5.1 TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARI SIFIR YAPAN (KÖK) DEĞERLERİNİN HESABI

Eğer $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon; x gibi bir bağımsız değişkenin farklı dereceden terim ve fonksiyonlarını birlikte içerecek şekilde bir yapıya sahip ise; böyle fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyonlar denmektedir. Tek değişkenli bir fonksiyonun bütün terimleri; sadece x bağımsız değişkenin farklı tam sayı dereceden kuvvetlerini içerecek özellikte bir yapıya sahip ise, böyle fonksiyonlara polinom denmektedir. Bu durumuyla polinomlar; tek bağımsız değişkenli fonksiyonların özel bir hali olmaktadır.

Bu yapıdaki fonksiyonlarda; $y = f(x)$ bağımlı değişkenin değerini sıfır yapan, *“ $f(x) = 0$ bu şekline denklem denmektedir”,* x bağımsız değişkenin x_i değerlerini hesaplamaya, tek değişkenli fonksiyonları sıfır yapan değerlerin hesabı veya kısaca; köklerinin hesaplanması denir. Tek değişkenli fonksiyonların köklerini hesaplamada birçok çözüm yöntemleri bulunmaktadır. Bu iteratif çözüm yöntemleri genel yapıdaki fonksiyonların köklerini hesaplamada kullanılabileceği gibi, aynı zamanda polinomların da köklerini hesaplamada kullanılabilen genel yöntemler olmaktadır. Polinomlar, özel yapıdaki fonksiyonlar olduklarından, sadece bunların köklerini hesaplama kullanılan çeşitli yöntemler mevcuttur. Buna göre; her iki durumla ilgili yöntemler özellikleri gereği iki ayrı başlık altında ele alınmışlardır.

Birinci grupta ele alınanlar; istenen sonuçlara iteratif çözüm yoluyla yaklaşan, “iteratif çözüm yöntemleri” yada diğer adıyla “*Doğrusal olmayan denklemlerin köklerinin hesaplanması*” yöntemleri, bir diğerlerinde ise; iteratif olmayan direkt çözüm veren yöntemler yada “*Polinomların köklerinin hesaplanması*” şeklindedir.

5.1.1 **DOĞRUSAL OLMAYAN TEK DEĞİŞKENLİ(** *NON-LİNEER* **) FONKSİYONLARIN KÖKLERİNİN HESAPLANMASI**

Matematikte bir değişkenin farklı derecen terimlerinden oluşan; birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden, polinomlarını sıfır yapan değerleri, yada diğer bir ifade ile *köklerini*, doğrudan özel hesaplama yöntemleri kullanılarak kolayca hesaplanabilmesine rağmen, her bir terimi bir değişken, üstel, logaritmik ya da trigonometrik fonksiyonlar gibi farklı ifadelerden oluşan genel yapıdaki fonksiyonların kökleri bu gibi yollarla hesaplamak olanaksızdır. Bu gibi fonksiyonlar için çoğu zaman özel çözüm yöntemleri kullanılarak aranan gerçek kök değerlerine iteratif bir şekilde kademeli olarak ulaşılır.

Fonksiyonları sıfır yapan, veya denklemlerin herhangi bir alanda köklerini hesaplamaya yarayan bu özel çözüm yöntemleri genel özellikleri itibariyle bazı farklılıklar gösterirler. Bu farklılıkların başında, aranan gerçek kök değerine yaklaşım yolları ve hızları gelmektedir. Bu amaçla kullanılan çözüm yöntemlerinden bir veya birkaçı; gerçek kök değerine, kökün tanımlı olduğu alanda, apsis ekseni üzerinde bulunduğu aralığın her seferinde ikiye bölünmesi şeklinde iteratıf olarak yaklaşırken, bir çoğu bu alanda tanımlanan herhangi bir konumdaki yardımcı bir doğru yada ikinci derece gibi düşük dereceden bir polinomu kullanarak aranan kök değerine bunlar yardımıyla kademeli olarak yaklaşılması prensibine dayanmaktadır. Aralığı ikiye bölme yada yardımcı doğruları kullanarak yapılan çözümlerden bir fonksiyonun daima reel kök değerleri hesaplanmasına karşılık, ikinci veya düşük dereceden polinomları kullanarak yapılacak çözümlerden; reel kök değerleri yanında, sanal kök değerleri de hesaplanabilmektedir.

Çözüm yöntemlerinin bu gibi farklı esaslara göre geliştirilmiş olması, aynı zamanda her birinin farklı özelliklere sahip olmasına neden olmaktadır. Bu durum, herhangi birini kullanarak bir fonksiyonu sıfır yapan gerçek kök değerlerini hesaplamadaki iterasyon sayısını da farklı şekillerde etkilemektedir.

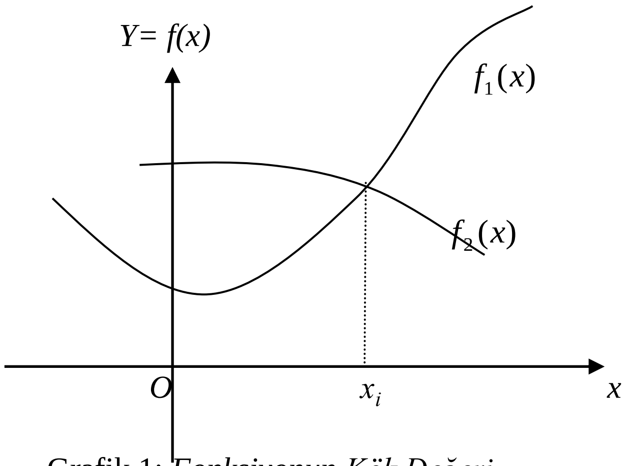
Benzer şekilde; iterasyon sayısını etkileyen bir başka neden de fonksiyonun çözüm bölgesindeki eğriliği ve genel karakteri olmaktadır. Bu etkenlerin, denklemlerin gerçek kök değerlerini hesaplama işlemleri üzerindeki olumsuz yansımaları, iterasyon sayılarını artırdığı gibi bazı durumlarda yakınsamayıp, ıraksak olmalarına da neden olmaktadır. Bazı yöntemler için yakınsamanın daha hızlı olması, değişik ek önlerler alınarak sağlanabilmesine rağmen, bir yöntemin ıraksaklığı değişik seçenekler kullanılarak giderilebilir. Iraksaklık sorununu gidermedeki seçeneklerden biri; başlangıçta çözüm aralığını küçük seçmek olabileceği gibi, sorunun bu yolla ortadan kaldırılamaması halinde; bir başka çözüm yönteminin denenmesi yoluna gidilir.

Bu şekilde; herhangi bir $f(x)=0$ fonksiyonunu sıfır yapan x_i kök değerlerinin iteratif yolla çözümü için, her zaman aranan kök değerinin bulunduğu bölgede bir $[x_a, x_b]$ aralığına; yada $x_a \le x_0 \le x_b$ özelliğine sahip, x_0 gibi bir ilk yaklaşık kök veya başlangıç değerine ihtiyaç vardır. Bu değerler; çoğu zaman problemle birlikte verilmelerine rağmen, verilmemiş oldukları zaman; doğrudan fonksiyonların yada çözüm algoritmasında kullanılan iterasyon fonksiyonlarının grafik gösterimlerinden çizimsel olarak geometrik bir şekilde belirlenebilirler.

