

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

ÖNSÖZ

Çalışma konumun belirlenmesinde, çalışmamın tamamlanıp bu hale getirilmesinde benden yardımını ve desteğini esirgemeyen, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı şekillendiren hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN'a saygılarımı sunar ve emeği için teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam boyunca benden yardımını esirgemeyen arkadaşlarıma, öğrenme ve araştırmanın önemini öğreten bütün hocalarıma, hayatımın her evresinde bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Selda BALCI
Trabzon 2021

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “SİNGÜLERLİĞE SAHİP ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ASİMPOTOTİK TAHMİNLER” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof.Dr. Haskız COŞKUN’ un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 27/07/2021

Selda BALCI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ	IX
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Özdeğer Problemleri	1
1.3. Sturm-Liouville Teorisi	11
1.4. Simetrik Operatörün Özellikleri	18
1.5. Regüler Sturm-Liouville Sistemleri	21
1.6. Periyodik Sturm-Liouville Sistemleri	22
1.7. Çözümlü Alıştırmalar	25
1.8. Singüler Sturm-Liouville Sistemleri	34
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	39
3. SONUÇLAR	73
4. ÖNERİLER	75
5. KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

SİNGÜLERLİĞE SAHİP ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ASİMPTOTİK
TAHMİNLER

Selda BALCI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2021,77 Sayfa

Bu çalışmada, (a, b) aralığında iki singülerliğe sahip $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu içeren

$$y'' + (\lambda - q)y = 0, \quad -\infty < a < x < b < \infty$$

denkleminin Dirichlet ve Neumann sınır koşullarının sağlanması durumunda λ_n özdeğerleri için asimptotik tahminler elde edilmiştir.

Birinci bölümde, Sturm-Liouville teorisiyle ilgili temel bilgiler ve bazı örneklerle yer verilmiştir. İkinci bölümde ise Prüfer dönüşümü ve bazı diğer dönüşümler kullanılarak [1] ve [2] çalışmalarına benzer yöntemler yardımıyla asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlar ve öneriler özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Singülerlik, Asimptotik yaklaşım, Özdeğerler

SUMMARY

ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR EIGENVALUE PROBLEMS HAVING SINGULARITIES

Selda BALCI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Professor. Haskız COŞKUN
2021,77 Pages

In this study, asymptotics approximations for the eigenvalues λ_n are obtained in the case of Dirichlet and Neumann boundary conditions satisfied by the second order differential equations

$$y'' + (\lambda - q)y = 0, \quad -\infty < a < x < b < \infty$$

in which $q(x)$ has singularities at two points in the interval (a, b) .

In the first part, the basic results related to the Sturm Liouville theory and some examples are given. In the second part using Prüfer transformation and some other transformations together with the similar results presented in [1],[2] are used to obtain asymptotics approximations. Finally, the obtained results and suggestions for further improvements are provided.

Key Words: Singularity, Asymptotic approximation, Eigenvalues

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. $u = k$ ve $u = -\tanh k$ 6

Şekil 2. $u = k$ ve $u = -\tan k$ 7



SEMBOLLER DİZİNİ

λ : özdeğer

$\lambda \rightarrow \infty$: λ, ∞ 'a yaklaşırken

$\frac{d}{dx}$: x 'e göre birinci türev

$W(u, v)(x)$: Wronskian determinanı

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\Delta(\lambda)$: diskriminant fonksiyonu (katsayılar matrisi)

$x \rightarrow c_i$: x, c_i ($i = 1, 2$) 'ye yaklaşırken

O, o : asimptotik terimleri gösteren singeler

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilindiği üzere özdeğer problemleri ve Sturm-Liouville teorisini konu alan çalışmalar literatürde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad -\infty < a < x < b < \infty, \quad a < 0 < b \quad (1.1)$$

denklemini konu alan spectral problemlere oldukça fazla yer verilmiştir. Burada q potansiyel fonksiyonu reel değerli integrallenemeyen bir fonksiyondur ve $x = 0$ noktasında singülerliğe sahiptir. Bu tür çalışmaların bazıları [1], [2] ile verilmiştir. Söz konusu çalışmalardaki yaklaşım, esas olarak (1.1) denklemini regüler bir denkleme dönüştürerek özdeğerlerin sağlayacağı eşitlikleri elde etmektir.

Bu çalışmada, singülerlik noktası sıfırdan farklı ise ve c_1, c_2 gibi aralığın iki farklı noktasında singülerlik mevcutsa benzer yöntemlerle denklem regüler forma dönüştürülmüş ve Prüfer dönüşümü yardımıyla özdeğerler için bulunan yaklaşımlara reversiyon uygulanarak yaklaşık çözümler belirli hata terimiyle elde edilmiştir.

1.2. Özdeğer Problemleri

$$M := A_2(x)D^2 + A_1(x)D + A_0(x), \quad D = \frac{d}{dx}$$

olmak üzere

$$M[y] + \lambda r(x)y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad x_1 < x < x_2 \quad (1.2)$$

denklemini göz önüne alınsın. (1.2) denkleminin genel çözümü hem x 'e hem de λ reel parametresine bağlıdır. Eğer (1.2) denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ ise genel çözüm

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) \quad (1.3)$$

şeklindedir. Genel çözümdeki c_1 ve c_2 sabitleri verilen sınır koşulları ile bulunur.

(1.2) denklemini ile ilgili homojen sınır koşulları

$$B_1[y] = 0, \quad B_2[y] = 0 \quad (1.4)$$

olarak tanımlansın. Burada, a_{ij} ($i, j = 1, 2$) sabitler olmak üzere,

$$B_1[y] = a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) \quad (1.5)$$

$$B_2[y] = a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) \quad (1.6)$$

şeklinde. Bu tür sınır koşulları ayrılmış sınır koşulları olarak adlandırılır. Daha genel olarak hem x_1 (x_1 ; birinci uç) hem x_2 (x_2 ; ikinci uç) noktasını içeren

$$a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) + b_{11}y(x_2) + b_{12}y'(x_2) = 0$$

$$a_{21}y(x_1) + a_{22}y'(x_1) + b_{21}y(x_2) + b_{22}y'(x_2) = 0$$

şeklindeki sınır koşullarına ayrılmamış sınır koşulları adı verilir. Burada $a_{ij}^2 + b_{ij}^2 \neq 0$ ve a_{ij} ($i, j = 1, 2$) katsayıları sabitlerdir.

(1.2) denkleminin, (1.5)-(1.6) ayrılmış sınır koşullarını sağlayan genel çözümünü bulma problemi **özdeğer problemi** olarak adlandırılır.

Teorem 1.1: Eğer y_1 ve y_2 $M[y] = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise bu taktirde, $M[y] = 0, B_1[y] = 0, B_2[y] = 0$ homojen sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümü vardır $\Leftrightarrow \Delta = 0$ dır. Eğer $\Delta \neq 0$ ise homojen sınır probleminin sadece $y(x) = 0$ (trivial) çözümü mevcuttur.

Bu teorem $\Delta = 0$ olması durumunda sıfırdan farklı çözümün mevcut olduğunu belirtir, çözümü bulmaz. Dolayısıyla (1.1)-(1.4) probleminin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\Delta = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1[y_1(x, \lambda)] & B_1[y_2(x, \lambda)] \\ B_2[y_1(x, \lambda)] & B_2[y_2(x, \lambda)] \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Sıfırdan farklı çözüm üreten λ değerleri yani $\Delta(\lambda) = 0$ olan değerler özdeğerlerdir ve bu özdeğerlere karşılık gelen çözümler ise özfonksiyonlar olarak adlandırılır. Özfonksiyonlar genellikle $\phi_n(x)$ ile gösterilir. Özdeğer problemleri sınıfına ait bazı denklemler:

- $y'' + \lambda y = 0, \quad x_1 < x < x_2$ Helmholtz denklemi
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1$ Legendre denklemi
- $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - v^2)y = 0, \quad 0 < x < v$ Bessel denklemi

- $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, $0 < x < \infty$ Laguerre denklemi
- $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, $-\infty < x < \infty$ Hermite denklemi

şeklindedir.

Örnek 1.1: $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: 1.yol

Denklemin karakteristik denklemi $a^2 + \lambda = 0$ şeklindedir. Önce λ nın hangi durumlarda özdeğer olduğu sonra bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar bulunur.

i) $\lambda = 0$ durumunda denklemin karakteristik kökleri $a^2 = 0$ denkleminden $a_{1,2} = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklindedir. Verilen sınır değerleri çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = c_1 = 0, \quad y(1) = c_2 = 0$$

bulunur. Buradan $y(x) = 0$ çözümü elde edilir. O halde $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda karakteristik denklem $a^2 - k^2 = 0$ şeklindedir. Bu denklemin kökleri de $a_1 = k$, $a_2 = -k$ dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$$

olarak yazılır. c_1 , c_2 keyfi sabitleri

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sınır şartları yardımıyla hesaplanır. Bu sınır şartları çözüme uygulanırsa

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) = c_2 \sinh k = 0$$

olur. Burada $\sinh k \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ dır. Sonuç olarak $y(x) = 0$ elde edilir ki bu durumda da özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ durumunda karakteristik denklem $a^2 + k^2 = 0$ dır. Buradan kökler $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

şeklinde elde edilir. Sınır değerleri çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) = c_2 \sin k = 0$$

olur. Aşıkâr olmayan çözümler araştırıldığından $c_2 \neq 0$ için $\sin k = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$k = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

için

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = c_2 \sin n\pi x$$

şeklindedir. Burada $c_2 = 1$ keyfi alınır

$$\phi_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olarak bulunur.

2.yol

Özdeğerler, $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1[y_1(x, \lambda)] & B_1[y_2(x, \lambda)] \\ B_2[y_1(x, \lambda)] & B_2[y_2(x, \lambda)] \end{vmatrix} = 0$ eşitliğini sağlayacağından λ 'nın durumları incelenir.

i) $\lambda = 0$ için, 1.yolda genel çözüm $y(x) = c_1 + c_2x$ olarak bulundu. O halde denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x$$

dir. Buradan

$$B_1[y_1(x, \lambda)] = 1, \quad B_1[y_2(x, \lambda)] = 0$$

$$B_2[y_1(x, \lambda)] = 1, \quad B_2[y_2(x, \lambda)] = 1$$

değerleri için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla özdeğer yoktur.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ olsun. 1. yolda çözüm $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$ olarak elde edildi. Dolayısıyla lineer bağımsız çözümler

$$y_1(x) = \cosh kx, \quad y_2(x) = \sinh kx$$

şeklindedir. Böylece

$$B_1[y_1(x, \lambda)] = 1, \quad B_1[y_2(x, \lambda)] = 0,$$

$$B_2[y_1(x, \lambda)] = \cosh k, \quad B_2[y_2(x, \lambda)] = \sinh k$$

değerleri için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh k & \sinh k \end{vmatrix} = \sinh k$$

olur. Ancak $\sinh k$ sadece $k = 0$ iken sıfırdır. Dolayısıyla $\Delta(\lambda) = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı k değerleri yoktur. Bu yüzden $\lambda = -k^2$ özdeğer değildir.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ olsun. 1.yolda çözüm $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ olarak bulundu. Bu denklemden lineer bağımsız çözümler $y_1(x) = \cos kx$, $y_2(x) = \sin kx$ şeklindedir. Önceki durumlara benzer şekilde $\Delta(\lambda)$ oluşturulur.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos k & \sin k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin k = 0$$

özelliğini sağlayan k değerleri

$$k = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerler olup bu özdeğerlere karşılık gelen çözüm

$$y_n(x) = c_1 \cos n\pi x + c_2 \sin n\pi x$$

olur. Sınır koşulları kullanılırsa $c_1 = 0$ ve $c_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Dolayısıyla $c_2 = 1$ alınırsa özfonksiyonlar

$$y_n(x) = \phi_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.2: $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

i) $\lambda = 0$ durumunda karakteristik denklem $a^2 = 0$ olur. Dolayısıyla $a_1 = a_2 = 0$ dır. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklinde olur. Sınır değerleri çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) + y'(1) = c_1 + 2c_2 = 0$$

bulunur. Buradan $c_1 = 0$ olduğundan $2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ dır. Dolayısı ile $y(x) = 0$ aşikâr çözümü elde edilir. Yani $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Bu durumda ise karakteristik denklem $a^2 - k^2 = 0$ olup bu denklemin kökleri $a_1 = k$, $a_2 = -k$ dır. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$$

şeklindedir ve

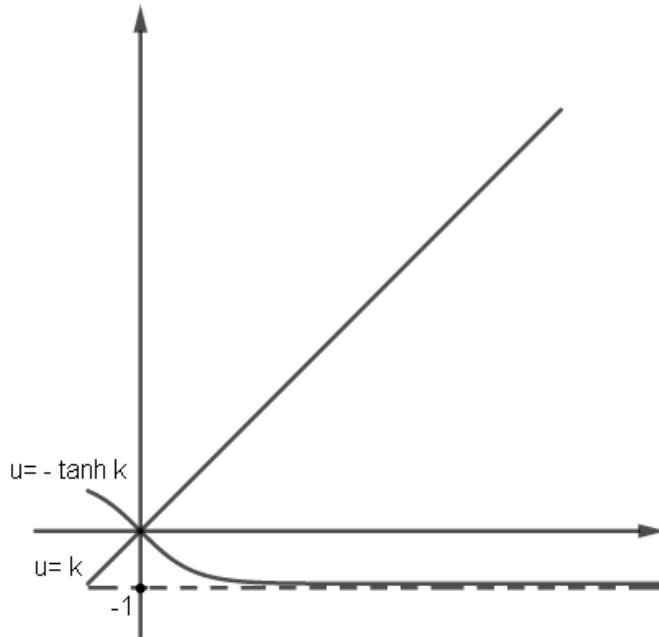
$$y'(x) = c_1 k \sinh kx + c_2 k \cosh kx$$

olur. Sınır şartları kullanılırsa

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) + y'(1) = c_2(\sinh k + k \cosh k) = 0$$

olur. Buradan ya $c_2 = 0$ ya da $\sinh k + k \cosh k = 0$ dır. Sıfırdan farklı çözüm için $c_2 \neq 0$ olmalıdır. Bu yüzden $\sinh k + k \cosh k = 0$ dır. Buradan $k = -\tanh k$ olacağından $u = k$, $u = -\tanh k$ 'nın grafikleri çizilerek ortak değerler olup olmadığına bakılır.



