightarrow{v_4} = \frac{76}{275}, \ldots .$$

Aynı zamanda programdaki görüntüsü ise aşağıdaki gibidir:



3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki minimal uzunluklu yoldaki sağ ve sol yönlendirme için $k_i \geq 2$ olmak üzere $C_n = -k_i C_{n-1} - C_{n-2},\ i = 1,2$ yinelenme bağıntısının sağlandığı gösterildi. (Sonu. 2.1.8)

2) Eğer $k_i = 2$ ise $C_n = (-1)^n n$ ve eğer $k_i > 2$ ise $C_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^{n} \left(k_i + \sqrt{k_i^2 - 4}\right)^{n-t} \left(k_i - \sqrt{k_i^2 - 4}\right)^{t-1}$ eşitliği verildi. (Teorem 2.1.9.)

3) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki sağ ve sol yönlendirme için köşeler $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0\ (mod N), i = 1,2$ denkleminde $k_i = 2,\ i = 1,2$ durumunda $\overleftarrow{v_n} = \frac{(n+1)u-n}{(n+1)N}$ ve $\overrightarrow{v_n} = \frac{(n+1)u+n}{(n+1)N}$ şeklinde olduğu verildi. (Teorem 2.1.10.)

4) $\begin{pmatrix} C_{n-1} & C_n \\ -C_n & -C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_i \end{pmatrix}^n$ ifadesi bulundu. (Önerme 2.1.11.)

5) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında $\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{N}}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki n. köşelerin sırasıyla sol ve sağ yönlendirme için, $\mathrm{u}^2 + (-1)^{\mathrm{i}} \mathrm{k_i u} + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod N}), \mathrm{i} = 1,2$ kongrüans denkleminde $\mathrm{k_i} = 3,\ \mathrm{i} = 1,2$ alındığında, $\mathrm{F_n}$, n. Fibonacci sayısı olmak üzere, $\overleftarrow{v_n} = \frac{u - \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$ ve $\overrightarrow{v_n} = \frac{u + \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}}{N}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.1)

6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1} F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = S_n$ eşitliği verildi. (Sonuç 2.2.2.)

7) S_n matrisinin izi kullanılarak Lucas sayılarının elde edildiği gösterildi $\mathrm{L_{2n}} = (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{tr}[\mathrm{S_n}]$. (Önerme 2.3.1)

8) Lucas sayılarını veren yeni bir matris elde edildi $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} L_{2n-2} & (-1)^n L_{2n} \\ (-1)^{n+1} L_{2n} & (-1)^n L_{2n+2} \end{pmatrix} = T_n.$ (Teorem 2.3.2.)

9) T_n matrisinin izi ile Fibonacci sayılarının elde edilebileceği gösterildi $5F_{2n} = (-1)^n tr[T_n], n \in \mathbb{Z}^+.$ (Önerme 2.3.3.)

10) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşelerin T_n matrisinin izi ile yazılabileceği gösterildi $\overleftarrow{v_n} = \frac{u+\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N}$ ve $\overrightarrow{v_n} = \frac{u-\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N}$. (Sonuç 2.3.4.)

11) Fibonacci sayılarını veren $3x3$ tipinde ve $2x2$ tipinde yeni matrisler elde edildi. (Teorem 2.3.6. ve Teorem 2.3.7)

12) $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki sağ ve sol yönlendirme için köşelerin Pell sayıları ile yazılabileceği gösterildi; $i = 1,2$ için $k_i = 6$ durumda $\overleftarrow{v_n} = \frac{u-\frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}}{N}$ ve $\overrightarrow{v_n} = \frac{u+\frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}}{N}$. (Teorem 2.4.1.)

13) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{2}P_{2n-2} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2}P_{2n} & \frac{(-1)^n}{2}P_{2n+2} \end{pmatrix} = V_n$ eşitliği elde edildi. (Sonuç 2.4.2.)

14) Pell-Lucas sayılarının V_n matrisinin izi ile yazılabileceği gösterildi; $Q_{2n} = \frac{(-1)^n}{2}tr(V_n), n \in \mathbb{Z}^+$. (Önerme 2.5.1.)

15) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^{n-1}Q_{2n-2} & 2(-1)^nQ_{2n} \\ 2(-1)^{n+1}Q_{2n} & 2(-1)^nQ_{2n+2} \end{pmatrix} = W_n$ eşitliği verildi. (Teorem 2.5.2.)