Kesin kök değerleri, ilk iterasyon adımında bu yaklaşık kök değerleri kullanılarak yapılan işlemlerden elde edilen yeni sonuçların, bir sonraki iterasyon adımında yaklaşık değerler kabul edilerek, yapılan ardı sıra çözüm işlemlerinden iteratif olarak hesaplanır. İterasyonun sonuçlarının yakınsadığı adımda *"bir önceki adım sonucunda elde edilen değerlerin bir sonraki adımdan elde edilen değerlerden farkı sıfır yada daha önceden belirlenmiş; kabul edilebilir bir sınır değerinden küçük olduğunda"* hesaplama işlemleri durdurularak en son adımdan elde edilen değer aranan kök değerleri olarak alınır.

5.1.1.1 Grafik Çözüm Yöntemi

Bu yöntemde; $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonun köklerini bulmak için, isminden de anlaşıldığı gibi grafik çözümden faydalanılmaktadır. Bu amaçla; akla ilk gelen çözüm yolu; fonksiyonun, x bağımsız değişkene belli değerler vererek, fonksiyonun alacağı değerleri hesapladıktan sonra, bu değerlere göre bir kartezyen sistemde grafiğini çizmektir. Sonra; $f(x)$ eğrisin, x-ekseninin kestiği noktanın apsis değerleri aranan çözüm olarak, bu grafikten elde edilmektedir. Bu çözümde, $f(x)$ eğrisinin apsis eksenini kestiği noktayı bulmak oldukça zor bir işlemdir. Bunun yerine bir diğer yol, $f(x)$ fonksiyonu $f_1(x) - f_2(x) = 0$ şeklinde $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ gibi iki bileşen fonksiyon şeklinde düşünülerek, alt bileşen fonksiyonlarına ayrılır. Sonra, bunların her birinin seçilen bir kartezyen koordinat sisteminde grafikleri çizilir. Grafik 1.

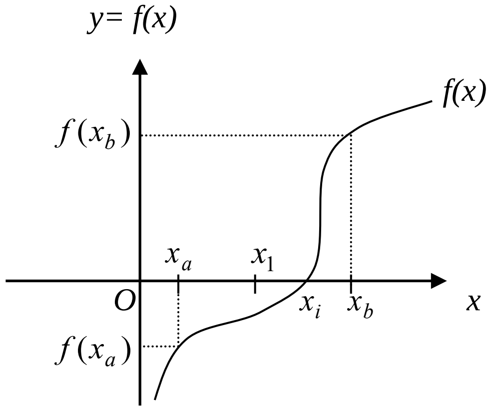


Grafik 1: *Fonksiyonun Kök Değeri*

Buradan, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ eğrilerinin kesişin noktasının x_i apsisi aranan çözüm olmaktadır.Yapılan işlemlerden de anlaşılacağı gibi, bu çözüm yolu grafik olduğundan, yaklaşık değer vermektedir. Bu haliyle, grafik yöntem ancak, daha çok diğer iteratif yöntemleri için gerekli olan başlangıç veya yaklaşık kök değerlerinin hesaplanmasında kullanılır bir yöntem olmaktadır.

5.1.1.2 Çözüm Aralığını İkiye Bölme Yöntemi

Çözüm aralığını ikiye bölme *(Bisection method)* yönteminde; *f(x)* gibi bir fonksiyonu $[x_a, x_b]$ aralığında her zaman *f(x)=0* yapan bir değer bulunabilmektedir. Bunu için gerekli koşul; $f(x_a)f(x_b) \leq 0$ ya da $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ değerlerinin zıt işaretli olma özelliğinin daima gerçekleşmesidir. Ancak, bu yöntemde ne var ki; her seferinde yaklaşık kök değerlerinin tanımlandığı aralığı ikiye bölmenin eşit aralıkta olması halinde yöntem fonksiyonun eğriliğine bağlı olarak yakınsamaktadır. Eğrinin eğriliği fazla ise geç, aksı halde erken yakınsamaktadır.



Grafik 2: *Kök Değerine Yaklaşma*

Burada görüldüğü gibi; çözüm aralığını ikiye bölme yöntemi doğrusal olmayan denklemlerin köklerini hesaplamada kullanılan diğer yöntemler gibi iteratif bir çözüm yöntemi olup adım, adım uygulanır. Bu amaçla, ilk işlem adımında; $x_a < x_i < x_b$ çözüm aralığının sınır değerleri için $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ fonksiyon değerleri hesaplanarak $f(x_a)f(x_b) \leq 0$ koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Eğer bu koşul sağlanmış ise, o zaman $x_a < x_i < x_b$ aralığında $f(x_i) = 0$ sıfır yapacak x_i gibi bir kök bulunacaktır. Birinci iterasyon adımında kök için yaklaşık bir değer; kökün bulunduğu aralığı ikiye bölmek suretiyle;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2}$$

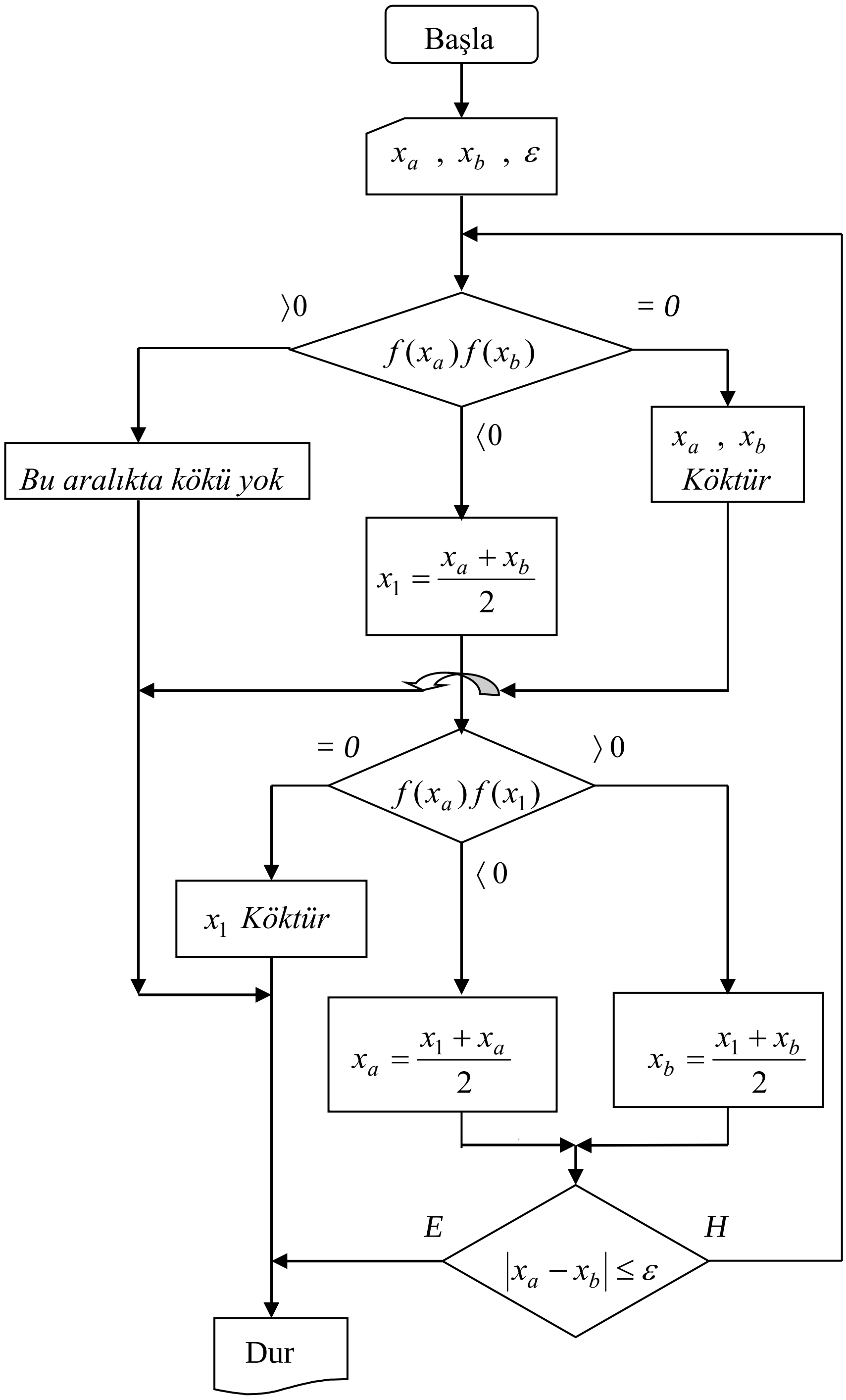
olarak hesaplanır.