Şekil 1. $u = k$ ve $u = -\tanh k$

Şekil 1'den görüldüğü gibi $u = k$, $u = -\tanh k$ 'nın sıfırın dışında kesiştiği nokta yoktur. O halde $\sinh k + k \cosh k \neq 0$ ve $c_2 = 0$ dır. Böylece $y(x) = 0$ elde edilir ve dolayısıyla $\lambda = -k^2$ durumunda özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ olsun. Karakteristik denklem $a^2 + k^2 = 0$ olur. Bu denklemin kökleri ise $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ dır. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

şeklindedir ve

$$y'(x) = -kc_1 \sin kx + kc_2 \cos kx$$

olarak bulunur. Verilen sınır değerleri çözümde yerine yazılırsa

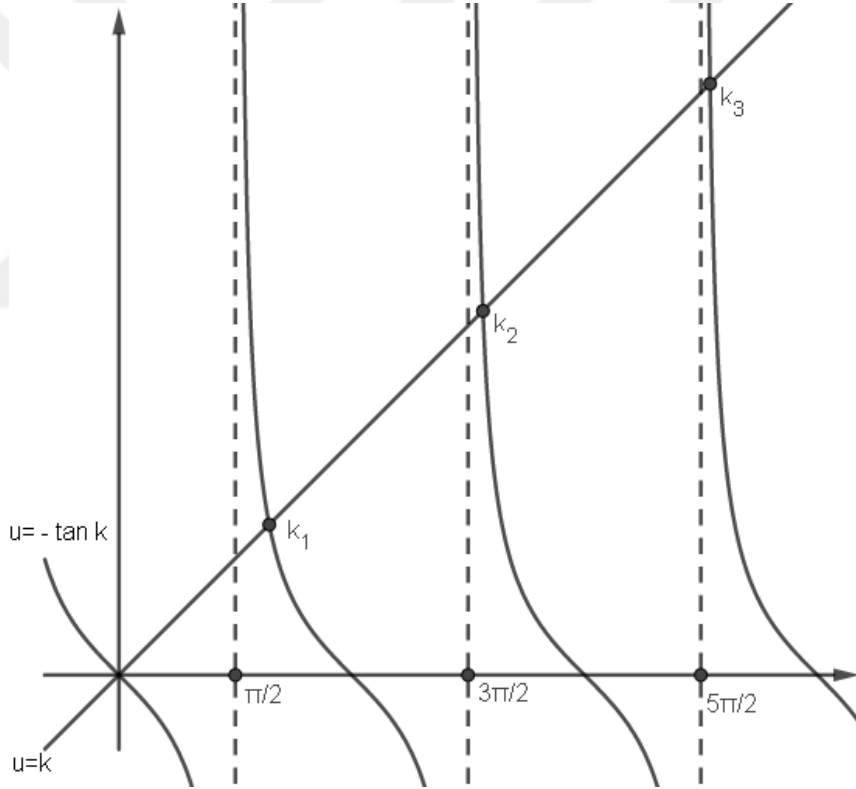
$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) + y'(1) = c_2 \sin k + kc_2 \cos k = 0$$

şeklindedir. Burada $c_2 \neq 0$ olması için $\sin k + k \cos k = 0$ olmalıdır. O halde

$$\sin k = -k \cos k \Rightarrow k = -\tan k$$

dır. Şimdi bu eşitliği sağlayan k_n değerleri aşağıdaki şekilde bulunur.



Şekil 2. $u = k$ ve $u = -\tan k$

$$k_1 \cong \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \cong \frac{3\pi}{2}, \quad k_3 \cong \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Grafiğe bakıldığında $u = k$ ve $u = -\tan k$ 'nın kesiştiği sonsuz tane k_n vardır. Fakat bu değerler tam olarak belirlenmelidir. Bu değerleri belirlemek için Newton yöntemi kullanılır.

$$F(x) = x + \tan x$$

fonksiyonunu sıfır yapan değerler araştırılır. $F(x) = 0$ olan noktalara

$$x_{j+1} = x_j - \frac{F(x_j)}{F'(x_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

ile yaklaşılr. Burada x_0 : kök için alınan yaklaşık değerdir. Örneğin birinci sıfır yeri olan k_1 için $x_0 = 2$ alınır ve ilk olarak $F'(2)$ hesaplanırsa $F'(2) = 1 + \sec^2 2 \cong 6,7744$ elde edilir. Buradan;

$$x_{j+1} = x_j - \frac{x_j + \tan x_j}{6,7744}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

$j = 0$ için

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 + \tan x_0}{6,7744} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{2 + \tan 2}{6,7744} = 2,0273$$

$j = 1$ için

$$x_2 = 2,0273 - \frac{2,0273 + \tan 2,0273}{6,7744} = 2,0286$$

$j = 2$ için

$$x_3 = 2,0287$$

Buradan görüleceği üzere $k_1 \cong 2,02867$ dır. Sonuç olarak

$$\lambda_1 = k_1^2 = 4,1158$$

şeklindedir. Buradan anlaşılacağı üzere $k_1, k_2, k_3, \dots$ bulmak için k_1 'de bulunan iterasyon sayısından daha fazla iterasyona gerek vardır. Birkaç kesişim noktasından sonra diğer kesişim noktaları $-\tan k$ 'nın dikey asimptotlarına çok yakındır. Yani çok büyük $n \gg 1$ değerleri için

$$k_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2}$$

bulunur. Bu durumda

$$\lambda_n \cong (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = \sin k_n x = \sin \left((2n - 1) \frac{\pi}{2} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

Örnek 1.3: $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$

probleminin bütün özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$a^4 + \lambda a^2 = 0$ denklemin karakteristik denklemi olmak üzere diğer örneklerde yapıldığı gibi farklı λ değerleri için özdeğerler araştırılır.

i) $\lambda = 0$ için $a^4 = 0$ karakteristik denklemi elde edilir. Burada kökler $a_{1,2,3,4} = 0$ dır. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

şeklindedir. Buradan

$$y'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2$$

$$y''(x) = 2c_3 + 6c_4 x$$

dir. Verilen sınır değerleri çözüme uygulanırsa

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) = c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$y'(1) = c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0$$

$$y''(0) = 2c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

olarak bulunur. $c_1 = c_3 = 0$ olduğundan ikinci ve üçüncü denklemden

$$c_2 + c_4 = 0$$

$$c_2 + 3c_4 = 0$$

elde edilir ve buradan $c_2 = c_4 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $y(x) = 0$ çözümü elde edilir. Yani $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ olsun. $a^4 - k^2 a^2 = 0$ karakteristik denklem olup bu denklemin kökleri $a_{1,2} = 0$, $a_3 = k$, $a_4 = -k$ dır. Böylece genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{kx} + c_4e^{-kx}$$

dir ve

$$y'(x) = c_2 + kc_3e^{kx} - kc_4e^{-kx}$$

$$y''(x) = k^2c_3e^{kx} + k^2c_4e^{-kx}$$

şeklinde olur. Sınır değerler çözümde kullanılırsa

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) = c_2 + c_3e^k + c_4e^{-k} = 0$$

$$y'(1) = c_2 + kc_3e^k - kc_4e^{-k} = 0$$

$$y''(0) = k^2c_3 + k^2c_4 = 0 \Rightarrow k^2(c_3 + c_4) = 0$$

$$\Rightarrow c_3 + c_4 = 0$$

$$\Rightarrow c_4 = -c_3$$

dir. Böylece ikinci ve üçüncü denklemden

$$c_2 + c_3e^k - c_3e^{-k} = 0 \Rightarrow c_2 + c_3(e^k - e^{-k}) = 0$$

$$c_2 + kc_3e^k + kc_3e^{-k} = 0 \Rightarrow c_2 + c_3k(e^k + e^{-k}) = 0$$

bulunur. Sıfırdan farklı çözüm araştırıldığından c_2 ve c_3 aynı anda sıfır olmamalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} 1 & e^k - e^{-k} \\ 1 & k(e^k + e^{-k}) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$k(e^k + e^{-k}) - (e^k - e^{-k}) = 0 \Rightarrow k(e^k + e^{-k}) = e^k - e^{-k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}}$$

bulunur. Bu ifade sadece $k = 0$ iken sağlanır, yani sıfırın dışından bu eşitliği sağlayan k değeri yoktur. Böylece $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ olarak bulunur. O halde çözüm $y(x) = 0$ dır. Bu durumda da özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ olsun. $a^4 + k^2a^2 = 0$ karakteristik denklemi için kökler $a_{1,2} = 0$, $a_3 = ik$, $a_4 = -ik$ olduğu görülür. Böylece

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx$$

genel çözümü elde edilir. Buradan

$$y'(x) = c_2 - kc_3 \sin kx + kc_4 \cos kx$$

$$y''(x) = -k^2c_3 \cos kx - k^2c_4 \sin kx$$

şeklinde dir. Verilen sınır değerleri çözüme uygulanırsa

$$y(0) = y''(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_3 = -k^2c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 = c_1$$

$$y(1) = y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 + c_4 \sin k = c_2 + kc_4 \cos k = 0$$

$$\Rightarrow c_4(\sin k - k \cos k) = 0$$

elde edilir. Aşikâr olmayan çözümler araştırıldığından $c_4 \neq 0$ olması için $\sin k - k \cos k = 0$ olmalıdır. Bu durumda aranan k değerleri

$$k_n \cos k_n = \sin k_n$$

bağıntısını sağlayan değerlerdir. Newton yöntemi kullanılarak

$$k_n \cong \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda

$$\lambda_n \cong (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = c_2 x + c_4 \sin k_n x$$

dır. Buradan $y(1) = 0$ sınır şartı ile $c_2 = -c_4 \sin k_n$ olur ve $c_4 = 1$ alınırsa $c_2 = -\sin k_n$ olacağından

$$\phi_n(x) = \sin(k_n x) - x \sin k_n$$

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right) - x \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde elde edilir.

1.3. Sturm-Liouville Teorisi

Bu bölümde özdeğer problemleriyle ilgili bazı teorik kavramlar verilecektir [3]. (Daha genel bilgiler için bkz. [8]). Öncelikle keline eş diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.1: İkinci mertebeden lineer homojen bir diferansiyel denklem

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \quad (x_1 < x < x_2)$$

veya denk olarak

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme kendine eş diferansiyel denklem denir. Burada $p(x), r(x) > 0$ ve $p'(x), q(x), r(x)$ fonksiyonları (x_1, x_2) üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Genel olarak

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0(x) + \lambda r(x)]y = 0 \quad (1.6)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem kendine eş formda olabilmesi için

$$A_1(x) = A_2'(x)$$

olması gerekir. Ancak $A_1(x) \neq A_2'(x)$ ise (1.6) denklemi uygun bir fonksiyonla çarpılarak kendine eş forma dönüştürülebilir. Bu fonksiyonu bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır.

(1.6) denkleminin her iki tarafı $A_2(x)$ ile bölünür.

$$y'' + \frac{A_1(x)}{A_2(x)} y' + \frac{(A_0(x) + \lambda r(x))}{A_2(x)} y = 0.$$

Her iki tarafı $\mu(x)$ ile çarpılır.

$$\mu(x)y'' + \mu(x)\frac{A_1(x)}{A_2(x)}y' + \frac{(A_0(x) + \lambda r(x))}{A_2(x)}\mu(x)y = 0.$$

Böylece denklem kendine eş olacağından

$$\mu'(x) = \mu(x)\frac{A_1(x)}{A_2(x)}$$

olmalıdır. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx$$

olur, buradan

$$\mu(x) = e^{\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx}$$

olduğu görülür.

Örnek 1.4: $y'' + (1 + \lambda)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$

denklemi için $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $r(x) = 1$ dir. $p(x) = 1 \Rightarrow p'(x) = 0$ olur. Böylece yukarıdaki tanımdan denklemin kendine eş olduğu sonucuna varılır.

Örnek 1.5: $y'' + \frac{\lambda}{x}y = 0$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 1$

problemde $r(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(-1,1)$ aralığında sürekli değildir. O halde kendine eş bir denklem değildir.

Örnek 1.6: $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$

denklemini kendine eş forma dönüştürünüz.

Çözüm: $A_1(x) = x$, $A_2(x) = x^2$ için $A_2'(x) = 2x \neq x = A_1(x)$ olduğundan kendine eş değildir. $\mu(x)$ çarpanını bulmadan önce verilen denklem $\frac{1}{x^2}$ ile çarpılır. Böylece

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0 \quad (1.7)$$

denklemini elde edilir. $\frac{A_1(x)}{A_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ olduğundan kendine eş denkleme dönüştürecek $\mu(x)$ çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$$

olarak bulunur. Şimdi (1.7) denkleminin her iki tarafı $\mu(x) = x$ ile çarpılırsa

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

kendine eş denklemini elde edilir.

Örnek 1.7: $y'' - y' + \lambda y = 0$

denklemini kendine eş forma dönüştürünüz.

Çözüm: $A_1(x) = -1$, $A_2(x) = 1$ için $A_2'(x) = 0 \neq -1 = A_1(x)$ olduğundan kendine eş denklem değildir. $\frac{A_1(x)}{A_2(x)} = -1$ olduğundan $\mu(x)$ çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx} = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

şeklinde elde edilir. Denklemin iki tarafı $\mu(x) = e^{-x}$ ile çarpılırsa

$$e^{-x}y'' - e^{-x}y' + \lambda e^{-x}y = 0$$

kendine eş bir denklem halini alır.

Örnek 1.8: $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, $x > 0$

denklemini kendine eş forma dönüştürünüz.

Çözüm: $A_1(x) = 1-x$, $A_2(x) = x$ için $\frac{A_1(x)}{A_2(x)} = \frac{1-x}{x}$ olur. $\mu(x)$ çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx} = e^{\int \frac{1-x}{x} dx} = \frac{x}{e^x}$$

şeklinde bulunur. Denklemi $\frac{1}{x}$ ile çarparsak

$$y'' + \frac{(1-x)}{x}y' + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

olur. Elde edilen bu denklemin iki tarafı $\mu(x) = \frac{x}{e^x}$ ile çarpılırsa

$$\frac{x}{e^x}y'' + \frac{1-x}{e^x}y' + \frac{\lambda}{e^x}y = 0$$

kendine eş bir denklem elde edilir.

Örnek 1.9: $(1-x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0$

denklemini kendine eş forma dönüştürünüz.

Çözüm: $A_2(x) = 1-x^2$, $A_1(x) = 2x$ için $\frac{A_1(x)}{A_2(x)} = \frac{2x}{1-x^2}$ dır. $\mu(x)$ çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx} = e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} = e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

olarak bulunur. Denklem $\mu(x)$ ile çarpılmadan önce $\frac{1}{1-x^2}$ ile çarpılırsa

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

elde edilir. Şimdi $\mu(x)$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{1-x^2}y'' + \frac{2x}{(1-x^2)^2}y' + \frac{\lambda y}{(1-x^2)^2} = 0$$

kendine eş denklemi elde edilir.

Tanım 1.2: L bir operatör olmak üzere

$$L := \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) = D[p(x)D] + q(x)$$

şeklinde yazılabilen operatörlere kendine eş operatör denir. Böylece kendine eş bir diferansiyel denklem

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin; $y'' + \lambda y = 0$ denkleminin kendine eş operatörü $L = D^2$ dir.

Tanım 1.3: L kendine eş bir operatör olmak üzere

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u])dx = 0, \quad x_1 < x < x_2$$

sağlanıyorsa L operatörüne simetrik operatör adı verilir. Burada u ve v verilen sınır değerlerini sağlayan ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlardır.

Örnek 1.10: $L = D^2$ operatörünün $[0,1]$ aralığı üzerinde aşağıdaki sınır koşullarına göre simetrik olup olmadığını araştırınız.

- a) $y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
- b) $y(0) - y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Çözüm:

a) $L = D^2$ operatörünün $[0,1]$ üzerinde, verilen sınır değerlerine göre simetrikliği için

$$\int_0^1 (uL[v] - vL[u]) dx = 0$$

eşitliği gösterilmelidir. u ve v verilen sınır değerlerini sağlayan fonksiyonlar olmak üzere

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \quad (1.8)$$

olur. $L = D^2$ ise $L[v] = v''$ ve $L[u] = u''$ olmak üzere

$$\int_0^1 (uL[v] - vL[u]) dx = \int_0^1 uv'' dx - \int_0^1 vu'' dx$$

elde edilir. Son eşitliğe kısmi integrasyon uygulanır ve (1.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 uv'' dx - \int_0^1 vu'' dx &= uv' \Big|_0^1 - \int_0^1 u'v' dx - vu' \Big|_0^1 + \int_0^1 v'u' dx \\ &= u(1)v'(1) - u(0)v'(0) - v(1)u'(1) + v(0)u'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $L = D^2$ operatörü verilen sınır değerlerine göre $[0,1]$ aralığı üzerinde simetriktir.

b) $L = D^2$ operatörünün $[0,1]$ üzerinde verilen sınır değerlerine göre simetrikliği göstermek için

$$\int_0^1 (uL[v] - vL[u]) dx$$

integral değerinin sıfıra eşit olup olmadığına bakılır. u ve v verilen sınır değerlerini sağlayacağından

$$u(0) - u(1) = 0, \quad v(0) - v(1) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad v'(1) = 0 \quad (1.9)$$

şeklinde olur. $L = D^2$ olduğundan

$$\int_0^1 (uL[v] - vL[u]) dx = \int_0^1 uv'' dx - \int_0^1 vu'' dx$$

olur. Kısmi integrasyon uygulanır ve (1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 uv'' dx - \int_0^1 vu'' dx &= uv' \Big|_0^1 - \int_0^1 u'v' dx - vu' \Big|_0^1 + \int_0^1 v'u' dx \\ &= u(1)v'(1) - u(0)v'(0) - v(1)u'(1) + v(0)u'(0) \\ &= -u(0)v'(0) + v(0)u'(0) \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak elde edilen son eşitlik sıfıra eşit olmadığından $L = D^2$ operatörü verilen sınır değerlerine göre $[0,1]$ aralığı üzerinde simetrik değildir.