16) W_n matrisinin izi ile Pell sayılarının elde edilebileceği gösterildi. (Önerme 2.5.3.)

17) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının minimal uzunluklu yoldaki köşelerin W_n matrisinin izi ile yazılabileceği gösterildi $\overleftarrow{v_n} = \frac{u+\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N}$ ve $\overrightarrow{v_n} = \frac{u-\frac{tr[T_n]}{tr[T_{n+1}]}}{N}$. (Sonu. 2.5.4.)

18) Pell sayılarını veren $3x3$ tipinde ve $2x2$ tipinde yeni matrisler elde edildi. (Teorem 2.5.5 ve Teorem 2.5.6)

19) $\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2-\frac{1}{k_2-\ddots}}}$ sürekli kesri ile yeni bir yinelenme bağıntısı oluşturuldu ve bu yinelenme bağıntısının sonuçları incelenerek $a(x) = \frac{1}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+2}x^n$ ve $a(x) = \frac{1}{1-6x+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}x^n$ eşitlikleri elde edildi. (Teorem 2.6.2. ve Teorem 2.6.3.)

20) En kısa yoldaki köşeleri veren algoritma oluşturuldu.

4. ÖNERİLER

1) $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafında minimal uzunluklu yoldaki köşeleri elde etmek için kullanılan $u^2 + (-1)^i k_i u + 1 \equiv 0 \ \ (mod N), i = 1,2$ kongrüans denklemindeki k_i değerinin $2,3,6$ değerleri dışındaki değerleri incelenip, başka tam sayı dizileri ile ilişkilendirilebilir.
2) Γ grubunun $\Gamma_0(N)$ dışındaki alt gruplarıyla oluşturulan alt yörüngesel graflar için minimal uzunluklu yollar incelenebilir.
3) Alt yörüngesel graflardaki köşe ve kenar şartları yardımıyla başka yollar tanımlanabilir.
4) Bu çalışmadan elde edilen Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas sayı dizilerini veren matrisler yardımıyla bu tam sayı dizilerinin başka özellikleri incelenebilir.
5) Bulunan matrislerin kodlama teorisindeki uygulamaları araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Akbaba, Ü. 2016. $\Gamma_0(N)$ grubunun alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu imprimitif hareket, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akbas M.,2001. On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc. 33, 647-652.

Anderson James W., 2000. Hyperbolic Geometry, Springer-Verlay.

Basin SL., 1967. The Appearance of Fibonacci Numbers and the Q Matrix in Electrical Network Theory, Mathematics Magazine, 36, 2, 84-97.

Bicknell, M., 1975. A primer on the Pell sequence and Related Sequences, Fibonacci Quartely 13, 4, 345–349.

Biggs, N., Lloyd, E. ve Wilson, R., 1986. Graph Theory, Oxford University Press.

Cox, D. A. ve Parry , W. R., 1984. Genera of songruence subgroups in Q-Quaternion algebras, J. Reine Angew. Math. 351, 66-112.

Cummins, C. J. ve Pauli S.,2003. Congruence subgroups of PSL (2, Z) of genus less than or equal to 24, Experimental mathematics, 12,2, 243-255.

Cuyt A., Petersen VB., Verdonk B., Waadeland H., ve Jones WB., 2008. Handbook of Continued Fractions for Special Functions, Springer, New York.

Değer, A.H., 2011. $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\widehat{\mathbb{Q}}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon

Deger A.H., Besenk M.,ve Guler B.O., 2011. On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions, Applied Mathematics And Computation, 218, 3, 746-750

Deger AH., 2017. Relationships with the Fibonacci Nnumbers and the Special Vertices of the Suborbital Graphs, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 7, 168-180.

Deger AH., 2017. Vertices of Paths of Minimal Lengths on Suborbital Graphs, Filomat, 31, 4, 913-923.

Dennin, Jr., J. B., 1971. Fields of modular functions of genus 0. Illinois J. Math. 15 442-455.

Dennin, Jr., J. B., 1972. Subfields of *K(2n)* of genus *0.* Illinois J. Math. 16, 502-518.

Dennin, Jr., J. B., 1974. The genus of subfields of *K(pn).* Illinois J. Math. 18, 246-264.

Ercolano J., 1979. Matrix Generator of Pell Sequence, Fibonacci Quarterly17,1, 71-77.

Guler, B.O., Besenk M., Deger A.H. ve Kader S., 2011. Elliptic Elements And Circuits In Suborbital Graphs, Hacet. J. Math. Stat., 40,2, 203-210.