Buradan hesaplanan x_1 değeri *f(x)* fonksiyonunda x ‘in yerine yazılarak $f(x_1)$ fonksiyon değeri hesaplanır. Daha sonra gerçek kökün hangi sınırlar arasında bulunduğunu belirlemek için, $f(x_1)$, $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ değerlerinden işaretçe zıt olan birbirine yakın ikisi seçilir. Eğer; $f(x_a)f(x_1) \leq 0$ ise; gerçek kök $x_a < x_i < x_1$ sınırlarının belirlediği aralıkta, $f(x_1)f(x_b) \leq 0$ ise; gerçek kökün $x_1 \langle\; x_i \;\langle\; x_b$ sınırlarının belirlediği aralıkta olduğuna karar verilir. Yukarıdaki fonksiyon grafiğinin çiziminden de görüldüğü gibi; $f(x_1)f(x_b) \leq 0$ olduğundan, bundan sonraki iterasyon adımında gerçek kökün $x_1 \langle\; x_i \;\langle\; x_b$ aralığında aranması gerekmektedir. Birinci adımdaki işlemlere benzer şekilde; ikinci iterasyon adımında da $x_1 \langle\; x_i \;\langle\; x_b$ aralığı, önce

$$x_2 = \frac{x_1 + x_b}{2}$$

şeklinde ikiye bölünerek gerçek köke bir adım daha yaklaşılır. Yine, gerçek kökün hangi sınırların belirlediği aralıkta olduğuna karar verebilmek için, $f(x_2)$ fonksiyon değeri hesaplanarak, $f(x_2)$, $f(x_1)$ ve $f(x_b)$ zıt işaretli ve birbirine yakın değerde olan ikisi seçilerek, gerçek kök bu aralıkta aranır. Benzer şekilde eğer; $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ ise; gerçek kök $x_1 \langle\; x_i \;\langle\; x_2$ sınırlarının belirlediği aralıkta, $f(x_2)f(x_b) \leq 0$ ise; gerçek kökün $x_2 \langle\; x_i \;\langle\; x_b$ sınırlarının belirlediği aralıkta olduğuna karar verilir. Bunlardan istenen koşulu sağlayanı seçilerek daha sonra amaçlanan sonuca ulaşıncaya kadar iterasyon işlemlerine benzer adımlarda devam edilir.

Bu yöntemle bir neticeye ulaşmada iteratif bir çözüm gerektiğinden, ilk adımdaki başlangıç değerlerinin seçimine ve eğrinin eğriliğinin durumuna bağlı olarak, ardı sıra yapılacak işlemler de fazla sayıda olacaktır. Bu gibi durumlarda uygun olanı, çözüm için bilgisayarları kullanmaktır. Bilgisayarların kullanılması ile istenen sonuca kısa zamanda ulaşılabilir. Böyle bir çözümdeki işlem algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.



Diyagram 1: *Algoritma Çözümü*

Örnek 1; $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunu $[1, 2]$ aralığında sıfır yapan köklerinden birini, çözüm aralığını ikiye bölme yöntemiyle, $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1: önce bu fonksiyonun $x_a = 1$ alt sınırı için değeri; *f(1)=-1* ve $x_a = 2$ üst sınırı için değeri de; *f(2)=5* olarak hesaplanır. Birinci adım için ;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

ve fonksiyon değeri de,

$$f(1.5) = 1.5^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$

olarak hesaplanır.

Buradan; $f(x_a)(x_1) \langle\ 0$ olduğundan aranan gerçek kök *(1,1.5)* sınırları arasındadır denir. İkici adım da gerçek kök, benzer şekilde işlemler yapılarak, bu aralıkta aranır. Bunu için;

$$x_2 = \frac{x_a + x_1}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

ve

$$f(1.25) = 1.25^3 - 1.25 - 1 = -0.297$$

$$f(x_2)(x_1) \langle\ 0$$

hesaplanır. Buna göre de; gerçek kökün (1.25,15) sınırlarının belirlediği aralıkta olur. Üçüncü adımda;

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1.5+1.25}{2} = 1.375$$

hesaplanarak; $x_{i+1} - x_i \le 0.05$ oluncaya kadar iterasyon işlemlerine devam edilir.

Bu işlemler; sistematik olarak topluca bir arada gösterilmek istenirse; aşağıdaki tablo düzenlenebilir.

x_a	x_b	$x = \frac{x_a + x_b}{2}$	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x)$
1	*2*	*1.5*	*-1*	*5*	*0.875*
1	*1.5*	*1.25*	*-1*	*0.875*	*-0.297*
1.25	*1.5*	*1.375*	*-0.297*	*0.875*	*0.225*
1.25	*1.375*	*1.3125*	*-0.297*	*0.225*	*-0.052*
1.3125	*1.375*	***1.34375***	*-0.052*	*0.225*	*0.083*
1.3125	*1.34375*	*1.328125*	*-0.052*	*0.083*	*0.015*
1.3125	*1.328125*	*1.3203*	*-0.052*	*0.015*	*-0.019*

Tablo 1: *İteratif Çözüm*

Tablodan görüldüğü gibi; her iterasyon adımında çözüm aralığını ikiye bölerek elde edilen yaklaşık kök değerleri diğer kök değerleri ile birlikte verilen fonksiyonda yerine yazılarak her biriyle ilgili fonksiyon değerleri hesaplanır. Bu fonksiyon değerlerinden $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ koşulunu sağlayan mutlak değerce en küçük olanlarına karşılık gelen x apsis değerleri seçilerek gerçek kök değerinin bu sınırlar arasında olduğu dikkate alınarak, bir sonraki adımda sınır değerleri olarak ele alınırlar. Bir sonraki iterasyon adımında bir önceki iterasyonda olduğu gibi aynı işlemler yapılır.

Sonuçta; verilen $x_{i+1} - x_i \leq 0.05$ hata sınırına uygun değer *5*. iterasyon adımından ***x=1.34375*** olarak elde edilir.

Örnek 2: $\sqrt{2} = ?$ kök değerini, çözüm aralığını ikiye bölme yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 2: Bu sayını $\sqrt{2} = x$ ise; her iki tarafın karesi alındığında, $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonu elde edilir. $\sqrt{2} = x$ yaklaşık kök değerleri olan $(1,2)$ aralığının sınır değerleri için fonksiyonun değerleri; $f(1) = 1^2 - 2 = -1$ ve $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ olur.