Önerme 1.1 (Lagrange eşitliği): $L = D[p(x)D] + q(x)$, $D = \frac{d}{dx}$ operatörü $[x_1, x_2]$ üzerinde kendine eş operatör olmak üzere u ve v aynı aralıkta ikinci mertebeden türeve sahipse

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} [p(x)W(u, v)(x)]$$

sağlanır. Burada

$$W(u, v)(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu'$$

Wronskian Fonksiyonudur. Ayrıca

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} [p(x)W(u, v)(x)]$$

eşitliğine Lagrange eşitliği denir.

İspat: L operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} L[v] &= (D[p(x)D] + q(x))[v] \\ &= \frac{d}{dx} (p(x)v') + q(x)v \end{aligned}$$

olduğu görülür. $L[u]$ da benzer şekilde bulunur. O halde

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u \frac{d}{dx} (p(x)v') + q(x)uv - v \frac{d}{dx} (p(x)u') - q(x)uv \\ &= u \frac{d}{dx} (p(x)v') - v \frac{d}{dx} (p(x)u') \\ &= u(p'(x)v' + p(x)v'') - v(p'(x)u' + p(x)u'') \end{aligned} \quad (1.10)$$

$W(u, v)(x) = uv' - vu'$ eşitliğinin her iki tarafı $p(x)$ ile çarpılır ve türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [p(x)W(u, v)(x)] &= \frac{d}{dx} (p(x)uv' - p(x)vu') \\ &\Rightarrow p'(x)uv' + p(x)(u'v' + uv'') \\ &\quad - p'(x)vu' - p(x)(v'u' + vu'') \\ &\Rightarrow u(p'(x)v' + p(x)v'') - v(p'(x)u' + p(x)u'') \end{aligned} \quad (1.11)$$

elde edilir. Böylece (1.10) ve (1.11) ifadelerinin eşit olduğu görülür. Dolayısıyla

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} [p(x)W(u, v)(x)]$$

dir.

Teorem 1.2: $L = D[p(x)D] + q(x)$ kendine eş operatörü (x_1, x_2) üzerinde simetriktir.

$$\Leftrightarrow p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

dir. Burada u ve v ilgili sınır değerlerini sağlayan ve iki kez türevlenebilen fonksiyonlardır.

İspat: Lagrange eşitliği kullanılıp her iki tarafın $[x_1, x_2]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (p(x)W(u, v)(x)) dx = p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

dir. O halde operatörün simetrikliği tanımından

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) dx = p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

eşitliği sağlanır.

1.4. Simetrik Operatörün Özellikleri

Tanım 1.4: f ve g fonksiyonları (x_1, x_2) üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere f ve g 'nin ortogonal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x) dx = 0$$

olmasıdır. f ve g 'nin verilen bir $r(x) > 0$ fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerekli ve yeterli koşul ise

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)f(x)g(x) dx = 0$$

olmasıdır. Burada (x_1, x_2) aralığı bazı durumlarda kapalı, yarı açık veya sonsuz olabilir.

Örnek 1.11: $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$ fonksiyonları $(-\pi, \pi)$ üzerinde $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonal olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos x dx &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^2 x dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{3} (\cos^3(\pi) - \cos^3(-\pi)) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani f ve g , $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Örnek 1.12: $f(x) = 1$, $g(x) = 1 - x$ fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde $r(x) = e^{-x}$ fonksiyonuna göre ortogonal olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1-x)e^{-x} dx &= -(1-x)e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür ve dolayısıyla $r(x) = e^{-x}$ fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Teorem 1.3: $L[y] + \lambda r(x)y = 0$, $x_1 < x < x_2$ (1.12)

denklemindeki L operatörü simetrik bir operatör olsun. λ_n ve λ_k , L operatörünün farklı iki özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ ile gösterilsin. $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ özfonksiyonları $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre birbirine diktir(ortogonaldır). Diğer bir ifadeyle

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_n(x) \phi_k(x) r(x) dx = 0, \quad n \neq k$$

dir.

İspat: λ_n ve λ_k farklı özdeğerler ($\lambda_n \neq \lambda_k$), karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ olsun. Özfonksiyonlar (1.12) denklemini sağlayacağından

$$L[\phi_n(x)] + \lambda_n r(x) \phi_n(x) = 0 \quad (1.13)$$

$$L[\phi_k(x)] + \lambda_k r(x) \phi_k(x) = 0 \quad (1.14)$$

yazılır. (1.13) eşitliği $\phi_k(x)$, (1.14) eşitliği $\phi_n(x)$ ile çarpılır, elde edilen sonuçlar birbirinden çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\phi_k(x) L[\phi_n(x)] - \phi_n(x) L[\phi_k(x)] = (\lambda_k - \lambda_n) r(x) \phi_k(x) \phi_n(x)$$

bulunur. Şimdi $[x_1, x_2]$ üzerinde her iki tarafın integrali alınır

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_k(x) L[\phi_n(x)] - \phi_n(x) L[\phi_k(x)] dx = (\lambda_k - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_k(x) \phi_n(x) dx$$

elde edilir. L operatörü simetrik olduğundan sol taraf sıfırdır. Dolayısıyla $(\lambda_k - \lambda_n) \neq 0$ olduğundan

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_k(x) \phi_n(x) dx = 0$$

dır. Buradan $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ 'in $r(x)$ 'e göre ortogonal olduğu görülür.

Teorem 1.4: $L[y] + \lambda r(x)y = 0$, $x_1 < x < x_2$ probleminde L operatörü simetrik ise tüm özdeğerleri reeldir.

İspat: Kabul edelim ki λ_k bir kompleks özdeğer ve karşılık gelen özfonksiyon ise $\phi_k(x)$ olsun. L simetrik operatörü için

$$L(\phi_k(x)) + \lambda_k r(x) \phi_k(x) = 0 \quad (1.15)$$

dır. Her iki tarafın eşleniği alınır ki bu L sabit katsayılı operatör için $L = \bar{L}$ sağlanır.

$$L(\overline{\phi_k(x)}) + \bar{\lambda}_k r(x) \overline{\phi_k(x)} = 0 \quad (1.16)$$

olur. Böylece λ_k nın özfonksiyonu $\phi_k(x)$, $\bar{\lambda}_k$ nın özfonksiyonu $\overline{\phi_k(x)}$ olur. (1.15) eşitliği $\overline{\phi_k(x)}$ ile (1.16) eşitliği $\phi_k(x)$ ile çarpılır. Böylece

$$L(\phi_k(x)) \overline{\phi_k(x)} + \lambda_k r(x) \phi_k(x) \overline{\phi_k(x)} = 0$$

$$L(\overline{\phi_k(x)}) \phi_k(x) + \bar{\lambda}_k r(x) \overline{\phi_k(x)} \phi_k(x) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılır ve (x_1, x_2) üzerinde integrali alınır

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(L(\phi_k(x)) \overline{\phi_k(x)} - L(\overline{\phi_k(x)}) \phi_k(x) \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) r(x) \phi_k(x) \overline{\phi_k(x)} dx = 0$$

elde edilir. L simetrik olduğundan sol taraf sıfırdır ve Teorem 1.3'e göre farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır. Dolayısıyla $\lambda_k - \bar{\lambda}_k \neq 0$ olduğundan

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_k(x) \overline{\phi_k(x)} dx = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} r(x) |\phi_k(x)|^2 dx = 0$$

olmalıdır. Ancak $|\phi_k(x)|^2 > 0$ ve $r(x) > 0$ olduğundan $r(x)|\phi_k(x)|^2 > 0$ olur ve bundan dolayı bu integral hiçbir zaman sıfır olmaz. Böylece kompleks özdeğer kabülü yanlıştır. O halde tüm özdeğerler reeldir.

Teorem 1.5: Simetrik bir operatörün özdeğerleri

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

şeklinde sonsuz bir dizi oluştururlar.

1.5. Regüler Sturm-Liouville Sistemleri

Bu ana kadar verilen özdeğer problemlerinin çoğu ayrılmış sınır koşullarını içermektedir. Bu tip problemler aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

$$L = D(p(x)D) + q(x) \text{ olmak üzere}$$

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad p(x_1) = p(x_2)$$

$$B_1(y) = a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1), \quad (a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0)$$

$$B_2(y) = a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2), \quad (a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$$

dir. Bu sınıfa ait bir özdeğer problemi regüler Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılmaktadır.

Regüler Sturm-Liouville sistemindeki operatörün ayrılmış sınır koşullarına göre simetrik olduğunu göstermek için

$$p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. u ve v ayrılmış sınır koşullarını sağlayan türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$a_{11}u(x_1) + a_{12}u'(x_1) = 0$$

$$a_{11}v(x_1) + a_{12}v'(x_1) = 0$$

şeklinde olur. Burada $a_{ij}; i, j = 1, 2$ sabitlerdir. Bu denklemlerin sağlanması için a_{ij} katsayıları aynı anda sıfır olmamalıdır, yani

$$\begin{vmatrix} u(x_1) & u'(x_1) \\ v(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) \\ u'(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = W(u, v)(x_1) = 0$$

dir. Benzer şekilde diğer sınır değeri için de $W(u, v)(x_2) = 0$ sağlanır. Böylece

$$p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

dır. Dolayısıyla L operatörü simetriktir.

Regüler Sturm-Liouville sistemi simetrik operatöre sahip olduğundan özfonksiyonlar ortogonaldır, simetrik operatörün özdeğerleri reeldir ve özdeğerler sonsuz bir dizi oluşturur. Bunlar dışında aşağıdaki önemli teoremi de verebiliriz.

Teorem 1.6: Regüler Sturm-Liouville sistemi basit özdeğerlere sahiptir. Yani her bir özdeğere sadece bir özfonksiyon karşılık gelir.

İspat: Kabul edelim ki λ_n özdeğerine karşılık gelen birbirinden farklı $\phi_k(x)$ ve $\phi_n(x)$ özfonksiyonları mevcut olsun. O halde her özfonksiyon çözüm olduğundan $x = x_1$ ve $x = x_2$ 'de ilgili sınır koşullarını sağlamaktadır. Yani,

$$a_{11}\phi_n(x_1) + a_{12}\phi_n'(x_1) = 0$$

$$a_{11}\phi_k(x_1) + a_{12}\phi_k'(x_1) = 0$$

denklemleri için a_{11} ve a_{12} aynı anda sıfır olamayacağından katsayılar determinantı sıfır olmalıdır ve böylece

$$W(\phi_n, \phi_k)(x_1) = 0$$

elde edilir. Ancak Wronskian özelliğinden biliyoruz ki Wronskian bir noktada sıfır ise aralığın tümünde sıfırdır. Sonuç olarak bir denklemin bir aralıktaki iki çözümü bir noktada sıfır ise aralığın tamamında da sıfır olacağından $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ 'in lineer bağımlı olduğu görülür. Dolayısıyla $\phi_n(x)$ ve $\phi_k(x)$ aynı özfonksiyonu temsil etmektedir.

1.6. Periyodik Sturm-Liouville Sistemi

İkinci önemli sınıfa ait özdeğer problemleri $L = D(p(x)D) + q(x)$, $p(x_1) = p(x_2)$ olmak üzere

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0, \quad x_1 < x < x_2$$

$$y(x_1) = y(x_2), \quad y'(x_1) = y'(x_2)$$

şeklindeki problemlerdir. Bu tür problemler ayrılmamış sınır koşullarına sahiptir ve periyodik Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır.

Periyodik Sturm-Liouville sistemine ait operatör ayrılmamış sınır koşullarına göre simetriktir. Bunu göstermek için

$$p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

olduğu gösterilmelidir. Burada u ve v verilen sınır değerlerini sağlayan sürekli, ikinci mertebeden türeve sahip olsunlar. u ve v için

$$u(x_1) = u(x_2), \quad u'(x_1) = u'(x_2) \quad (1.17)$$

$$v(x_1) = v(x_2), \quad v'(x_1) = v'(x_2) \quad (1.18)$$

olur ve $p(x_1) = p(x_2)$ dir.

$$p(x)W(u, v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow p(x_2)W(u, v)(x_2) - p(x_1)W(u, v)(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow p(x_2)(W(u, v)(x_2) - W(u, v)(x_1)) = 0$$

dir. $p(x_2) \neq 0$ olduğundan $W(u, v)(x_2) - W(u, v)(x_1) = 0$ olmalıdır. Ayrıca

$$W(u, v)(x_2) = \begin{vmatrix} u(x_2) & v(x_2) \\ u'(x_2) & v'(x_2) \end{vmatrix} = u(x_2)v'(x_2) - u'(x_2)v(x_2)$$

$$W(u, v)(x_1) = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) \\ u'(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = u(x_1)v'(x_1) - u'(x_1)v(x_1)$$

dir. Son iki ifade taraf tarafa çıkarılır ve (1.17) ve (1.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$W(u, v)(x_2) - W(u, v)(x_1) = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $L = D(p(x)D) + q(x)$ operatörü $y(x_1) = y(x_2)$, $y'(x_1) = y'(x_2)$ ayrılmamış sınır koşullarına göre simetriktir.

Periyodik Sturm-Liouville sistemini Regüler Sturm-Liouville sisteminden en önemli farkı ise özdeğerlerin basit olması gerekmez. Yani periyodik Sturm-Liouville sisteminde bir özdeğere birden fazla özfonksiyon karşılık gelir.

Örnek 1.13 : $y'' + \lambda y = 0$, $-\pi < \theta < \pi$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $p(\theta) = 1$ olduğundan, $p(-\pi) = p(\pi) = 1$ dir ve $L = D^2$ dir.

i) $\lambda = 0$ özdeğer olup olmadığı incelenir. Burada karakteristik denklem $a^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 0$ olur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = c_1 + c_2 \theta$$

dir. Böylece $y' = c_2$ olur ve sınır değerleri kullanılırsa

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 - c_2 \pi = c_1 + c_2 \pi$$

$$\Rightarrow 0 = 2c_2 \pi \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow c_2 = c_2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla c_1 keyfi olur ve $c_1 = 1$ seçilir. O halde $\lambda = 0$ özdeğer olur ve karşılık gelen özfonksiyon $y_0 = \phi_0 = 1$ dir.

ii) $\lambda = k^2 > 0$ için karakteristik denklem $a^2 + k^2 = 0$ olur ve kökleri $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ dir. Böylece genel çözüm

$$y = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta$$

şeklindedir. Sınır değerleri kullanılırsa

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 \cos k\pi - c_2 \sin k\pi = c_1 \cos k\pi + c_2 \sin k\pi$$

$$\Rightarrow 0 = 2c_2 \sin k\pi$$

olur, buradan $c_2 \neq 0$ için

$$\sin k\pi = 0 \Rightarrow k = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

dir.

$$y' = -kc_1 \sin k\theta + kc_2 \cos k\theta \text{ ise}$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow kc_1 \sin k\pi + kc_2 \cos k\pi = -kc_1 \sin k\pi + kc_2 \cos k\pi$$

$$\Rightarrow 2kc_1 \sin k\pi = 0$$

bulunur. $c_1 \neq 0$ için

$$\sin k\pi = 0 \Rightarrow k = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

dir. c_1 ve c_2 'nin keyfi olduğu görülür. O halde

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

özdeğerdir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\phi_n(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi_k(\theta) = c_3 \cos n\theta + c_4 \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Burada c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) keyfi sabitlerdir öyle ki $\phi_n(\theta)$ ve $\phi_k(\theta)$ lineer bağımsızdır. En basit durum olarak $c_2 = c_3 = 0$ ve $c_1 = c_4 = 1$ seçilirse

$$\phi_n(\theta) = \cos n\theta \text{ ve } \phi_k(\theta) = \sin n\theta$$

bulunur ve bu özfonksiyonlar $(-\pi, \pi)$ üzerinde $r(x) = 1$ fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sin n\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2n\theta d\theta = -\frac{1}{4n} (\cos 2n\theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerine karşılık

$$\phi_n(\theta) = \cos n\theta \text{ ve } \phi_k(\theta) = \sin n\theta$$

özfonksiyonları elde edilir.