Guler, B.O., Besenk, M.,Kesicioglu Y. ve Deger, A.H., 2015. Suborbital Graphs for The Group Γ^2, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44, 1033-1044.

Güler, B.Ö., Kader S. ve Besenk M., 2019. On Congruence Equations Arising from Suborbital Graphs, Turkish Journal of Mathematics, 43,2396-2404.

Hoggatt Jr, V. E., ve I. D. Ruggles. 1963. A Primer for the Fibonacci Numbers—Part IV, The Fibonacci Quarterly, 1,4, 39-45.

Hoggatt Jr, V. E. 1971. some special fibonacci and lucas generating functions. The Fibonacci Quarterly 9,2, 121-133.

Horadam, A. F., 1971. Pell identities, Fibonacci Quartely, 9,3, 245–252.

Hui, Y.H. 2003. Genus of congruence subgroups of the modular group, Master's Thesis, National University of Singapure, Singapure.

Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., 1991. The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Series, 160, 316-338.

Kader, S., ve Guler, B.O., 2011. On Conjugacy of Elliptic Elements and Circuits in Suborbital Graphs of Congruence Subgroups, Kuwait Journal of Science & Engineering, 38, 43-53.

Kader, S., ve Guler, B.O., 2013. On Suborbital Graphs for the Extended Modular Group (Gamma)over-cap, Graphs and Combinatorics, 29, 1813-1825.

King CH., 1960. Some Properties of the Fibonacci Numbers, Master's Thesis, San Jose State College, San Jose, California.

Knopp, M. 1. ve. Newman, M., 1965. Congruence subgroups of positive genus in the modular group, Illinois J Math 9 , 577-583.

Koshy T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-İnterscience Publication, New York.

Koshy T., 2014. Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, Springer, New York.

Kushwaha S. ve Sarma R., 2018. Continued Fractions Arising From $\mathcal{F}_{1,3}$,

The Ramanujan Journal, 46, 605–631.

McQuillan, D. L., 1966. some results on the linear fractional group. Illinois J. Math.,10, 24-38.

McQuillan. D. L., 1966. On the genus of fields of elliptic modular functions. Illinois J. Math. 10, 479-487.

Moore, S., 1983. Fibonacci Matrices, Mathematical Gazette, 67, 56–57.

Prajapat S., Jain A. ve Thakur RS., 2012. A Novel Approach for Information Security with AVK Using Fibonacci Q-Matri, International Journal of Computer-Communication Technology, 3,3, 54-57.

Ruohonen,K., 2008. Graph Theory, Tampere University of Technology.

Sarma R., Kushwaha S. ve Krishnan R., 2015. Continued Fractions Arising From $F_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154, 179-200.

Sheets C.L., 2007. Hyperbolic Geometry, University of Nebrask-Lincoln.

Shimura, G., 1971. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions (Vol. 1), Princeton university press.

Sims C.C., 1967. Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Zeitschr., 95, 76-86.

Stakhov AP., 2005. Fibonacci Matrices, a Generalization of the "Cassini formula", and a New Coding Theory, Chaos, Solitons-Fractals, 30, 56-66.

Thompson, J. G., 1980. A finiteness theorem for subgroups of PSL(2,lR) which are commensurable with PSL(2, Z), In Santa Cruz Conference on Finite Groups, Amer. Math. Soc. 533-555.

ÖZGEÇMİŞ

Ümmügülsün AKBABA, İlk öğrenimini İnönü İlkokulunda, orta öğrenimini Kültür Eğitim Ortaokulunda ve lise öğrenimini Erzurum Nenehatun Kız Lisesinde tamamladı.

2012 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.

2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimini "$\Gamma_0(N)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki Minimal Uzunluklu İmprimitif Hareket" başlıklı tezi ile tamamladı. 2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

2016 yılında TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt içi Doktora Bursu almaya hak kazanmış ve doktora eğitimi boyunca TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Tez konusu kapsamında yayınlanan bilimsel eserler şunlardır:

Akbaba, Ü., Değer, A.H., Tuylu, T. 2018, On some connections between suborbital graphs and special sequences, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 10, 134-143.

Akbaba, Ü. ve Değer, A.H., 2020. The Generating functions for special pringsheim continued fractions, Communications in Advanced Mathematical Sciences, 3(2), 74-81.

Akbaba, Ü. ve Değer A.H., 2022. Relation between matrices and the suborbital graphs by the special number sequences, Turkish Journal of Mathematics, 46, 3, 753-767.