Buna göre; ilk adımda;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \text{ve} \quad f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

olarak hesaplanır ve $f(1)(1.5) \langle\ 0$ olur. İkinci adımda; kök $(1,1.5)$ sınır değerleri arasında aranır. Bu adımda

$$x_2 = \frac{x_a + x_1}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \quad \text{ve} \quad f(1.25)) = 1.25^2 - 2 = -0.4375$$

$$f(1.25)f(1.50) \langle\ 0$$

hesaplamalarından, aranan kökün $(1.25,\ 1.50)$ aralığında olduğu hesaplanır. İterasyon işlemlerine, benzer şekilde, aşağıdaki tablodaki gibi devam edilerek,

x_a	x_b	$x = \frac{x_a + x_b}{2}$	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x)$
1	*2*	*1.5*	*-1*	*2*	*0.25*
1	*1.5*	*1.25*	*-1*	*0.25*	*-0.4375*
1.25	*1.5*	*1.375*	*-0.4375*	*0.25*	*-0.1094*
1.375	*1.5*	*1.4375*	*-0.1094*	*0.25*	*0.0664*
1.375	*1.4375*	*1.40625*	*-0.1094*	*0.0664*	*-0.0225*
1.40625	*1.4375*	*1.421875*	*-0.0225*	*0.0664*	*0.0217*
1.40625	*1.421875*	***1.41406***	*-0.0225*	*0.0217*	*-0.00043*

Tablo 2: *İteratif Çözüm*

aranan kök değeri; $|x_{i+1} - x_i| < 0.007$ mutlak hata ile *7*. iterasyon adımı sonucunda $\sqrt{2} = x = 1.41406$ olarak elde edilir.

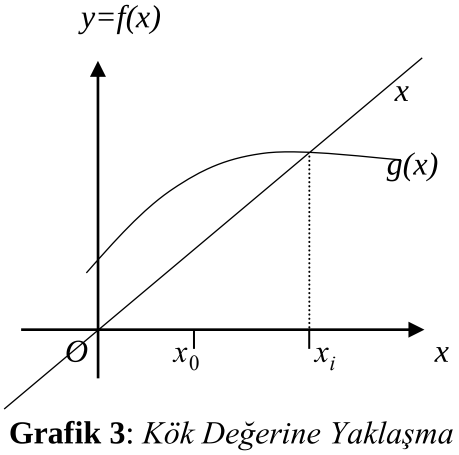
5.1.1.3 Basit İterasyon Yöntemi

Basit iterasyon yönteminde *f(x)* gibi bir fonksiyonu sıfır yapan herhangi bir *x* bağımsız değişkenin $x = x_i$ değerini *(kökünün)* hesaplamak için; önce bu fonksiyon *f(x)=0* şeklinde bir denklem olarak düşünülerek; $f_1(x) - f_2(x) = 0$ koşuluna uygun $f_1(x) = f_2(x)$ gibi iki bileşen fonksiyona ayrılır. *F(x)* fonksiyonunun bu şekilde iki bileşen fonksiyona ayrılmasında,

$f_1(x) = x$: *koordinat sisteminin orijininden geçen ve eğimi bir olan bir doğru,*
$f_2(x) = g(x)$: *arda kalan terimlerden oluşan fonksiyonu göstermek üzere,*

x = g(x) şeklinde yapılırsa; tüm işlemler daha basit ve kolay halde olmaktadır. Bu nedenle, basit iterasyon yöntemine göre doğrusal olmayan denklemler önce bu özellikdeki iki basit bileşen fonksiyona ayrılır. Sonra, bu iki fonksiyonun kesişim noktasının x_i apsis değeri, denklemin aranan bir kökü ya da fonksiyonu $f(x_i) = 0$ sıfır yapan bir değer olacağından bu iterasyon fonksiyonlarından hesaplanır.

F(x) = 0 denkleminin bu yöntemle bir köküne ulaşabilmek için, x_i gerçek kökü civarındaki x_0 yaklaşık bir kök değeri daha önce verilmiş yada belirlenmiş olduğundan, ilk iterasyon adımında bu x_0 yaklaşık kök değeri kullanılarak; *x = g(x)* iterasyon eşitliğine göre ;

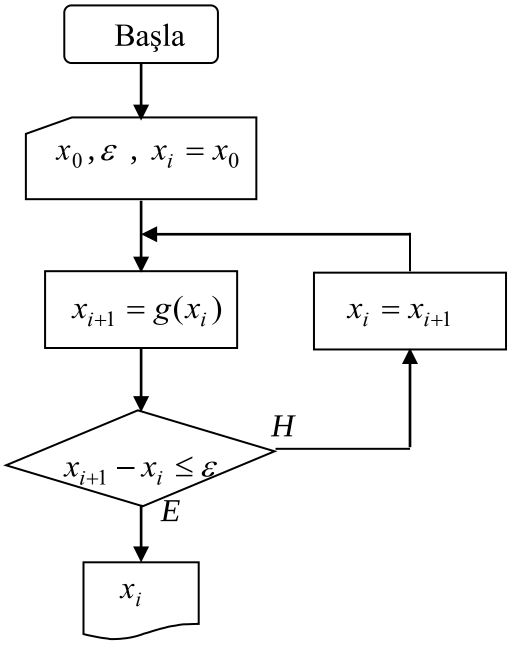


Grafik 3: *Kök Değerine Yaklaşma*

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$
$$\vdots$$
$$x_{i+1} = g(x_i)$$

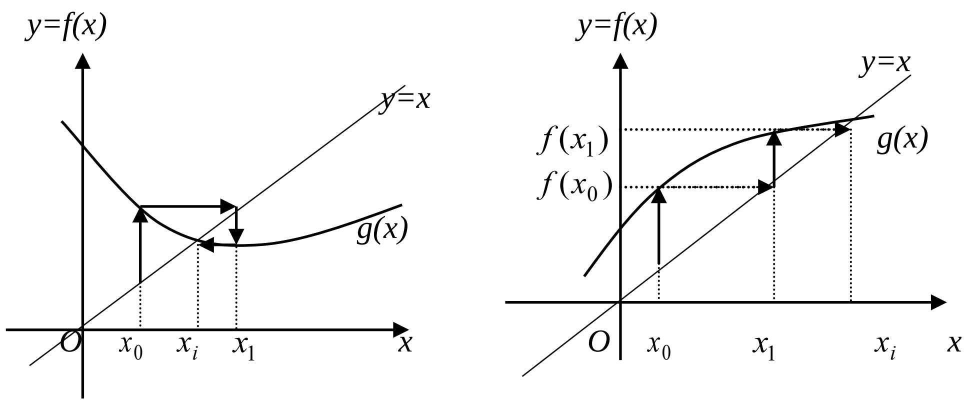
adımlar halinde iterasyon işlemleri yapılarak, her adımın sonucunda bir kök değeri hesaplanır. Bu şekilde iterasyonla yapılacak çözümün yakınsak olması halinde; aranan x_i kesin yada gerçek kök değeri, ε sıfır yada kabul edilebilir çok küçük bir değer olmak üzere; $x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon$ olduğu durumda, iterasyon işlemi durdurularak son adımdan elde edilmiş olan x_i değeri, bu fonksiyonu sıfır yapan bir değer; yanı kök olarak alınır.