1.7. Çözümlü Alıştırma

$$1) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

probleminin bütün özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Denklemin özdeğerlerini bulmak için λ 'nın durumları irdelenir.

i) $\lambda = 0$ olsun. $a^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $a_1 = a_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

dir ve $y'(x) = c_2$ olur. Verilen sınır değerler ile

$$y(1) = 0 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 0 = c_2$$

bulunur. Dolayısıyla $c_1 = c_2 = 0$ dir. Böylece $y(x) = 0$ aşikâr çözümü elde edilir. O halde $\lambda = 0$ durumunda özdeğer yoktur.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda $a^2 - k^2 = 0$ karakteristik denkleminde $a_1 = k, a_2 = -k$ bulunur. Buradan genel çözüm

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

şeklindedir.

$$y'(x) = kc_1 e^{kx} - kc_2 e^{-kx}$$

olduğundan sınır değerler kullanılarak

$$y'(0) = 0 = kc_1 - kc_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$y(1) = 0 = c_1 e^k + c_2 e^{-k}$$

elde edilir. Son denklemden $c_1(e^k + e^{-k}) = 0$ dir. $e^k + e^{-k} \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0 = c_2$ dir. Böylece $y(x) = 0$ elde edilir. $\lambda = -k^2$ durumunda da özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ durumunda ise karakteristik denklem $a^2 + k^2 = 0$ şeklinde olup bu denklemin kökleri $a_1 = ik, a_2 = -ik$ dir. Böylece genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

olarak bulunur. Elde edilen çözüme $y'(0) = 0, y(1) = 0$ sınır şartları uygulanırsa

$$y'(x) = -kc_1 \sin kx + kc_2 \cos kx$$

olduğundan

$$y'(0) = 0 = kc_2$$

elde edilir. Buradan $k \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ bulunur. $y(1) = 0$ sınır şartı ile

$$y(1) = 0 = c_1 \cos k$$

dir. Aşikâr olmayan çözümler araştırıldığından $c_1 \neq 0$ olmalıdır. Son denklemden $\cos k = 0$

elde edilir. O halde

$$k = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\phi_n(x) = c_1 \cos\left((2n + 1) \frac{\pi}{2} x\right), \quad n = 0, 1, 2$$

dir. Özel olarak $c_1 = 1$ alınırsa

$$\phi_n(x) = \cos\left((2n + 1) \frac{\pi}{2} x\right), \quad n = 0, 1, 2$$

elde edilir.

$$2) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

probleminin bütün özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y'' + \lambda y = 0$ nin karakteristik denklemi $a^2 + \lambda = 0$ dır.

i) $\lambda = 0$ durumunda karakteristik denklem $a^2 = 0$ olup $a_1 = a_2 = 0$ karakteristik denklemin kökleridir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklinde olur. Verilen sınır şartlarıyla

$$y'(0) = y'(\pi) = c_2 = 0, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Buradan $y(x) = c_1$ çözümü bulunur. Dolayısıyla $\lambda = 0$ özdeğerdir. Bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon $c_1 = 1$ için $\phi_0(x) = 1$ olarak bulunur.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ için karakteristik denklem $a^2 - k^2 = 0$ olup denklemin kökleri $a_1 = k, a_2 = -k$ dır. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

dir. Buradan

$$y'(x) = k c_1 e^{kx} - k c_2 e^{-kx}$$

olur. $y'(0) = 0$ sınır şartı ile

$$y'(0) = 0 = k(c_1 - c_2) = 0$$

bulunur. $k \neq 0$ olduğundan $c_1 - c_2 = 0$ olmalıdır. Buradan $c_1 = c_2$ dir. Diğer sınır şartıyla

$$y'(\pi) = 0 = k c_1 (e^{k\pi} - e^{-k\pi})$$

elde edilir. Buradan $k(e^{k\pi} - e^{-k\pi}) \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ dır. Dolayısıyla

$$c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

trivial çözümü elde edilir. Böylece $\lambda = -k^2$ durumunda özdeğer olmadığı görülür.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ durumunda karakteristik denklem $a^2 + k^2 = 0$ dir. Denklemin

kökleri $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

olarak bulunur. Sınır şartlarının kullanılabilmesi için

$$y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

şeklinde bulunur. $y'(0) = 0$ sınır şartı ile

$$y'(0) = 0 = k c_2$$

bulunur. $k \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olmalıdır. $y'(\pi) = 0$ sınır şartı ile

$$y'(\pi) = 0 = -c_1 k \sin k\pi$$

dir. $c_1 \neq 0$ olması için $\sin k\pi = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $k = n$ olur ve

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

$$3) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

probleminin bütün özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Denklemin karakteristik denklemi $a^2 + \lambda = 0$ şeklindedir. λ durumları için özdeğerler aşağıdaki gibi incelenir.

i) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda karakteristik denklem $a^2 = 0$ olduğundan kökler $a_1 = a_2 = 0$ dır. O halde genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

dir. Sınır değerleri çözümde yerine yazılırsa

$$y(-\pi) = 0 = c_1 - \pi c_2$$

$$y(\pi) = 0 = c_1 + \pi c_2$$

bulunur. Buradan $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $y(x) = 0$ çözümü elde edildiğinden $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

ii) $\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Bu durumda ise karakteristik denklemin kökleri $a^2 - k^2 = 0$ denkleminde $a_1 = k$, $a_2 = -k$ olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

şeklindedir. Verilen sınır değerleri kullanılırsa

$$y(-\pi) = 0 = c_1 e^{-k\pi} + c_2 e^{k\pi}$$

$$y(\pi) = 0 = c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{vmatrix} e^{-k\pi} & e^{k\pi} \\ e^{k\pi} & e^{-k\pi} \end{vmatrix} = e^{-2k\pi} - e^{2k\pi} \neq 0$$

dır. O halde $c_1 = c_2 = 0$ dır. Bu durumda $y(x) = 0$ aşikâr çözümü elde edildiğinden özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = k^2 > 0$ olsun. Karakteristik denklemin kökleri $a^2 + k^2 = 0$ denkleminde $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ olarak bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

şeklinde elde edilir. Sınır değerler çözümde yerine yazılırsa

$$y(-\pi) = 0 = c_1 \cos k\pi - c_2 \sin k\pi$$

$$y(\pi) = 0 = c_1 \cos k\pi + c_2 \sin k\pi$$

bulunur. İki denklem eşitlenirse

$$c_1 \cos k\pi - c_2 \sin k\pi = c_1 \cos k\pi + c_2 \sin k\pi$$

$$2c_2 \sin k\pi = 0 \Rightarrow k = n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (c_2 \neq 0)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir ve bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon

$$y_n(x) = \phi_n(x) = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir. Sınır değerleri ile c_1 ve c_2 sabitleri bulunur.

$$y_n(-\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \cos n\pi - c_2 \sin n\pi = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

dır. Burada $\sin n\pi = 0$ ve $\cos n\pi \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ ve $c_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Ek olarak

$$y_n(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin n\pi = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

için de $c_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Dolayısıyla özfonksiyonlar $c_2 = 1$ alınırsa

$$\phi_n(x) = \sin nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur.

$$4) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

özdeğer probleminin negatif özdeğerlerinin olmadığını ispatlayınız.

Çözüm: Varsayalım ki $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda özdeğer mevcut olsun. Denklemin karakteristik denklemi $a^2 - k^2 = 0$ dır. Bu denklemin kökleri $a_1 = k$, $a_2 = -k$ olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

şeklindedir. Buradan

$$y'(x) = c_1 k e^{kx} - c_2 k e^{-kx}$$

olur. Sınır şartları yerine yazılırsa

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$y(1) + y'(1) = 0 = c_1 e^k + c_2 e^{-k} + k c_1 e^k - k c_2 e^{-k} \\ \Rightarrow c_1 (e^k - e^{-k} + k e^k + k e^{-k}) = 0$$

elde edilir. Burada $e^k - e^{-k} + k e^k + k e^{-k} \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0 = c_2$ bulunur. O halde $y(x) = 0$ elde edilir. Bu ise $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda özdeğer olmasıyla çelişir.

$$5) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

özdeğer problemi verilsin.

a) $\lambda_0 = 0$ değerinin $\phi_0(x) = 1$ özfonksiyonuna bağlı özdeğer olduğunu gösteriniz.

b) Negatif özdeğerler olmadığını gösteriniz.

c) n . pozitif özdeğerin n^2 olduğunu ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

a) $\lambda = 0$ olsun. Karakteristik denklem $a^2 = 0$ olduğundan bu denklemin kökleri $a_1 = a_2 = 0$ dır. O halde genel çözüm

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

dir. $y'(-\pi) = y'(\pi)$ sınır şartı ile

$$y'(x) = c_2 \Rightarrow y'(-\pi) = y'(\pi) = c_2$$

olur. $y(-\pi) = y(\pi)$ sınır şartı kullanılırsa

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 - \pi c_2 = c_1 + \pi c_2 \\ \Rightarrow c_2 2\pi = 0$$

bulunur. Buradan $c_2 = 0$ dır. $c_1 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğundan $\lambda_0 = 0$ özdeğerdir. $c_1 = 1$ olarak seçilirse bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon $\phi_0(x) = 1$ dir.

b) Varsayalım ki negatif özdeğerler mevcut olsun. Bu özdeğerler $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda irdelenir. Karakteristik denklem $a^2 - k^2 = 0$ dır. Buradan kökler $a_1 = k$, $a_2 = -k$ olarak bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

dir. Verilen $y(-\pi) = y(\pi)$ sınır şartıyla

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 e^{-k\pi} + c_2 e^{k\pi} = c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi} \\ \Rightarrow (c_1 - c_2)(e^{-k\pi} - e^{k\pi}) = 0$$

bulunur. Burada $e^{-k\pi} - e^{k\pi} \neq 0$ olduğundan $c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$ olur.

$$y'(x) = k c_1 e^{kx} - k c_2 e^{-kx}$$

olduğundan ve $c_1 = c_2$ ise

$$y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow c_1 k(e^{-k\pi} - e^{k\pi}) = k c_1 (e^{k\pi} - e^{-k\pi})$$

$$\Rightarrow c_1 2k(e^{-k\pi} - e^{k\pi}) = 0$$

elde edilir. $e^{k\pi} - e^{-k\pi} \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olmalıdır. $c_1 = c_2$ olduğundan $c_2 = 0$ bulunur. Böylece $y(x) = 0$ trivial çözüm elde edilir. Bu ise $\lambda = -k^2 < 0$ durumunda özdeğer olmasıyla çelişir. O halde negatif özdeğer yoktur.

c) $\lambda = k^2 > 0$ durumunda öncelikle karakteristik denklem yazılır. Bu denklem ise $a^2 + k^2 = 0$ dır. Buradan karakteristik denklemin kökleri $a_1 = ik$, $a_2 = -ik$ olarak bulunur. Böylece genel çözüm

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

şeklinde bulunur.

$$y'(x) = -kc_1 \sin kx + kc_2 \cos kx$$

ise ve sınır şartları çözümde yerine yazılırsa

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 \cos k\pi - c_2 \sin k\pi = c_1 \cos k\pi + c_2 \sin k\pi$$

$$\Rightarrow 2c_2 \sin k\pi = 0$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow kc_1 \sin k\pi + kc_2 \cos k\pi = -kc_1 \sin k\pi + kc_2 \cos k\pi$$

$$\Rightarrow 2kc_1 \sin k\pi = 0$$

elde edilir. Aşıkâr olmayan çözüm araştırıldığından $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ olmalıdır. Böylece yukarıdaki denklemlerden $\sin k\pi = 0$ olduğu elde edilir. O halde

$$k = n , \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur. Böylece

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx$$

dir. Burada $c_1 = c_2 = 1$ keyfi alınır

$$\phi_n(x) = \cos nx + \sin nx , \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde bulunur.

6) $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) = 0$

probleminin bütün özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemi $a^2 + 2a + (1 - \lambda) = 0$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri ise

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - \lambda)}}{2} = -1 \pm \sqrt{\lambda}$$

dır. λ durumları için özdeğerler araştırılır.

i) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda kökler $a_{1,2} = -1$ dir. Genel çözümün

$$y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x)$$

olduğu görülür. Sınır şartları çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) = \frac{c_2}{e} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (e \neq 0)$$

elde edilir. Buradan $y(x) = 0$ elde edilir. Yani $\lambda = 0$ durumunda özdeğer mevcut değildir.

ii) $\lambda = k^2 > 0$ durumunda karakteristik denklemin kökleri $a_1 = -1 + k$ ve $a_2 = -1 - k$ dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y(x) = c_1 e^{(-1+k)x} + c_2 e^{(-1-k)x}$$

şeklinde bulunur. Sınır şartları kullanılırsa

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$y(1) = c_1 e^{(-1+k)} + c_2 e^{(-1-k)} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 e^{-1} \left(e^k - \frac{1}{e^k} \right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-1} \left(e^k - \frac{1}{e^k} \right) \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

elde edilir. Buradan $y(x) = 0$ aşıkâr çözümü elde edilir. O halde $\lambda = k^2 > 0$ durumunda özdeğer yoktur.

iii) $\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Bu durumda karakteristik denklemin kökleri

$a_1 = -1 + ik$, $a_2 = -1 - ik$ şeklindedir. Böylece

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)$$

genel çözümü elde edilir. $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ sınır şartları kullanılarak

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) = e^{-1}(c_2 \sin k) = 0$$

bulunur. Son denklemde $c_2 \neq 0$ olması için $\sin k = 0$ olmalıdır. Buradan

$$k = n\pi , \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 , \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. $c_2 = 1$ olarak seçilirse bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\phi_n(x) = e^{-x} \sin n\pi x , \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

7) $y'' + 2y' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$

özdeğer problemi verilsin.

- a) $\lambda = 1$ in özdeğer olmadığını gösteriniz.
- b) $\lambda < 1$ olacak şekilde hiçbir özdeğer olmadığını gösteriniz.
- c) $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$ özdeğerine bağlı olan n . pozitif özfonksiyonunun $\phi_n(x) = e^{-x} \sin n\pi x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

- a) Denklemin karakteristik kökleri $a^2 + 2a + \lambda = 0$ denkleminde

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2} \Rightarrow -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

olarak bulunur. Buradan $\lambda = 1$ için $a_1 = a_2 = -1$ dir. Böylece genel çözüm

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

şeklinde elde edilir. Sınır şartları çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) = e^{-1} c_2 = 0$$

olarak bulunur. Buradan $e^{-1} \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olur. Dolayısıyla $y(x) = 0$ trivial çözüm bulunur. Böylece $\lambda = 1$ özdeğer değildir.

- b) Varsayalım ki $\sqrt{1-\lambda} = k^2 > 0$ durumunda özdeğer mevcut olsun. Burada denklemin karakteristik kökleri $a_1 = -1 + k$, $a_2 = -1 - k$ şeklindedir. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 e^{(-1+k)x} + c_2 e^{(-1-k)x}$$

olarak bulunur. Verilen sınır şartları çözümde kullanılırsa

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$y(1) = 0 = c_1 (e^{-1+k} - e^{-1-k}) = 0$$

olarak elde edilir. Burada $e^{-1+k} - e^{-1-k} \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0 = c_2$ bulunur. O halde $y(x) = 0$ elde edilir ki bu $\sqrt{1-\lambda} = k^2 > 0$ durumunda özdeğerlerin mevcut olmasıyla çelişir.

- c) $\sqrt{1-\lambda} = -k^2 < 0$ olsun. Denklemin karakteristik kökleri $a_1 = -1 + ki$ ve $a_2 = -1 - ki$ olarak bulunur. Böylece genel çözüm

$$y(x) = e^{-x} (c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)$$

şeklinde elde edilir. $y(0) = y(1) = 0$ sınır şartları çözümde yerine yazılırsa

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y(1) = 0 = e^{-1} c_2 \sin k = 0$$

elde edilir. Burada $e^{-1} \neq 0$ dır ve $c_2 \neq 0$ olması için $\sin k = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$k = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

için

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

özdeğerlerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\phi_n(x) = c_2 e^{-x} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

dir. Özel olarak $c_2 = 1$ keyfi alınır

$$\phi_n(x) = e^{-x} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde elde edilir.

1.8. Singüler Sturm-Liouville Sistemleri

Uygulamada rastlanan bir çok Sturm-Liouville sistemi bu sınıfa aittir.

Tanım 1. 4: $p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$ $(x_1 < x < x_2)$

Sturm-Liouville probleminde, $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde aşağıdakilerden biri ya da birden fazlasının gerçekleşmesi durumunda ilgili probleme singülerdir denir.

a) $p(x_1) = 0$ ve(veya) $p(x_2) = 0$

b) $p(x)$, $q(x)$ veya $r(x)$, $x = x_1$ (veya $x = x_2$)'de veya her iki uçta sonsuzdur.

c) x_1 ve (veya) x_2 sonsuzdur.

Bu sınıfa ait bazı denklemler aşağıda verilmiştir.

1) $\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1$ Legendre denklemi

$p(x)$ fonksiyonu $x = \pm 1$ için $p(x) = 0$ 'dır.

2) $\frac{d}{dx}(xy') - \frac{\gamma^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < b$ Bessel denklemi

$p(x) = x$, $x = 0$ için $p(0) = 0$ 'dir.

$\gamma \neq 0$ için $q(x) = \frac{-\gamma^2}{x}$, $x = 0$ 'da sonsuzdur.

3) $\frac{d}{dx}(xe^{-x}y') + \lambda e^{-x}y = 0, \quad 0 < x < \infty$ Laguerre denklemi

$x = 0$ 'da Laguerre denklemi singülerdir. Çünkü $x \rightarrow \infty$ için $p(x) \rightarrow 0$ 'dir. Aynı zamanda aralığın bir ucu sonsuzdur.

$$4) \quad \frac{d}{dx}(e^{-x^2}y') + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad \text{Hermite denklemi}$$

Aralık iki ucunda da sonsuzdur. Aynı zamanda $|x| \rightarrow \infty$ için $p(x) \rightarrow 0$ 'dir.

Bu sınıfa ait özdeğer problemlerle ilgili bazı çalışmalar [1], [2] aşağıdaki şekildedir.

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad -\infty < a < x < b < \infty \quad (1.19)$$

denklemi ele alınsın. Burada $a < 0$, $b > 0$; λ reel bir parametredir. $q(x)$ ise $x = 0$ noktasında singülerliğe sahip olsun. Öncelikle aşağıdaki dönüşümler tanımlansın.

$$y_1 := y, \quad y_2 := y' + fy \quad (1.20)$$

(1.20) dönüşümleri ile (1.19) denklemi kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y' = -fy_1 + y_2 \\ y_2' &= y'' + (fy)' = (f' + q - f^2 - \lambda)y_1 + fy_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

sistemi elde edilir. Buradaki f fonksiyonu, dönüştürülen sistem regüler olacak şekilde sonradan belirlenecek olan (a, b) üzerinde integrallenebilen fonksiyondur. Yani $f \in L(a, b)$, ayrıca $-F := f' + q - f^2 \in L(a, b)$ dir. Bu durumda (1.21) sistemi

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y' = -fy_1 + y_2 \\ y_2' &= y'' + (fy)' = -(F + \lambda)y_1 + fy_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

şeklindedir.

$$\tan \theta := \lambda^{1/2} \frac{y_1}{y_2} = \lambda^{1/2} \frac{y}{y' + fy}$$

olarak tanımlanır ve (1.22) kullanılırsa

$$\theta' = \lambda^{1/2} - f \sin(2\theta) + \lambda^{-1/2} F \sin^2(\theta) \quad (1.23)$$

veya

$$1 = \theta' \lambda^{-1/2} + \lambda^{-1/2} f \sin(2\theta) - \lambda^{-1} F \sin^2(\theta) \quad (1.24)$$

elde edilir.

Çalışmamızda baz alınan ve kullanılan bazı Lemma ve Teoremlere aşağıda yer verilmiştir.

Teorem 1.7 [1]: (1.19) denkleminin özdeğerleri aşağıdaki eşitliği sağlar. $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\begin{aligned} \theta(b) - \theta(a) - (b-a)\lambda^{1/2} &= -\lambda^{-1/2}\{f(x)[\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(0)]\} \Big|_a^b \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_a^b (f' + q)dx + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\{h_1(\lambda) \sin(2\theta(0)) \\ &\quad + h_2(\lambda) \cos(2\theta(0))\} + o(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} h_1(\lambda) &:= \int_a^b (f^2 - F - q) \sin(2\lambda^{1/2}x) dx, \\ h_2(\lambda) &:= \int_a^b (f^2 - F - q) (1 - \cos(2\lambda^{1/2}x)) dx \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 1.8 [1]: $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) \int_{J(\lambda)} |f^2 - F - q| dx &= o(\lambda^{1/2}), \\ \sigma(\lambda) \int_{J(\lambda)} |f^2 - F - q| dx &= o(\lambda^{1/2}), \\ \int_{J(\lambda)} |f^2 - F - q|(1 + |f|) dt &= o(\lambda^{1/2}) \end{aligned}$$

ise Teorem 1.7'deki $O(\lambda^{-1/2})$ hata terimi $o(\lambda^{-1/2})$ dir. Burada supremumlar $[a, b]$ aralığı üzerinde alınır ve $\rho(\lambda)$, $\sigma(\lambda)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &:= \sup \left| \int_0^x (f^2 - F - q) \sin(2\lambda^{1/2}t) dt \right| \\ &\quad + \sup \left| \int_0^x (f^2 - F - q) (1 - \cos(2\lambda^{1/2}t)) dt \right| \\ \sigma(\lambda) &:= \sup \left| \int_0^x (f' + q) dt \right| \end{aligned}$$

dir. Ek olarak $J(\lambda) = (a, b) \setminus (-\lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2})$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.1 [2]: x_1 ve x_2 nin uygun $\delta > 0$ için $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ve $x_2 - x_1 \leq \delta \lambda^{-1/2}$ şartlarını sağladığı kabul edilsin. Bu durumda $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = (x_2 - x_1) \lambda^{1/2} + o(1)$$

dir.

İspat: (x_1, x_2) üzerinde (1.23)'ün integrali alınır ve

$$\left| \theta(x_2) - \theta(x_1) - (x_2 - x_1) \lambda^{1/2} \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} f \sin(2\theta) dx \right| + \lambda^{-1/2} \int_{x_1}^{x_2} |F| dx \quad (1.25)$$

elde edilir. $f \in L(a, b)$ ve $x_2 - x_1 = o(1)$ olduğundan sağ tarafın ilk terimi $o(1)$ ' dir. Ayrıca $F \in L(a, b)$ ve $\lambda^{-1/2} = o(1)$ olduğundan sağ tarafın son terimi de $o(1)$ ' dir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 1.2 [2]: Lemma 1.1'in sonucu $x_2 - x_1 \leq \delta \lambda^{-1/2}$ hipotezi olmadan da doğrudur.

İspat: $\mu := \frac{\pi}{(2\lambda^{1/2})}$ şeklinde tanımlanırsa ve (1.25) ile

$$\int_{x_1}^{x_2} f \sin(2\theta) dx = o(1)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Lemma 1.1 ile $x_1 + \mu \leq b$, $x_2 - x_1 \geq \mu$ durumu için bunu göstermek yeterlidir.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f \sin(2\theta) dx \quad \text{ve} \quad I' = \int_{x_1+\mu}^{x_2+\mu} f \sin(2\theta) dx$$

şeklinde yazılır. $f \in L(a, b)$ ve $\mu = o(1)$ olduğundan $I - I' = o(1)$ olur. Bu durumda $I + I' = o(1)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} I + I' &= o(1) + \int_{x_1}^{x_2} \{f(x) \sin(2\theta(x)) + f(x + \mu) \sin(2\theta(x + \mu))\} dx \\ &= o(1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \{\sin(2\theta(x)) + \sin(2\theta(x + \mu))\} dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \sin(2\theta(x + \mu)) \{f(x + \mu) - f(x)\} dx \end{aligned} \quad (1.27)$$

olduğu görülür.

$$\int_a^{b-\mu} |f(x+\mu) - f(x)| dx = o(1) \text{ ve } f \in L(a, b)$$

olduğundan son terim $o(1)$ ' dir.

Ayrıca $\sin(2\theta(x+\mu)) + \sin(2\theta(x)) = 2 \sin\{\theta(x+\mu) + \theta(x)\} \cos\{\theta(x+\mu) - \theta(x)\}$ şeklindedir ve Lemma 1.1 ile $\theta(x+\mu) - \theta(x) = \frac{\pi}{2} + o(1)$ ' dir. Böylece (1.27)'ün orta teriminin $o(1)$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Lemma 1.3 [2]: $\lambda \rightarrow \infty$ iken herhangi $g \in L(a, b)$ için

$$\int_{x_1}^{x_2} g \cos(2\theta) dx = o(1) \text{ ve } \int_{x_1}^{x_2} g \cos(4\theta) dx = o(1)$$

dir. Bu Lemma kosinüs yerine sinüs alınınca da sağlanır

İspat: Lemma 1.2'ye benzer şekilde yapılır.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad x \in (a, b) \quad (2.1)$$

denklemini ele alınacaktır. Burada $a < 0$, $b > 0$; λ reel bir parametredir. $q(x)$ potansiyel fonksiyonu $q(x) \in L[a, c_1) \cup (c_1, x_1] \cup [x_1, c_2) \cup (c_2, b]$, c_1 ve c_2 singüler noktaları aşağıdaki gibidir:

$$-\infty < a = -x_0 < c_1 < x_0 = x_1 < c_2 < x_2 = b < \infty. \quad (2.2)$$

Öncelikle (2.1) denklemini, katsayıları ilgili aralıkta integrallenebilen regüler diferansiyel denkleme dönüştürülür. Daha sonra Prüfer dönüşümü uygulanarak özdeğerlerin sağlayacağı denklemler elde edilir. Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ayrı ayrı ele alınarak özdeğerler için asimptotik tahminler bulunur ($\lambda \rightarrow \infty$).

Son olarak reversion kullanılarak asimptotik tahminler $n \rightarrow \infty$ için hesaplanır. Kullanılan dönüşümler ve uygulanan yaklaşımlar [1] ve [2] çalışmalarını baz almaktadır. Bütünlük sağlamak açısından dönüşümleri yeniden ifade edelim.

$$y_1 := y, \quad y_2 := y' + fy \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlansın. Burada f daha sonra belirlenecek bir fonksiyondur. (2.1) denklemini kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y' = -fy_1 + y_2 \\ y_2' &= y'' + (fy)' = (f' + q - f^2 - \lambda)y_1 + fy_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

bulunur. (2.4) sisteminin regüler olması için

$$f \in L(a, b) \text{ ve } -F := f' + q - f^2 \in L(a, b) \quad (2.5)$$

gereklidir. Böylece (2.4) sistemi

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= -fy_1 + y_2 \\ y_2' &= -(F + \lambda)y_1 + fy_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

şeklinde olur.

θ fonksiyonu

$$\tan \theta := \lambda^{1/2} \frac{y_1}{y_2} = \lambda^{1/2} \frac{y}{y' + fy} \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır ve türev alınır

$$\theta' \frac{1}{\cos^2 \theta} = \lambda^{1/2} \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{(y_2)^2}$$

elde edilir ve (2.6) sistemindeki türevler yerine yazılırsa

$$\theta' \frac{1}{\cos^2 \theta} = \lambda^{1/2} \frac{(-fy_1 + y_2)y_2 - y_1(-(F + \lambda)y_1 + fy_2)}{(y_2)^2}$$

olur. Düzenlendiğinde

$$\theta' \frac{1}{\cos^2 \theta} = \lambda^{1/2} \left\{ -2f \frac{y_1}{y_2} + 1 + (F + \lambda) \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 \right\}$$

elde edilir. $\tan \theta = \lambda^{1/2} \frac{y_1}{y_2}$ eşitliğinden $\frac{y_1}{y_2} = \lambda^{-1/2} \tan \theta$ olur ve son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \theta' \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \lambda^{1/2} \left\{ 1 - 2f \lambda^{-1/2} \tan \theta + (F + \lambda) \lambda^{-1} \tan^2 \theta \right\} \\ &= \lambda^{1/2} - 2f \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \lambda^{-1/2} F \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \lambda^{1/2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik $\cos^2 \theta$ ile çarpılırsa

$$\theta' = \lambda^{1/2} - f \sin(2\theta) + \lambda^{-1/2} F \sin^2(\theta) \quad (2.8)$$

bulunur.

(2.7) eşitliği kullanılırsa $y(a) = y(b) = 0$ Dirichlet koşulları

$$\theta(a) = 0 \text{ ve } \theta(b) = (n + 1)\pi \quad (2.9)$$

dönüşür. Benzer şekilde Neumann sınır koşulları $y'(a) = y'(b) = 0$ kullanılırsa

$$\theta(a) = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \theta(b) = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Esas sonuçlara geçmeden önce aşağıdaki varsayımlar kabul edilecektir.

- i) f reel değerlidir, $f^2 \in L(a, b)$, $fF \in L(a, b)$, $F \in L(a, b)$,
- ii) $x \rightarrow c_1$ iken $(x - c_1)f(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow c_2$ iken $(x - c_2)f(x) \rightarrow 0$
- iii) $|f^2 - F - q| \left\{ \int_{c_1}^x |f(t)| dt + \int_{c_1}^x |F(t)| dt \right\} \in L(a, b)$
 $|f^2 - F - q| \left\{ \int_{c_2}^x |f(t)| dt + \int_{c_2}^x |F(t)| dt \right\} \in L(a, b)$
- iv) $x \rightarrow c_1$ iken $f(x) \int_{c_1}^x |f(t)| dt \rightarrow 0$ ve $f(x) \int_{c_1}^x |F(t)| dt \rightarrow 0$
 $x \rightarrow c_2$ iken $f(x) \int_{c_2}^x |f(t)| dt \rightarrow 0$ ve $f(x) \int_{c_2}^x |F(t)| dt \rightarrow 0$

Ayrıca, [1] çalışmasında olduğu gibi, c_1 ve c_2 singüler noktaları için hesaplanacak olan $h_{ij}(\lambda)$, ($i, j = 1, 2$) eşitlikleri

$$h_{11}(\lambda) := \int_a^{x_1} f' \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) dx$$

$$h_{21}(\lambda) := \int_a^{x_1} f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \right) dx$$

$$h_{12}(\lambda) := \int_{x_1}^b f' \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) dx$$

$$h_{22}(\lambda) := \int_{x_1}^b f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) \right) dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1: (2.1) denkleminin özdeğerleri, $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \theta(b) - \theta(a) - (b - a)\lambda^{1/2} = & -\lambda^{-1/2} \left\{ (f(x)[\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)]) \Big|_a^{x_1} \right. \\ & \left. + (f(x)[\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_2)]) \Big|_{x_1}^b \right\} - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_a^b (f' + q) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \{h_{11}(\lambda) \sin(2\theta(c_1)) + h_{21}(\lambda) \cos(2\theta(c_1)) \\
& + h_{12}(\lambda) \sin(2\theta(c_2)) + h_{22}(\lambda) \cos(2\theta(c_2))\} + o(\lambda^{-1/2})
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. Burada $q(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki singülerlik değerleri (2.2) ile verilmiştir.