Bu şekildeki bir iterasyon hesabında; yapılacak işlemler veya hesaplamanın bilgisayarla yapılmasında yazılacak çözüm programının algoritması tekniği yönünden daha uygun olacağı düşüncesi ile;



Diyagram 2: *Algoritma Çözümü*

şeklinde bir hesap algoritması verilebilir. Böyle bir hesap algoritmasına göre yapılan işlemler grafik olarak;



Grafik 4: *Köklere İtertif Yaklaşma*

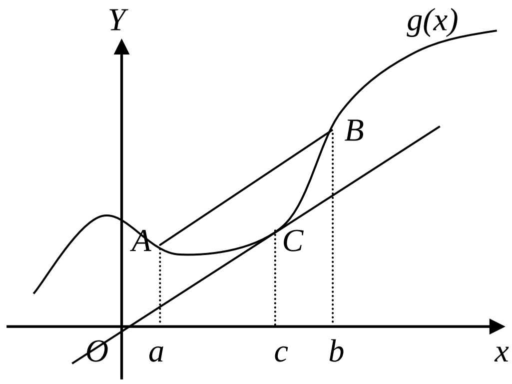
görsel olarak farklı biçimlerde gösterilebilir.

Neticede; Basit iterasyon yöntemine göre bir fonksiyonun kökünü bulmada koşul, x doğrusu ile *g(x)* fonksiyonlarının en az bir noktada birbirini kesmeleri gerekmektedir. Bu özellik basit iterasyon yönteminin yakınsaması olarak bilinir.

Bilindiği gibi, ortalama değer teoremine göre; bir $g(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve bu aralığın herhangi bir noktasında türevi mevcut ise; $a < c < b$ aralığındaki herhangi bir c değeri için,

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

eşitliğini sağlayan en az bir nokta bulunmaktadır. Bu bağıntı aynı zamanda, $A(a, g(a))$ ve $B(b, g(b))$ noktalarından geçen bir doğrunun eğimi olmaktadır.



Grafik 5: $a < c < b$ *Aralığında Kiriş ve Eğim İlişkisi*

Buradan,

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b - a)$$

şeklinde elde edilecek bir kural; basit iterasyon yöntemine göre yapılacak iteratif çözüme uygulanarak,

$$x_1 = g'(x_0) \;\; , \; x_2 = g'(x_1) \;\; , \;\; ...., \; x_{i+1} = g'(x_i)$$

olacağı göz önüne alınarak, herhangi bir i. İterasyon adımı sonucunda elde edilen (x_{i-1}, x_i) gibi bir aralık için yeni sınır değerleri $a = x_{i-1}$ ve $b = x_i$ olacaktır. Buna göre de $x_{i-1} < c < x_i$ olacak ve bu noktalardan geçecek doğrunun eğim bağıntısı de benzer şekilde,

$$\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = g'(c)$$

olacaktır. Sonuçta;

$$g(x_i) = g(x_{i-1}) + g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

olduğu yazılabilecektir. Diğer taraftan, $x_{i+1} = g'(x_i)$ ve $x_i = g'(x_{i-1})$ olduğundan.

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

eşitliği de mevcut olacaktır. Sol taraftaki değerlerin yerine iterasyon değerleri yazıldığında bu bağıntı,

$$x_{i+1} - x_i = g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

veya

$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(c)||(x_i - x_{i-1})|$$

şeklinde de ifade edilebilecektir.

Sonuçta, bu durumun her bir iterasyon adımı için geçerli olacağı rahatlıkla söylenebilir. Bu yolla gerçek kök değerini bulabilmek için $|x_{i+1} - x_i| \to 0$ sıfıra yakınsaması ne neticede sıfır olması gerekir. Bunu böyle olması için, her iterasyon adımı sunucunda elde edilen bu farkın, bir önceki adımdan elde edilmiş olan farktan daima küçük olması gerekir. Böyle bir koşulun gerçekleşmesi için de $g'(c) < 1$ olması gerekmektedir.

Uygulamada bu koşul; çözüme başlamadan önce; ilk iterasyon adımının başında, $c = x_0$ alınarak $|g'(x_0)| < 1$ koşuluna bakılarak karar verilir. Eğer bu koşul, *f(x)=0* denkleminin kökü civarında sağlanıyor ise, bu yöntemle en az bir köke ulaşılabileceği söylenir. Sonuçta bu özellik; basit iterasyon yöntemiyle kök bulmada yeterli bir koşul olmasına rağmen, gerekli bir koşul da olmamaktadır.

Bir *f(x)* fonksiyonunu $f(\bar{x}) = 0$ yapan $\bar{x}$ gerçek kökünü basit iterasyon yöntemiyle iteratif olarak hesaplamada,

x_i ; *i. İterasyon adımında hesaplanan kök değeri*

Δx_i ; *i. Adımda kökün hesaplanan kök değerinin hatası*

olmak üzere; $\bar{x}$ gerçek kök değeri ile *i.* İşlem adımından hesaplanan herhangi bir kök değeri arasında; $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ genel hata tanımından faydalanarak, $x_i = \bar{x} + \Delta x_i$ şeklinde bir ilişki yazılabilir. Bu ilişki, iterasyon fonksiyonunda dikkate alınarak;yapılan Taylor seri açılımından;

$$g(x_i) = g(\bar{x} + \Delta x_i) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2!} g''(\bar{x})\Delta x_i^2 + ...$$

seri değeri elde edilir. Bu *Taylor* ifadesinde; Δx_i değerleri küçük miktarlar olduklarından, yüksek dereceli terimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri de küçük olacağından ihmal edilebilirler. Bu durumda hata hesabı için,

$$g(x_i) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2!} g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

şeklinde elde edilmiş olan ikinci dereceden bir Taylor ifadesi ile yetinilmektedir. Burada; $x_{i+1} = g(x_i)$ ve $\bar{x} = g(\bar{x})$ olduğu dikkate alınırsa;

$$x_{i+1} - \bar{x} = g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2} g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

elde edilir. Bu bağıntısın sol tarafındaki $x_{i+1} - \bar{x} = \Delta x_{i+1}$ farkı, yanı; $i+1$. iterasyon adımındaki,

$$\Delta x_{i+1} = g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2} g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

iterasyon hatası olmaktadır. Buradan görüldüğü gibi bu değer, bir önceki iterasyon adımında yapılan hata miktarına bağlı olmaktadır. Özetle; basit iterasyon yöntemine göre kök hesaplamadaki hata; bir önceki hataya bağlı olduğu görülür.