İspat: Öncelikle $[a, x_1)$ ve $(x_1, b]$ bölünmüş aralıklarının her biri için Teorem 1.7 uygulanacaktır. (2.8) eşitliği $\lambda^{-1/2}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$1 = \theta' \lambda^{-1/2} + \lambda^{-1/2} f \sin(2\theta) - \lambda^{-1} F \sin^2(\theta) \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.8) denkleminin $[a, x_1)$ üzerinde integrali alınırsa

$$\theta(x_1) - \theta(a) = (x_1 - a) \lambda^{1/2} - \int_a^{x_1} f \sin(2\theta) dx + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} F \sin^2(\theta) dx$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
\theta(x_1) - \theta(a) - (x_1 - a) \lambda^{1/2} &= - \int_a^{x_1} f \sin(2\theta) dx + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} F \sin^2(\theta) dx \\
&:= -I_1 + I_2
\end{aligned}$$

dir.

Önce I_1 integralini ele alalım. (2.11) eşitliği $f \sin(2\theta)$ ile çarpılır ve $[a, x_1)$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^{x_1} f \sin 2\theta dx \\
&= \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f \theta' \sin 2\theta dx + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f^2 \sin^2 2\theta dx - \lambda^{-1} \int_a^{x_1} f F \sin 2\theta \sin^2 \theta dx
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada

$$I_1 := I_{11} + I_{12} - I_{13}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \lambda^{-1} \int_a^{x_1} f F \sin 2\theta \sin^2 \theta \, dx \\
&= \lambda^{-1} \int_a^{x_1} \frac{fF}{2} \sin 2\theta \, dx - \lambda^{-1} \int_a^{x_1} \frac{fF}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta \, dx \\
&= o(\lambda^{-1})
\end{aligned}$$

Son eşitlik (i) ve Lemma 1.3 ile elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
-I_1 + I_2 &= -\lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} \theta' f \sin 2\theta \, dx - \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f^2 \sin^2 2\theta \, dx \\
&\quad + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} F \sin^2 \theta \, dx + o(\lambda^{-1}) \\
&= -\lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} \theta' f \sin 2\theta \, dx - \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f^2 \frac{(1 - \cos 4\theta)}{2} \, dx \\
&\quad + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} F \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} \, dx + o(\lambda^{-1}) \\
&= -\lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} \theta' f \sin 2\theta \, dx + \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} (-f^2 + F) \, dx \\
&\quad + \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} f^2 \cos 4\theta \, dx - \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} F \cos 2\theta \, dx + o(\lambda^{-1})
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Burada (i) ve Lemma 1.3 kullanılırsa

$$-I_1 + I_2 = -\lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} \theta' f \sin 2\theta \, dx + \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} (-f^2 + F) \, dx + o(\lambda^{-1/2})$$

şeklinde elde edilir. Sağ tarafın ilk teriminde kısmi integral alınırsa

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} \theta' f \sin 2\theta \, dx \\
&= \lambda^{-1/2} \left(f(x) [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] \Big|_a^{x_1} - \int_a^{x_1} f' [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] dx \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegrali alınan terimin c_1 'de sürekli olduğu aşağıdaki şekilde gösterilir. (2.8)'den

$$\theta(x) - \theta(c_1) = \lambda^{1/2}(x - c_1) - \int_{c_1}^x f \sin 2\theta \, dx + \lambda^{-1/2} \int_{c_1}^x F \sin^2 \theta \, dx$$

elde edilir, böylece

$$|\theta(x) - \theta(c_1)| \leq \lambda^{1/2}|x - c_1| + \left| \int_{c_1}^x |f| \, dt \right| + \lambda^{-1/2} \left| \int_{c_1}^x |F| \, dt \right|$$

olur. (ii) ve (iv) kullanılırsa süreklilik elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
-I_1 + I_2 &= -\lambda^{-1/2} \left(f(x) [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] \Big|_a^{x_1} \right) \\
&\quad + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f' [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] dx + \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} (-f^2 + F) \, dx \\
&\quad + o\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. $-f^2 + F = -f' - q = -(f' + q)$ ise

$$\begin{aligned}
-I_1 + I_2 &= -\lambda^{-1/2} \left(f(x) [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] \Big|_a^{x_1} \right) \\
&\quad + \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f' [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] dx - \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} (f' + q) \, dx \\
&\quad + o\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

olur. $f' = f^2 - F - q$ olduğundan

$$J := \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} (f^2 - F - q) [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] dx$$

ve

$$J_1 = J - \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} (f^2 - F - q) \left[\sin^2 \left(\theta(c_1) + (x - c_1) \lambda^{1/2} \right) - \sin^2 \theta(c_1) \right] dx$$

olarak tanımlansın. Buradan

$$|\theta(x) - \theta(c_1) - (x - c_1) \lambda^{1/2}| \leq \left| \int_{c_1}^x |f| dt \right| + \lambda^{-1/2} \left| \int_{c_1}^x |F| dt \right|$$

dir ve (iii) ile

$$J_1 \leq \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} |f^2 - F - q| \left\{ \left| \int_{c_1}^x |f| dt \right| + \lambda^{-1/2} \left| \int_{c_1}^x |F| dt \right| \right\} dx = O(\lambda^{-1/2})$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} J &= \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} (f^2 - F - q) [\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] dx \\ &= \lambda^{-1/2} \int_a^{x_1} f' \left[\sin^2 \left(\theta(c_1) + (x - c_1) \lambda^{1/2} \right) - \sin^2 \theta(c_1) \right] dx + O(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\theta(c_1) + (x - c_1) \lambda^{1/2} \right) - \sin^2 \theta(c_1) &= \\ \frac{1}{2} \cos(2\theta(c_1)) \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \right) &+ \frac{1}{2} \sin(2\theta(c_1)) \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$-I_1 + I_2 = -\lambda^{-1/2} [f(x) \sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] \Big|_a^{x_1} - \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \int_a^{x_1} (f' + q) dx$$

$$+ \frac{\lambda^{-1/2}}{2} \{h_{21}(\lambda) \cos 2\theta(c_1) + h_{11}(\lambda) \sin 2\theta(c_1)\} + O(\lambda^{-1/2})$$

olarak bulunmuş olur. Benzer eşitlikler $[x_1, b]$ üzerinde yapılır.

[1] çalışmasında olduğu gibi, Teorem 2.1'deki $O(\lambda^{-1/2})$ hata terimi belirli varsayımlar altında $o(\lambda^{-1/2})$ olarak geliştirilebilir. Bu varsayımlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_1}^x (f^2 - F - q) \sin(2\lambda^{1/2}(t - c_1)) dt \right| \\ &\quad + \sup \left| \int_{c_1}^x (f^2 - F - q) (1 - \cos(2\lambda^{1/2}(t - c_1))) dt \right| \\ \rho_2(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_2}^x (f^2 - F - q) \sin(2\lambda^{1/2}(t - c_2)) dt \right| \\ &\quad + \sup \left| \int_{c_2}^x (f^2 - F - q) (1 - \cos(2\lambda^{1/2}(t - c_2))) dt \right| \\ \sigma_1(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_1}^x (f' + q) dt \right| \\ \sigma_2(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_2}^x (f' + q) dt \right| \end{aligned}$$

Burada supremumlar $[-x_0, x_1]$ ve $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde alınmıştır. Daha genel olarak

$$J_1(\lambda) = (-x_0, x_1) \setminus (-\lambda^{-1/2} + c_1, \lambda^{-1/2} + c_1)$$

$$J_2(\lambda) = (x_1, x_2) \setminus (-\lambda^{-1/2} + c_2, \lambda^{-1/2} + c_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2: Yukarıdaki varsayımlara ek olarak

$$\rho_1(\lambda) \int_{J_1(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\rho_2(\lambda) \int_{J_2(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\sigma_1(\lambda) \int_{J_1(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\sigma_2(\lambda) \int_{J_2(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\int_{J_1(\lambda)} |f'| (1 + |f|) dt = o(\lambda^{1/2})$$

$$\int_{J_2(\lambda)} |f'| (1 + |f|) dt = o(\lambda^{1/2})$$

sağlanması durumunda

$$\begin{aligned} \theta(b) - \theta(a) - (b - a)\lambda^{1/2} &= -\lambda^{-1/2} \left\{ f(x)[\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)] \Big|_a^{x_1} \right. \\ &\quad \left. + f(x)[\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_2)] \Big|_{x_1}^b \right\} - \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_a^b (f' + q) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \{ h_{11}(\lambda) \sin(2\theta(c_1)) + h_{21}(\lambda) \cos(2\theta(c_1)) \\ &\quad + h_{12}(\lambda) \sin(2\theta(c_2)) + h_{22}(\lambda) \cos(2\theta(c_2)) \} + o(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat:

$$J_2 = \int_a^{x_1} |f'| \left| \sin^2 \left(\theta(c_1) + (x - c_1)\lambda^{1/2} \right) - \sin^2(\theta(x)) \right| dx$$

olmak üzere

$$|J_1| \leq \lambda^{-1/2} J_2$$

olsun. (a, x_1) aralığını $(a, -\lambda^{-1/2} + c_1)$, $(-\lambda^{-1/2} + c_1, \lambda^{-1/2} + c_1)$, $(\lambda^{-1/2} + c_1, x_1)$ alt aralıklarına bölünür ve J_2 'nin sırasıyla bu aralıklar üzerindeki integralleri J_{21}, J_{22}, J_{23} olarak gösterilsin. (iii) ile

$$J_{22} \leq \int_{-\lambda^{-1/2}+c_1}^{\lambda^{-1/2}+c_1} |f'| \left\{ \left| \int_{c_1}^{x_1} |f| dt \right| + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{c_1}^{x_1} |F| dt \right| \right\} dx = o(1)$$

dir.

J_{23} eşitliği için

$$\left| \theta(x) - \theta(c_1) - (x - c_1)\lambda^{-1/2} \right| = O\left(\lambda^{-1/2}\{|f| + \sigma_1(\lambda) + \rho_1(\lambda) + 1\}\right)$$

$$\Rightarrow |J_{23}| \leq K \int_{J_1(\lambda)} |f'| \lambda^{-1/2} [|f(x)| + \sigma_1(\lambda) + \rho_1(\lambda) + 1] dx = o(1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $J_{21} = o(1)$ 'dir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3 [4]: $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ monoton bir fonksiyon ve $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\exists \xi \in [a, b]$ öyle ki

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a^+) \int_a^\xi g(x) dx + f(b^-) \int_\xi^b g(x) dx$$

dir.

Teorem 2.4 [4]: f ve g sürekli fonksiyonlar ve $g \geq 0$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$$

dir.

Not 2.1: Aşağıdaki Teorem ve Lemmalarda c_1 ve c_2 noktalarında singülerliğe sahip $q(x)$ potansiyel fonksiyonu $x \in [a, b] \setminus (c_1, c_2)$ olmak üzere

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)} = \frac{1}{c_1 - c_2} \left[\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right]$$

olarak alınacaktır. f fonksiyonunun seçimi ise [1]'de olduğu gibi $f' = -q$ olarak alınacaktır.

Böylece

$$f' = -q = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right]$$

olur.

Aşağıdaki Lemmalar $\lambda \rightarrow \infty$ için sağlanır.

Lemma 2.1: $a = -x_0 < c_1 < x_0 = x_1 < c_2 < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_{11}(\lambda) &= \int_{-x_0}^{x_0} f' \sin(2\lambda^{1/2}(x - c_1)) dx \\ &= \frac{\pi}{c_2 - c_1} + O(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} h_{11}(\lambda) &= \int_{-x_0}^{x_0} f' \sin(2\lambda^{1/2}(x - c_1)) dx \\ &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left\{ \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sin(2\lambda^{1/2}(x - c_1))}{x - c_1} dx - \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sin(2\lambda^{1/2}(x - c_1))}{x - c_2} dx \right\} \\ &=: \frac{1}{c_2 - c_1} \{I_1 - I_2\} \end{aligned}$$

İlk olarak I_2 integralini hesaplayalım.

$$I_2 = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sin(2\lambda^{1/2}(x - c_1))}{x - c_2} dx$$

integralinde $2\lambda^{1/2}(x - c_1) := u$ dönüşümü ile $dx = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}du$ ve $x - c_2 = \frac{u}{2\lambda^{1/2}} + c_1 - c_2$

elde edilir. Ayrıca

$$-x_0 \text{ için } u = -2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)$$

$$x_0 \text{ için } u = 2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1)$$

olarak bulunur. Böylece bulunan değerler yerine yazılır ve düzenlenirse

$$I_2 = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{\sin u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

elde edilir. Teorem 2.3'ün uygulanabilmesi için

$$f(u) = \frac{1}{u+(c_1-c_2)2\lambda^{1/2}} \text{ ve } g(u) = \sin u$$

olarak seçilsin. Böylece

$$f\left(-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)\right) = \frac{1}{-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) + 2\lambda^{1/2}(c_1 - c_2)} = \frac{1}{-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_2)}$$

ve

$$f\left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1)\right) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1) + 2\lambda^{1/2}(c_1 - c_2)} = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)}$$

olarak bulunur. Teorem 2.3'te yerine yazılırsa

$$I_2 = \frac{1}{-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_2)} \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{\xi} \sin u \, du + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} \int_{\xi}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \sin u \, du$$

olur. İntegraller alınır

$$I_2 = \frac{1}{-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_2)} \left\{ -\cos \xi + \cos \left(-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) \right) \right\} \\ + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} \left\{ -\cos \left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1) \right) + \cos \xi \right\}$$

olur ve düzenlenirse

$$I_2 \leq \frac{1}{-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_2)} 2 + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} 2 = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \left(\frac{2c_2}{(x_0 + c_2)(x_0 - c_2)} \right) = \lambda^{-1/2} K_1$$

olarak bulunur. Burada

$$K_1 = \frac{2c_2}{(x_0 + c_2)(x_0 - c_2)}$$

dir. Dolayısıyla

$$I_2 = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

dir.

$$I_1 = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sin\left(2\lambda^{1/2}(x - c_1)\right)}{(x - c_1)} dx$$

İntegralinde de $2\lambda^{1/2}(x - c_1) := u$ dönüşümü ile

$$I_1 = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{\sin u}{u} du$$

integrali elde edilir. Burada

$$I_1 = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{\sin u}{u} du + \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{\sin u}{u} du$$

şeklinde yazılır. $f(u) = \frac{1}{u}$ ve $g(u) = \sin u$ olarak seçilir ve Teorem 2.3 uygulanırsa

$$\int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{\sin u}{u} du = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

olduğu görülür. Ek olarak I_1 'in sol tarafındaki integral çift fonksiyon olduğundan

$$I_1 = 2 \int_0^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{\sin u}{u} du + O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

olur ve buradan

$$I_1 = 2 \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \right) + O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \right) \\
&= \pi + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada da Teorem 2.3 için $f(u) = \frac{1}{u}$ ve $g(u) = \sin u$ seçilirse

$$\int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

olduğu görülür. Bulunan sonuçlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
h_{11}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(\pi + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \right) \\
&= \frac{\pi}{c_2 - c_1} + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 2.2 : $a = -x_0 < c_1 < x_0 = x_1 < c_2 < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
h_{21}(\lambda) &= \int_{-x_0}^{x_0} f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \right) dx \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m - 1)} + \frac{1}{c_1 - c_2} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \\
&\quad + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
h_{21}(\lambda) &= \int_{-x_0}^{x_0} f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \right) dx \\
&= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right) \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_1) \right) \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c_2 - c_1} \left\{ \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\left(1 - \cos\left(2\lambda^{1/2}(x - c_1)\right)\right)}{x - c_1} dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\left(1 - \cos\left(2\lambda^{1/2}(x - c_1)\right)\right)}{x - c_2} dx \right\} \\
&:= \frac{1}{c_2 - c_1} \{I_1 - I_2\}
\end{aligned}$$

I_1 integralini hesaplamak için $2\lambda^{1/2}(x - c_1) := u$ dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm ile

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{1 - \cos u}{u} du \\
&= \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1 - \cos u}{u} du + \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{1 - \cos u}{u} du
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. I_1 'in sol taraftaki integral tek fonksiyon olduğundan integrali sıfırdır.

Sağ taraftaki integral de ise $f(u) = \frac{1}{u}$ ve $g(u) = 1 - \cos u$ seçildiğinde Teorem 2.4 ile

$O(\lambda^{-1/2})$ olduğu görülür. Buradan

$$I_1 = O(\lambda^{-1/2})$$

dir.

$$I_2 = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\left(1 - \cos\left(2\lambda^{1/2}(x - c_1)\right)\right)}{x - c_2} dx$$

integralinde $2\lambda^{1/2}(x - c_1) := u$ dönüşümü ile

$$I_2 = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{1 - \cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

elde edilir. Buradan

$$I_2 = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1 - \cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du + \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{1 - \cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

$$:= I_{21} + I_{22}$$

şeklinde kabul edilsin.

$$I_{22} = \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} \frac{1 - \cos(u)}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

integralini hesaplamak için

$$f(u) = \frac{1}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}}, \quad g(u) = 1 - \cos u$$

olarak seçilir. Böylece

$$f\left(2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)\right) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)}$$

$$f\left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1)\right) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)}$$

değerleri için ve Teorem 2.4 uygulanırsa

$$I_{22} = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} \int_{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^c (1 - \cos u) du$$

$$+ \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} \int_c^{2\lambda^{1/2}(x_0-c_1)} (1 - \cos u) du$$

$$= \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} \left(c - \sin c - 2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) + \sin\left(2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)\right) \right)$$

$$+ \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} \left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1) - \sin\left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1)\right) - c + \sin c \right)$$

olur. Buradan

$$I_{22} \leq \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} \left(c - 2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) + 2 \right) \\ + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 - c_2)} \left(2\lambda^{1/2}(x_0 - c_1) - c + 2 \right)$$

şeklinde olur. Düzenlendiğinde

$$I_{22} \leq \lambda^{-1/2} \left(\frac{c+2}{2(x_0 + 2c_1 - c_2)} + \frac{2-c}{2(x_0 - c_2)} \right) + \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$K_2 := \frac{c+2}{2(x_0 + 2c_1 - c_2)} + \frac{2-c}{2(x_0 - c_2)}$$

olmak üzere

$$I_{22} = \lambda^{-1/2} K_2 + \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$I_{22} = \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) + O(\lambda^{-1/2})$$

şeklinde elde edilir.

$$I_{21} = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1 - \cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

integrali

$$I_{21} = \frac{1}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1}{1 + \frac{u}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}}} du \\ - \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{\cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du \\ := I_{211} - I_{212}$$

şeklinde düzenlenir.

$$I_{212} = \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{\cos u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} du$$

integralinde

$$\frac{1}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} = t \Rightarrow \frac{-1}{\left(u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}\right)^2} du = dt$$

$$\cos u \, du = dv \Rightarrow \sin u = v$$

dönüşümleri ile kısmi integrasyon metodunu uygulayalım. Böylece

$$I_{212} = tv \left| \begin{array}{c} 2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) \\ -2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1) \end{array} \right| - \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} v dt$$

şeklinde yazılır. I_{212} integralinin sınırlı olduğunu göstermek için her iki tarafın mutlak değeri alınır.

$$\begin{aligned} |I_{212}| &= \left| \left(\frac{\sin u}{u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} \right) \right|_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \\ &\quad + \left| \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{\sin u}{\left(u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}\right)^2} du \right| \\ &\leq \left| \frac{\sin\left(2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)\right)}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} - \frac{\sin\left(-2\lambda^{1/2}(x_0 + c_1)\right)}{2\lambda^{1/2}(-x_0 - c_2)} \right| \\ &\quad + \left| \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1}{\left(u + (c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}\right)^2} du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(-x_0 - c_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\lambda^{1/2}(-x_0 - c_2)} - \frac{1}{2\lambda^{1/2}(x_0 + 2c_1 - c_2)} \\
& = \frac{2}{2\lambda^{1/2}(-x_0 - c_2)} \\
& = \lambda^{-1/2} \frac{1}{(-x_0 - c_2)}
\end{aligned}$$

olduğundan $I_{212} = O(\lambda^{-1/2})$ dir.

$$\begin{aligned}
I_{211} &= \frac{1}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} \int_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)} \frac{1}{1 + \frac{u}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}}} du \\
\text{integralinde } \left| \frac{u}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} \right| &< 1 \text{ olduğundan} \\
\frac{1}{1 + \frac{u}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}}} &= 1 - \frac{u}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} + \frac{u^2}{(c_1 - c_2)^2 2^2 \lambda} \\
&\quad - \frac{u^3}{(c_1 - c_2)^3 2^3 \lambda^{3/2}} + \dots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

seri açılımı yapılır. Böylece

$$\begin{aligned}
I_{211} &= \frac{1}{(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} \left\{ u - \frac{u^2}{2(c_1 - c_2)2\lambda^{1/2}} + \frac{u^3}{3(c_1 - c_2)^2 2^2 \lambda} \right. \\
&\quad \left. - \frac{u^4}{4(c_1 - c_2)^3 2^3 \lambda^{3/2}} + \dots \right\} \Bigg|_{-2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}^{2\lambda^{1/2}(x_0+c_1)}
\end{aligned}$$

olur ve çift kuvvetli terimlerin sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla

$$I_{211} = \frac{2(x_0 + c_1)}{(c_1 - c_2)^1} + \frac{2(x_0 + c_1)^3}{3(c_1 - c_2)^3} + \frac{2(x_0 + c_1)^5}{5(c_1 - c_2)^5} + \dots$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$I_{21} = \frac{2(x_0 + c_1)}{(c_1 - c_2)^1} + \frac{2(x_0 + c_1)^3}{3(c_1 - c_2)^3} + \frac{2(x_0 + c_1)^5}{5(c_1 - c_2)^5} \dots + O(\lambda^{-1/2})$$

olur. Dolayısıyla

$$I_2 = \frac{2(x_0 + c_1)}{(c_1 - c_2)^1} + \frac{2(x_0 + c_1)^3}{3(c_1 - c_2)^3} + \frac{2(x_0 + c_1)^5}{5(c_1 - c_2)^5} + \dots + \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) + O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} h_{21}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \{I_1 - I_2\} \\ &= \frac{1}{c_1 - c_2} \left\{ \frac{2(x_0 + c_1)}{(c_1 - c_2)^1} + \frac{2(x_0 + c_1)^3}{3(c_1 - c_2)^3} + \frac{2(x_0 + c_1)^5}{5(c_1 - c_2)^5} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \right\} \\ &= \frac{2(x_0 + c_1)}{(c_1 - c_2)^2} + \frac{2(x_0 + c_1)^3}{3(c_1 - c_2)^4} + \frac{2(x_0 + c_1)^5}{5(c_1 - c_2)^6} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{c_1 - c_2} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m - 1)} + \frac{1}{c_1 - c_2} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \\ &\quad + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Lemma 2.3 : $a < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 = b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_{12}(\lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} f' \sin\left(2\lambda^{1/2}(x - c_2)\right) dx \\ &= \frac{\pi}{c_1 - c_2} + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
h_{12}(\lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} f' \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) dx \\
&= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right) \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) dx
\end{aligned}$$

$\frac{x_1 + x_2}{2} = c_2$ olacak şekilde $x_2 = 2c_2 - x_1$ şeklinde seçilir ve böylece yukarıdaki integral

$$\begin{aligned}
h_{12}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \left(\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right) \sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) dx \\
&= \frac{1}{c_2 - c_1} \left\{ \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \frac{\sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right)}{x - c_1} dx - \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \frac{\sin \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right)}{x - c_2} dx \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Eşitlikte bulunan integrallerde $2\lambda^{1/2}(x - c_2) := u$ dönüşümü yapılır. Böylece

$$\begin{aligned}
h_{12}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(\int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{\sin u}{u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}} du - \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{\sin u}{u} du \right) \\
&:= \frac{1}{c_2 - c_1} (I_1 - I_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. I_1 integralinin hesaplanabilmesi için

$$f(u) = \frac{1}{u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}}, \quad g(u) = \sin u$$

ile Teorem 2.3 uygulanırsa $I_1 = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$ olduğu görülür. I_2 integrali çift fonksiyon olduğundan

$$I_2 = 2 \int_0^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{\sin u}{u} du$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_{2\lambda^{1/2}(c_2-x_1)}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \right) \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{2} - O\left(\lambda^{-1/2}\right) \right) \\
&= \pi + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada $f(u) = \frac{1}{u}$ ve $g(u) = \sin u$ seçilerek Teorem 2.3 uygulanırsa

$$\int_{2\lambda^{1/2}(c_2-x_1)}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
h_{12}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} (I_1 - I_2) \\
&= -\frac{\pi}{c_2 - c_1} + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \\
&= \frac{\pi}{c_1 - c_2} + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Lemma 2.4 : $a < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 = b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
h_{22}(\lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) \right) dx \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m - 1)} + O\left(\lambda^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$h_{22}(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} f' \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) \right) dx$$

Lemma 2.3'te yapıldığı gibi $x_2 = 2c_2 - x_1$ olacak şekilde seçilir ve yukarıdaki integral düzenlenir.

$$\begin{aligned} h_{22}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \left(\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x - c_2} \right) \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left\{ \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \frac{1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right)}{x - c_1} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_1}^{2c_2 - x_1} \frac{1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(x - c_2) \right)}{x - c_2} dx \right\} \end{aligned}$$

İntegrallerde $2\lambda^{1/2}(x - c_2) := u$ dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned} h_{22}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left\{ \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{1 - \cos u}{\left(u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2} \right)} du \right. \\ &\quad \left. - \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{1 - \cos u}{u} du \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada sağ taraftaki integral tek fonksiyon olduğundan integrali sıfırdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h_{22}(\lambda) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{1 - \cos u}{u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}} du \\ &= \frac{1}{(c_2 - c_1)^2 2\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{1}{1 + \frac{u}{(c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}}} du \\ &\quad - \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{\cos u}{u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}} du \\ &=: I_1 - I_2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. I_2 integralini hesaplamak için Lemma 2.2’de yapıldığı gibi

$$\frac{1}{u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}} = t \Rightarrow \frac{-1}{\left(u + (c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}\right)^2} du = dt$$

$$\cos u \, du = dv \Rightarrow \sin u = v$$

dönüşümleri yardımıyla kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$I_2 = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$$

dir. I_1 integralinde (2.11) seri açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(c_2 - c_1)^2 2\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \frac{1}{1 + \frac{u}{(c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}}} du \\ &= \frac{1}{(c_2 - c_1)^2 2\lambda^{\frac{1}{2}}} \left\{ u - \frac{u^2}{2(c_2 - c_1)2\lambda^{1/2}} + \frac{u^3}{3(c_2 - c_1)^2 2^2 \lambda} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u^4}{4(c_2 - c_1)^3 2^3 \lambda^{3/2}} + \dots \right\} \Bigg|_{-2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)}^{2\lambda^{1/2}(c_2 - x_1)} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada da çift kuvvetli terimlerin sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(c_2 - c_1)^2} \left\{ 2(c_2 - x_1) + \frac{2(c_2 - x_1)}{3(c_2 - c_1)^2} + \frac{2(c_2 - x_1)}{5(c_2 - c_1)^4} + \dots \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^2} + \frac{c_2 - x_1}{3(c_2 - c_1)^4} + \frac{c_2 - x_1}{5(c_2 - c_1)^6} + \frac{c_2 - x_1}{7(c_2 - c_1)^8} + \dots \right\} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Böylece

$$\begin{aligned} h_{22}(\lambda) &= 2 \left\{ \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^2} + \frac{c_2 - x_1}{3(c_2 - c_1)^4} + \frac{c_2 - x_1}{5(c_2 - c_1)^6} + \frac{c_2 - x_1}{7(c_2 - c_1)^8} + \dots \right\} \\ &\quad + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m - 1)} + O\left(\lambda^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.3: $y'' + (\lambda - q)y = 0$, $x \in [a, b]$

denklemini $y(a) = y(b) = 0$ Dirichlet sınır şartları ile verilsin.

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

olması durumunda problemin özdeğerleri ($n \rightarrow \infty$) aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned} (n+1)\pi &= (b-a)\lambda_n^{1/2} \\ &\quad - \lambda_n^{-1/2} \left\{ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(c_2) - \sin^2 \theta(c_1)) \right. \\ &\quad - \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad + \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2)) \Big\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_n^{-1/2} \left\{ \frac{\pi}{c_2 - c_1} (\sin(2\theta(c_1)) - \sin(2\theta(c_2))) \right. \\ &\quad + 2 \cos 2\theta(c_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m-1)} \\ &\quad + 2 \cos 2\theta(c_1) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m-1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2(c_1 - c_2)} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \right) \right\} + o(\lambda_n^{-1/2}) \end{aligned}$$

İspat: Teorem 2.1'in uygulanması için aşağıdaki işlemler yapılır.

(2.9) ile $\theta(b) - \theta(a) = (n+1)\pi$ bulunur. $f' = -q$ olacak şekilde seçildiğinden

$$f(x) = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x - c_1}{x - c_2} \right| \right]$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (2.2) ile

$$f(a) = f(-x_0) = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{-x_0 - c_1}{-x_0 - c_2} \right| \right] = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] \quad (2.12)$$

$$f(x_0) = f(x_1) = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] \quad (2.13)$$

$$f(b) = f(x_2) = \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] \quad (2.14)$$

olur. Buradan Teorem 2.1'deki

$$I := f(x)(\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)) \Big|_a^{x_1} + f(x)(\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_2)) \Big|_{x_1}^b$$

ifadesi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} I &= f(x_1)(\sin^2 \theta(x_1) - \sin^2 \theta(c_1)) - f(a)(\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad + f(b)(\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2)) - f(x_1)(\sin^2 \theta(x_1) - \sin^2 \theta(c_2)) \\ I &= f(x_1)(\sin^2 \theta(c_2) - \sin^2 \theta(c_1)) - f(a)(\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad + f(b)(\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2)) \end{aligned}$$

Böylece Teorem 2.1

$$\begin{aligned} (n+1)\pi &= (b-a)\lambda^{1/2} \\ &\quad - \lambda^{-1/2} \{ f(x_1)(\sin^2 \theta(c_2) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad - f(a)(\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) + f(b)(\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2)) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_a^b (f' + q) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \{ h_{11}(\lambda) \sin(2\theta(c_1)) + h_{21}(\lambda) \cos(2\theta(c_1)) \\ &\quad + h_{12}(\lambda) \sin(2\theta(c_2)) + h_{22}(\lambda) \cos(2\theta(c_2)) \} + O(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $f' = -q$ olduğundan

$$\int_a^b (f' + q) dx = 0$$

dir. Böylece (2.12), (2.13), (2.14) eşitlikleri ve Lemma 2.1, Lemma 2.2, Lemma 2.3 ve Lemma 2.4 yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Lemma 2.5 : (2.2) sağlanması durumunda, Dirichlet sınır koşulları altında

$$\text{i)} \quad \theta(c_1) = (n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) + o(1)$$

$$\text{ii)} \quad \theta(c_2) = (n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_2}{b-a} \right) + o(1)$$

şeklindedir.

ispat:

i) Lemma 1.2 uygulanır.