Örnek 1; $f(x) = 4e^{-0.5x} - x$ fonksiyonun $x_0 = 3$ civarındaki bir kökünü basit iterasyon yöntemi kullanılarak $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1; Basit iterasyon yöntemiyle bu fonksiyonun bir kökünü bulabilmek için önce,

$$f(x) = 4e^{-0.5x} - x = 0$$

şeklinde bir denklem halinde yazılarak;

$$x = 4e^{-0.5x}$$

gibi iki basit fonksiyona ayrılır. Bu durumda; $g(x) = 4e^{-0.5x}$ olur. Buradan; $g'(x_0)$ değerini bulmak için, logaritması alınarak,

$$Ln\ g(x) = Ln\ 4 - 0.5x\ Ln\, e$$

ve burada $Ln\, e = 1$ olduğundan,

$$Ln\ g(x) = Ln\ 4 - 0.5x$$

x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial Ln(g(x))}{\partial x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = -0.5$$

$$g'(x) = g(x)(-0.5) = (-0.5)4e^{-0.5x} = -\frac{2}{e^{0.5x}} = -\frac{2}{e^{1.5}}$$

olur. Buna göre de;

$$\left|g'(x_0)\right| = \left|-\frac{2}{e^{1.5}}\right| = \left|-0.446\right| < 1$$

koşulu sağlandığından bu fonksiyon $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civarında yakınsak olduğu söylenebilir. Sonuçta; Basit iterasyon yöntemiyle $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civardaki gerçek bir kökü aşağıdaki gibi bulunabilir. Bu kök;

x	$g(x) = 4e^{-0.5x}$	$x_{i+1} - x_i \le 0.05$
3	*0.89*	*2.1*
0.89	*2.56*	*1.67*
2.56	*1.11*	
:	*:*	*:*
:	*:*	*:*
1.7	***1.7***	$x_i - x_{i-1} \le 0.05$

Tablo 3: *İteratif Çözüm*

olması koşulu *25*. iterasyon adımında sağlanarak, bu fonksiyonun bir kökü $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile $x_i = 1.7$ olarak hesaplanabilir.

Örnek 2; *f(x)= 4 Ln x - x* fonksiyonunu $x_0 = 3$ başlangıç yada diğer adıyla yaklaşık kökü civarındaki gerçek bir kökünü basit iterasyon yöntemi kullanılarak $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 2; Bu fonksiyon *f(x)= 4 Ln x - x = 0* şeklinde sıfıra eşitlenip bir denklem olarak yazıldıktan sonra;

$$x = 4 \ Ln\, x$$

biçiminde iki bileşene ayrılabilir. Buradan; f(x) fonksiyonun basit iterasyona yöntemine göre; bu yaklaşık kökü civarındaki bir gerçek kökünü bulmada yakınsayıp, yakınsamayacağını önceden görebilmek için;

$$g(x) = 4 \ Ln\, x \quad \text{ve} \quad g'(x) = 4\frac{1}{x}\bigg|_{x=x_0}$$

elde edilerek; $x_0 = 3$ için değeri,

$$g'(x_0) = \frac{4}{3} > 1$$

ıraksak olduğu bulunur. Buradan; $f(x)$ fonksiyon $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civarında yakınsamadığı , yani ıraksadığı söylenebilir. Bunun böyle olduğu,

x	$g(x)=4Lnx$	$x_{i+1}-x_i \le 0.05$
3	4.39	1.39
4.39	5.92	1.53
5.92	7.11	1.19
:	:	:
:	:	:

Tablo 4: *İteratif Çözüm*

şeklinde yapılan sayısal iterasyon çözüm işlemlerden da açıkça görülebilir.

Örnek 3; $f(x)=x^2-4x+4$ fonksiyonunu $x_0=1.5$ civarındaki bir kökünü basit iterasyon yöntemine göre $\varepsilon=0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 3; Bu fonksiyon önce, $f(x)=x^2-4x+4=0$ şeklinde yazılır ve sonra basit iterasyon yönteminin *x=g(x)* şeklinde verilmiş olan temel ilkesine göre iki bileşene ayrılır. Bu amaçla; *f(x)* fonksiyonun iki bileşenine ayrılmasında birbirinden farklı şekilde ayırma işlemleri yapılabilir. Bunlar;

a) $4x=x^2+4$; $x=0.25x^2+1$ buradan $g(x)=0.25x^2+1$

$$\left|g'(x_0)\right|=0.50x\Big|_{x=x_0}=\left|0.50x_0\right|=\left|0.75\right|<1$$

çözüm yakınsamaktadır. Buradan çözüm yapıldığında;

x	$g(x)=0.25x^2+1$	$x_{i+1}-x_i \le 0.05$
1.5	1.56	0.06
1.56	1.61	0.05
1.61	**1.65**	0.04

Tablo 5: *İteratif Çözüm*

$\varepsilon=0.05$ mutlak hata ile *3.* iterasyon adımı sonucunda kök değeri $x=1.65$ olarak bulunur.

b) $x^2=4x-4$; $x=\pm\sqrt{4x-4}$ ” $g(x)=\pm\sqrt{4x-4}$

$$\left|g'(x)\right|=\frac{2}{\sqrt{4x-4}}\Bigg|_{x=x_0}=\left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right|=\left|\sqrt{2}\right|=\left|1.41\right|>1$$

ve çözüm ıraksaktır. Buradan; iterasyon hesabı yapıldığında;

x	$g(x)=\sqrt{4x-4}$	$x_{i+1}-x_i \le 0.05$
1.5	1.414	
1.414	1.287	-0.086
1.287	1.071	-0.127
1.071	0.533	-0.216
0.533	*kök içi negatif*	*Iraksamaktadır*

Tablo 6: *İteratif Çözüm*

iterasyonun yakınsamadığı tekrar görülür.

c) $x^2-4x=-4$; $x=-\dfrac{4}{x-4}$ " $g(x)=-\dfrac{4}{x-4}$

$$\left|g^{'}(x)\right|=\left.\frac{4}{(x-4)^2}\right|_{x=x_0}=\left|\frac{4}{6.25}\right|=\left|0.64\right|<1$$

çözüm yakınsamaktadır. Buradan çözüm yapıldığında;

x	$g(x)=-\dfrac{4}{x-4}$	$x_{i+1}-x_i \le 0.05$
1.5	*1.6*	
1.6	*1.667*	*0.1*
1.667	*1.715*	*0.067*
1.715	***1.750***	*0.048*

Tablo 7: *İteratif Çözüm*

aranan kök değeri $\varepsilon<0.05$ mutlak hata ile *4*. iterasyon adımı sonucunda $x=1.75$ olarak hesaplanmaktadır.

Buradan görüldüğü gibi; çözüm için bunlardan hangisi yakınsak ise, basit iterasyon çözümü ona göre yapılır. Yakınsak olanlarından $|g'(x)|$ türev değeri kısa sürede yakınsamaktadır.

5.1.1.4 Newton- Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yönteminde bir fonksiyonun belli bir değere göre *Taylor* seri açılımından faydalanılmaktadır. Bu amaçla, *f(x)* gibi bir fonksiyon $x=x_0+h$ yaklaşık değerine göre *Taylor serisine* açılarak,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + ...$$

seri ifadesi elde edilir. Bu seride x_0 başlangıç değerinin uygun şekilde, yani $x - x_0 = h$ değerinin küçük bir değer seçilmiş olması durumunda; seri birinci dereceden terimde yakınsayacağından, burada iki yada daha yüksek dereceden terimler göz ardı edilebilir. Bu durumda birinci dereceye kadar terimlerden oluşan *Taylor* serisi,

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h$$

olarak elde edilir. Buradan; *f(x)* fonksiyonunu *f(x)=0* yapan bir değeri yada kökü;

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h = 0$$

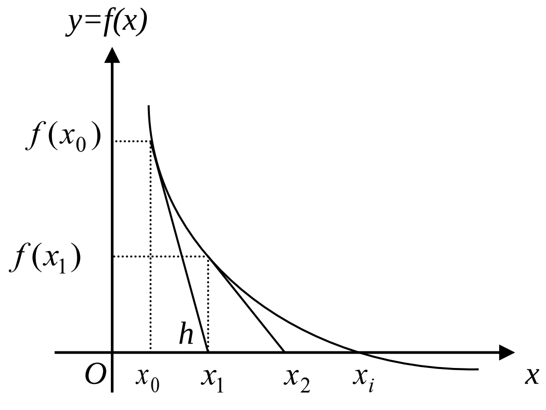
yaparak,

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilen h değerinin $x - x_0 = h$ de dikkate alınması ile

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

eşitliğinden bulunabilir. Aynı zamanda bu eşitlik *Newton-Raphson* yönteminin de temel bağıntısı olmaktadır. Ancak, bu bağıntının elde edilmesinde, Taylor seri açılımında; x yerine başlangıç değeri olarak x_0 gibi bir yaklaşık değerin kullanılmış olması yanında birinci dereceye kadar olan terimlerinin dikkate alınmış olması bunun ilk adımda *f(x)=0* yapan bir x değeri içinde tam bir çözüm olamayacağını göstermektedir. Bu durumda, tam çözüm; ancak bu bağıntının iteratif bir şekilde uygulanması ile bulunabilir.



Grafik 6: *Köke İtertif Yaklaşma*

Böyle bir çözümde; x_0 başlangıç yada ilk yaklaşık kök olmak üzere;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$x_{i+1} - x_i \le \varepsilon$ şeklinde verilmiş olan, bir sonraki adımdan elde edilen değerle bir önceki adımdan bulunan değerin öngörülen, hata sınırından küçük oluncaya kadar iterasyon işlemlerine devam edilerek bulunur.

Buradan görüldüğü gibi; bu yöntemde gerçek kök değerine, fonksiyonun çizdiği eğriye x_0 gibi ilk başlangıç değerinden başlayarak, eşit aralıkta apsis değerine karşılık gelen noktalarda, eğriye teğet doğrularla iteratif olarak yaklaşılmaktadır. $x_{i+1} - x_i \le \varepsilon$ değeri bir önceki iterasyondan bir sonraki iterasyona geçişte gittikçe küçülüyor ise, çözüm yakınsak olmaktadır. Aksı halde ıraksak olur ve çözüm vermez. Bu durum, yani yakınsamanın olup, olmadığı; iterasyon işlemlerine başlamadan önce araştırılır. Böyle bir işlem için, *Newton-Raphson* yönteminde kullanılan;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

iterasyon fonksiyonu, basit iterasyon yönteminde olduğu gibi bir *f(x)* fonksiyonunun bir tarafı bir doğru denklemini gösterecek şekilde iki bileşen fonksiyonuna ayrılmış şekli gibi düşünülebilir. Sağ tarafındaki ifade de; x_i değeri için x değişken gösterimi kullanıldığında,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olarak yazılabilir. Basit iterasyon yönteminde, bir $g(x)$ fonksiyonun yakınsak olabilmesi için, $|g'(x_0)| < 1$ koşulu bulunmaktadır. Bu özellik, *Newton-Raphson* yönteminde çözüme esas olan iterasyon fonksiyonunun aynı yapıda olması nedeniyle, burada da geçerliğini korumaktadır. Buna göre;

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

alınarak, $|g'(x_0)| < 1$ koşuluda göz önünde bulundurularak yapılan işlemlerden bir fonksiyonun, *f(x)=0*, sıfır yapan bir kök değerlerini hesaplarken, yapılacak iterasyon işlemlerinin bir işlem adımından bir sonraki işlem adımına geçerken yakınsak olması için iterasyonun yapıldığı her işlem adımında;

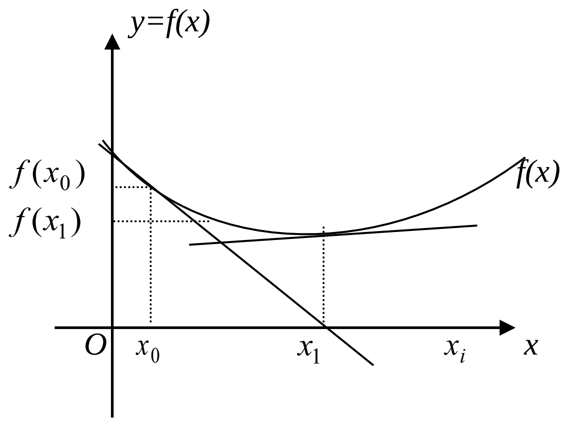
$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{\left[f'(x) \right]^2} \right| \langle \; 1$$

koşulunu sağlanmış olması gerekmektedir. Aynı şekilde; başlangıçta verilmiş olan; x_0 ilk yaklaşık kök değeri için de bu koşulu;

$$\left| \frac{f(x_0) f''(x_0)}{\left[f'(x_0) \right]^2} \right| < 1$$

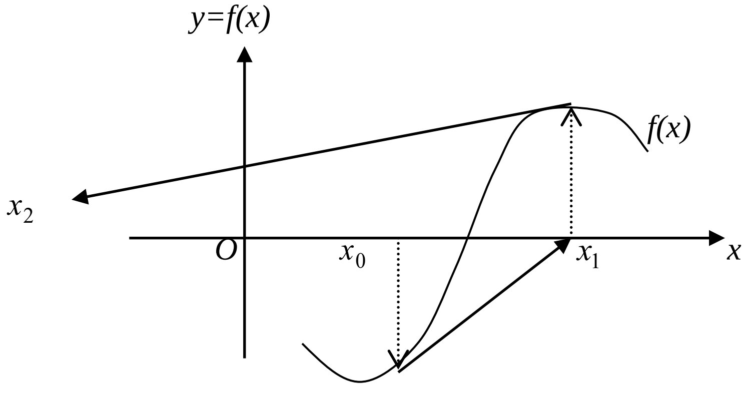
sağlaması gerekmektedir.

Uygulamada; bu yolla bir fonksiyonun kök değerlerini hesaplama işlemlerine başlamadan önce bu koşulun varlığının araştırılması gerekir. Koşulun geçerli olmasında ancak en az bir köke ulaşılır. Aksi halde; Koşulun geçerli olmadığı durumda çözüm aranmamalıdır. Bu duruma örnek olarak;



Grafik 7a: *İterasyonda Iraksama*

ya da diğer bir çok örneklerden biri olarak;



Grafik 7b: *İterasyonda Iraksama*

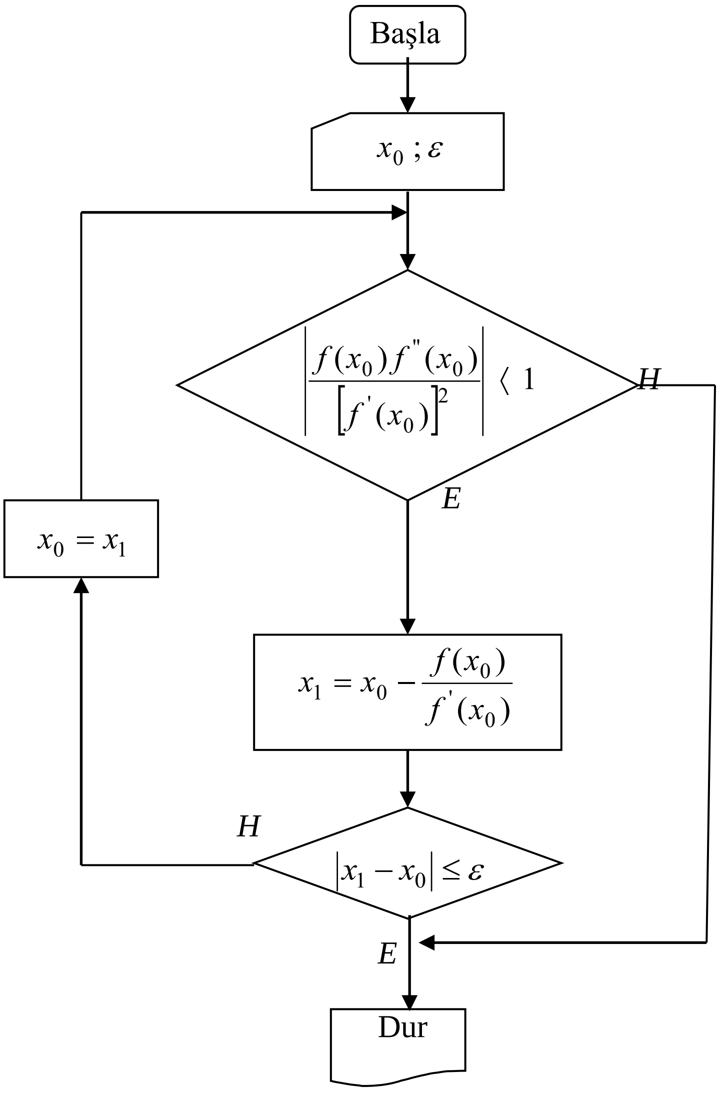
özelliklerine sahip fonksiyonlar verilebilir.

Buradan görüldüğü gibi bazı durumlarda, kökü bulunacak denklemin özelliği gereği; *Newton-Raphson* yöntemine göre kök hesaplama işlemleri yakınsamaz. Sonuçta, kök değeri de hesaplanamaz. Çözümün yakınsak olduğu bazı durumlarda, başlangıç değerinin iyi seçilememesi veya fonksiyonun analitik özelliği gereği kök bulma işleme kolay yakınsamaz. Böyle durumlarda, bir çözüme ulaşabilmek için fazla iterasyon işlemleri yapmak gerekir. Bu gibi durumlarda, hesaplama işlemlerindeki zorlukların artık sorun olmaktan çıkarmak için, hızlı hesaplayıcıların yanında uygun bir işlem algoritmasın da kullanılması kaçınılmaz olur. Böyle bir algoritma aşağıdaki gibi düşünülebilir.

Newton-Raphson yönteminde *f(x)* gibi sürekli ve ilk iki türevi olan bir fonksiyonun $f(\bar{x})=0$ yapan $\bar{x}$ gerçek kökünü hesaplamak için,

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterasyon bağıntısından faydalanarak, çözüm iteratif olarak yapılmaktadır.



Diyagram 3: *Algoritma Çözümü*

Herhangi bir iterasyon adımı sonucunda hesaplanan yaklaşık kök değeri de x_i olmaktadır. $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$; *i.* adımda hesaplanan x_i yaklaşık kök değerinin mutlak hatası olmak üzere; gerçek kök değeri için $\bar{x} - x_i + \Delta x_i$ yazılabilir. Bu ilişki, *f(x)* fonksiyonunda dikkate alınarak;yapılan *Taylor* seri açılımından;

$$f(\bar{x}) = f(x_i + \Delta x_i) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!} f''(x_i)\Delta x_i^2 + ...$$

seri değeri elde edilir.

Taylor ifadesinde; Δx_i değerleri küçük miktarlar olduklarından, yüksek dereceli terimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri de küçük olacağından ihmal edilebilirler. Bu durumda hata hesabı için,

$$f(\bar{x}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!} f''(x_i)\Delta x_i^2$$

şeklinde elde edilmiş olan ikinci dereceden bir ifadesinin kullanılması yeterli olur. Burada; $f(\bar{x}) = 0$ olduğu dikkate alınırsa;

$$f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!} f''(x_i)\Delta x_i^2 = 0$$

yazılır. Her tarafın $f'(x_i)$ değerine bölünmesinden

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \Delta x_i + \frac{1}{2}\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\Delta x_i^2 = 0$$

elde edilir. Burada; iterasyon fonksiyonundan;

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - x_{i+1} \quad \text{ve} \quad \Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

hesaplanan değerler yerlerine yazıldığında $\Delta x_{i+1} = \bar{x} - x_{i+1}$ bir sonraki hesap adımının mutlak hatası

$$\Delta x_{i+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\Delta x_i^2$$

olarak ifade edilir. Sonuçta; *Newton-Raphson* yöntemine göre kök hesaplamadaki mutlak hata; bir önceki adımdaki mutlak hataya karesel olarak bağımlı olmaktadır.

Örnek 1: $\sqrt{2} = ?$ kök değerini, $x_0 = 1$ başlangıç değerini kullanarak, 0.05 mutlak hata ile *Newton-Raphson* yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 1: Bu sayını $\sqrt{2} = x$ ise; her iki tarafın karesi alındığında, $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonu elde edilir. $\sqrt{2} = x$ yaklaşık kök değerlerini *Newto-Raphson* yöntemine göre hesaplamak için; $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınarak;

$$f^{'}(x) = 2x \text{ ve } f''(x) = 2$$

elde edilir.

Bu çözümün yakınsayıp yakınsamayacağını önceden kestirebilmek için,

$$\left| \frac{f(x) f^{''}(x)}{\left[f^{'}(x)\right]^2} \right| \langle \ 1$$

koşulundan faydalanarak,

$$\left| \frac{f(1) f^{''}(1)}{\left[f^{'}(1)\right]^2} \right| = \left| \frac{(-1)(2)}{(2)^2} \right| = |0.5| < 1$$

Olduğu görülür. Sonuçta iterasyon çözümü yakınsayacaktır denir. Buradan tablodaki gibi hesaplamalar yapılarak,

x	$h = -\frac{f(x)}{f^{'}(x)} = -\frac{x^2 - 2}{2x}$	$x = x_0 + h$	$x_{i+1} - x_i$
1	*0.5*	*1.5*	*0.5*
1.5	*-0.083*	*1.4167*	*-0.083*
1.4167	*-0.0025*	***1.4142***	*-0.0025*

Tablo 8: *İteratif Çözüm*

aranan kök değeri *0.05* mutlak hata ile *3*. iterasyon adımı sonucunda ***x=1.4142*** olarak hesaplanır.

Örnek 2: $f(x) = x^3 - 7$ fonksiyonunu sıfır yapan bir kök değerini, $x_0 = 1.5$ başlangıç değerini kullanarak, 0.05 mutlak hata ile *Newton-Raphson* yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 2: Bunun için fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi alınarak; $f^{'}(x) = 3x^2$ ve $f''(x) = 6x$ olarak elde edilir. Buradan; $x_0 = 1.5$ başlangıç değeri için,

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\right| = \left|\frac{f(1.5)f''(1.5)}{\left[f'(1.5)\right]^2}\right| = \left|\frac{(-3.625)(9)}{(6.75)^2}\right| = |-0.72| < 1$$

koşulu hesaplanarak, itersyonun yakınsayacağına karar verilir.

x	$h = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^3 - 7}{3x^2}$	$x = x_0 + h$	$x_{i+1} - x_i$
1.5	*0.537*	*2.037*	*0.537*
2.037	*-0.117*	*1.920*	*-0.117*
1.920	*-0.007*	***1.913***	*-0.007*

Tablo 9: *İteratif Çözüm*

Buradan , aranan kök değerinin *0.05* mutlak hata ile *3*. iterasyon adımı sonucunda ***x=1.913*** olarak hesaplanır.