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = (x_2 - x_1)\lambda^{1/2} + o(1)$$

eşitliğinde $x_2 = c_1$ ve $x_1 = a = -x_0$ alınır, (2.9) ile

$$\theta(-x_0) = \theta(a) = 0$$

olduğu kullanılır ve Teorem 2.3 göz önüne alınır

$$\theta(c_1) = (n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) + o(1)$$

bulunur.

ii) Lemma 1.2'de

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = (x_2 - x_1)\lambda^{1/2} + o(1)$$

eşitliğinde $x_1 = c_2$ alınır

$$\theta(x_2) - \theta(c_2) = (x_2 - c_2)\lambda^{1/2} + o(1)$$

elde edilir. (2.9)'den $\theta(x_2) = \theta(b) = (n+1)\pi$

kullanılırsa ve Teorem 2.3 göz önüne alınır

$$\theta(c_2) = (n+1)\pi - (x_2 - c_2) \frac{(n+1)\pi}{b-a} + o(1)$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapırsa

$$\theta(c_2) = (n+1)\pi \left(1 - \frac{(x_2 - c_2)}{b-a} \right) + o(1)$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\theta(c_2) &= (n+1)\pi \left(\frac{b-a-x_2+c_2}{b-a} \right) + o(1) \\
&= (n+1)\pi \frac{(x_0+c_2)}{b-a} + o(1)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Teorem 2.4: Teorem 2.3'nin koşulları altında özdeğerler aşağıdaki eşitliği sağlar ($\lambda_n \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned}
(n+1)\pi &= (b-a)\lambda_n^{1/2} \\
&\quad - \lambda_n^{-1/2} \left\{ \frac{1}{c_2-c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0-c_1}{x_0-c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_2}{b-a} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c_2-c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0+c_1}{x_0+c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c_2-c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2-c_1}{x_2-c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_2}{b-a} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{c_2-c_1} \left[\sin \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_2}{b-a} \right) \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \cos \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_1}{b-a} \right) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0+c_1)^{2m-1}}{(c_1-c_2)^{2m}(2m-1)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2(c_1-c_2)} \left(\frac{x_0-c_1}{x_0-c_2} - \frac{x_0+c_1}{x_0+2c_1-c_2} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \cos \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0+c_2}{b-a} \right) \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2-x_1}{(c_2-c_1)^{2m}(2m-1)} \right\} \right\} \\
&\quad + O\left(\lambda_n^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

İspat: (2.9) eşitlikleri ile

$$\theta(a) = \theta(-x_0) = 0 \quad , \quad \theta(b) = \theta(x_2) = (n+1)\pi$$

dir. Buradan

$$\sin^2 \theta(a) = \sin^2 \theta(-x_0) = \sin^2 0 = 0$$

$$\sin^2 \theta(b) = \sin^2 \theta(x_2) = \sin^2(n+1)\pi = 0$$

bulunur. Ayrıca Lemma 2.5’de bulunan $\theta(c_1)$ ve $\theta(c_2)$ Teorem 2.3’te yerine yazılır.

Teorem 2.5: Teorem 2.3’nın koşulları altında özdeğerler $n \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \lambda_n^{1/2} = & \frac{(n+1)\pi}{b-a} \\ & + \frac{1}{(n+1)\pi} \left\{ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_2}{b-a} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_1}{b-a} \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_1}{b-a} \right) \right) \\ & \left. - \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] \left(\sin^2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_2}{b-a} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{c_2 - c_1} \left[\sin \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_1}{b-a} \right) \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_2}{b-a} \right) \right) \right] \right. \right. \\ & \left. + 2 \cos \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_1}{b-a} \right) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m-1)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(c_1 - c_2)} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \right) \\ & \left. + 2 \cos \left(2(n+1)\pi \left(\frac{x_0 + c_2}{b-a} \right) \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m-1)} \right\} \\ & + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.4'te reversion metodu uygulanır.

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{b-a} + O(1)$$

$$\begin{aligned}\lambda_n^{-1/2} &= \frac{1}{\frac{(n+1)\pi}{b-a} [1 + O(n^{-1})]} \\ &= \frac{b-a}{(n+1)\pi} + O(n^{-2})\end{aligned}$$

bulunur ve yerine yazılır.

Teorem 2.6: $y'' + (\lambda - q)y = 0$, $x \in [a, b]$ denklemi

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

Neumann sınır şartları ile verilsin.

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

olması durumunda bu probleminin özdeğerleri ($n \rightarrow \infty$) aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned}n\pi &= (b-a)\lambda_n^{1/2} \\ &\quad - \lambda_n^{-1/2} \left\{ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(c_2) - \sin^2 \theta(c_1)) \right. \\ &\quad - \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] (\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{c_2 - c_1} (\sin(2\theta(c_1)) - \sin(2\theta(c_2))) \right. \\ &\quad + 2 \cos 2\theta(c_1) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m-1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2(c_1 - c_2)} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos 2\theta(c_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m-1)} \right] + O\left(\lambda_n^{-1/2}\right)\end{aligned}$$

İspat: Teorem 2.1'in uygulanması için (2.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\theta(b) - \theta(a) = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = n\pi$$

bulunur. Teorem 2.3'te olduğu gibi $f' = -q$ olduğundan

$$\int_a^b (f' + q) dx = 0$$

olur ve Teorem 2.1'deki

$$I := f(x)(\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_1)) \Big|_a^{x_1} + f(x)(\sin^2 \theta(x) - \sin^2 \theta(c_2)) \Big|_{x_1}^b$$

ifadesi hesaplanır. Dolayısıyla Teorem 2.1'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} n\pi &= (b - a)\lambda_n^{1/2} \\ &\quad - \lambda_n^{-1/2} \{f(x_1)(\sin^2 \theta(c_2) - \sin^2 \theta(c_1)) \\ &\quad - f(a)(\sin^2 \theta(a) - \sin^2 \theta(c_1)) + f(b)(\sin^2 \theta(b) - \sin^2 \theta(c_2))\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_n^{-1/2} \{h_{11}(\lambda) \sin(2\theta(c_1)) + h_{21}(\lambda) \cos(2\theta(c_1)) \\ &\quad + h_{12}(\lambda) \sin(2\theta(c_2)) + h_{22}(\lambda) \cos(2\theta(c_2))\} \\ &\quad + O(\lambda_n^{-1/2}) \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada da (2.12), (2.13), (2.14) ve Lemma 2.1, Lemma 2.2, Lemma 2.3 ve Lemma 2.4 yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Lemma 2.9: (2.2) sağlanması durumunda Neumann sınır koşulları için

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \theta(c_1) &= \frac{\pi}{2} + n\pi \frac{x_0 + c_1}{b-a} + o(1) \\ \text{ii)} \quad \theta(c_2) &= (2n + 1) \frac{\pi}{2} - n\pi \frac{x_2 - c_2}{b-a} + o(1) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat:

i) Lemma 1.2'de $x_2 = c_1$ ve $x_1 = -x_0$ alınır ve

$$\theta(a) = \theta(-x_0) = \frac{\pi}{2}$$

kullanılırsa

$$\theta(c_1) - \theta(-x_0) = (c_1 + x_0)\lambda^{1/2} + o(1)$$

$$\theta(c_1) - \frac{\pi}{2} = (c_1 + x_0)\lambda^{1/2} + o(1)$$

elde edilir, buradan

$$\theta(c_1) = \frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1)\lambda^{1/2} + o(1)$$

olur. Teorem 2.6 kullanılırsa

$$\theta(c_1) = \frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1)\frac{n\pi}{b-a} + o(1)$$

olarak elde edilir.

ii) $\theta(c_2)$ 'nin hesaplanması için Lemma 1.2'de

$$\theta(x_2) = \theta(b) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

kullanılır ve $x_1 = c_2$ olarak alınır

$$\theta(x_2) - \theta(c_2) = (x_2 - c_2)\lambda^{1/2} + o(1)$$

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} - \theta(c_2) = (x_2 - c_2)\lambda^{1/2} + o(1)$$

olur. Böylece

$$\theta(c_2) = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2)\lambda^{1/2} + o(1)$$

eşitliğinde Teorem 2.6 kullanılırsa

$$\theta(c_2) = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2)\frac{n\pi}{b-a} + o(1)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Teorem 2.7: Teorem 2.6'nin koşulları altında özdeğerler aşağıdaki eşitliği sağlar ($\lambda_n \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned}
n\pi &= (b-a)\lambda_n^{1/2} \\
&- \lambda_n^{-1/2} \left\{ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] \left(\sin^2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} \right. \right. \right. \\
&- (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \Big) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \Big) \\
&- \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] \left(1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] \left(1 - \sin^2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \\
&- \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{c_2 - c_1} \left(\sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \right. \right. \\
&- \sin \left(2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \Big) \Big) \\
&+ 2 \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m-1)} \right. \\
&+ \frac{1}{2(c_1 - c_2)} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \Big) \\
&+ 2 \cos 2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} \right. \\
&- (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \Big) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m-1)} \Big] \Big\} + o\left(\lambda_n^{-1/2}\right)
\end{aligned}$$

İspat: Teorem 2.6'da

$$\theta(a) = \theta(-x_0) = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \theta(b) = \theta(x_2) = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

kullanılır. Dolayısıyla

$$\sin^2 \theta(a) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin^2 \theta(b) = \sin^2 (2n+1) \frac{\pi}{2} = 1$$

bulunur. Ek olarak Lemma 2.6 eşitlikleri de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.8 : Teorem 2.6 koşulları altında $n \rightarrow \infty$ iken Neumann problemlerinin özdeğerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} = & \frac{n\pi}{b-a} + \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} \right| \right] \left(\sin^2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right. \right. \\
& - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \Bigg) \\
& - \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_0 + c_1}{x_0 + c_2} \right| \right] \left(1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \\
& + \frac{1}{c_2 - c_1} \left[\ln \left| \frac{x_2 - c_1}{x_2 - c_2} \right| \right] \left(1 - \sin^2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{c_2 - c_1} \left(\sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \right. \right. \\
& - \sin \left(2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \Bigg) \\
& + 2 \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{2} + (x_0 + c_1) \frac{n\pi}{b-a} \right) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_0 + c_1)^{2m-1}}{(c_1 - c_2)^{2m} (2m-1)} \right. \\
& + \frac{1}{2(c_1 - c_2)} \left(\frac{x_0 - c_1}{x_0 - c_2} - \frac{x_0 + c_1}{x_0 + 2c_1 - c_2} \right) \Bigg) \\
& + 2 \cos 2 \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - (x_2 - c_2) \frac{n\pi}{b-a} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_2 - x_1}{(c_2 - c_1)^{2m} (2m-1)} \Bigg] \Bigg\} \\
& + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

İspat: Teorem 2.7'ye reversion uygulanır.

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{n\pi}{b-a} + O(1)$$

$$\lambda_n^{-1/2} = \frac{1}{\frac{n\pi}{b-a} (1 + O(n^{-1}))} = \frac{b-a}{n\pi} + O(n^{-2})$$

şeklinde elde edilen değer yerine yazılır.

3.SONUÇLAR

1. $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$

diferensiyel denkleminde $q(x)$ potansiyel fonksiyonu

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

olması durumunda λ özdeğerlerinin Teorem 2.1 ile verilen eşitliği sağladığı ispatlandı.

2. Belirli koşullar altında Teorem 2.1'deki hata terimi $O(\lambda^{-1/2})$ geliştirilerek $o(\lambda^{-1/2})$ olarak elde edildi.

3. $-\infty < a = -x_0 < c_1 < x_0 = x_1 < c_2 < x_2 = b < \infty$ için

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

olması durumunda [1] ve [2] yaklaşımı kullanılarak $h_{ij}(\lambda)$ ($i, j = 1, 2$) değerleri elde edildi (Lemma 2.1, 2.2, 2.3 ve 2.4).

4. $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$

diferensiyel denkleminin

$$y(a) = y(b) = 0$$

dirichlet sınır koşulları durumunda

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

için λ özdeğerleri ($\lambda \rightarrow \infty$) Teorem 2.3 ile elde edildi.

5. Teorem 2.4'te reversiyon metodu kullanılarak

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

denkleminin

$$y(a) = y(b) = 0$$

Dirichlet sınır koşulları durumunda

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

için λ_n özdeğerleri ($n \rightarrow \infty$) Teorem 2.5'te hesaplandı.

$$6. \quad -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

denkleminin

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

Neumann sınır koşulları durumunda

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

için λ özdeğerleri ($\lambda \rightarrow \infty$) Teorem 2.6 ile elde edildi.

7. Teorem 2.7'de reversiyon metodu kullanılarak

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

denkleminin

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

Neumann sınır koşulları durumunda

$$q(x) = \frac{1}{(x - c_1)(x - c_2)}$$

için λ_n özdeğerleri ($n \rightarrow \infty$) Teorem 2.8'de hesaplandı.

4.ÖNERİLER

1. Singülerlik 2'den fazla noktaya genişletilebilir.
2. (2.3) dönüşümlerindeki sonradan belirlenen f fonksiyonu için farklı seçimler gerçekleştirilebilir. ([1])
3. İlgili problemlerin özfonksiyonları incelenebilir.
4. Supremumlar $[-x_0, x_1]$ ve $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde alınmak üzere

$$\begin{aligned}\rho_1(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_1}^x (f^2 - F - q) \sin \left(2\lambda^{1/2}(t - c_1) \right) dt \right| \\ &\quad + \sup \left| \int_{c_1}^x (f^2 - F - q) \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(t - c_1) \right) \right) dt \right| \\ \rho_2(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_2}^x (f^2 - F - q) \sin \left(2\lambda^{1/2}(t - c_2) \right) dt \right| \\ &\quad + \sup \left| \int_{c_2}^x (f^2 - F - q) \left(1 - \cos \left(2\lambda^{1/2}(t - c_2) \right) \right) dt \right| \\ \sigma_1(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_1}^x (f' + q) dt \right| \\ \sigma_2(\lambda) &:= \sup \left| \int_{c_2}^x (f' + q) dt \right|\end{aligned}$$

tanımlandığında ve

$$J_1(\lambda) = (-x_0, x_1) \setminus \left(-\lambda^{-1/2} + c_1, \lambda^{-1/2} + c_1 \right)$$

$$J_2(\lambda) = (x_1, x_2) \setminus \left(-\lambda^{-1/2} + c_2, \lambda^{-1/2} + c_2 \right)$$

sağlandığında yukarıdaki varsayımlar altında Teorem 2.2'de bulunan

$$\rho_1(\lambda) \int_{J_1(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o \left(\lambda^{1/2} \right)$$

$$\rho_2(\lambda) \int_{J_2(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\sigma_1(\lambda) \int_{J_1(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\sigma_2(\lambda) \int_{J_2(\lambda)} |f^2 - F - q| dx = o(\lambda^{1/2})$$

$$\int_{J_1(\lambda)} |f'| (1 + |f|) dt = o(\lambda^{1/2})$$

$$\int_{J_2(\lambda)} |f'| (1 + |f|) dt = o(\lambda^{1/2})$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilebilir. Ayrıca bu hipotezlerin hafifletilebileceği araştırılır.

5. KAYNAKLAR

1. Harris, B. J., A note on a paper of Atkinson concerning the asymptotics of an eigenvalue problem with interior singularity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 110A (1988) 63-71.
2. Atkinson, F. V., Asymptotics of an eigenvalue problem involving an interior singularity, ANL-87-26, 2 (1988) 1-18.
3. Andrews, L. C., Elementary Partial Differential Equations With Boundary Value Problems, Florida(Orlando),1986.
4. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., Yüksek Matematik I: Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, İkinci Basım, Liretatür Yayınları, İstanbul, 2002.
5. Hochstadt, H., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publications Inc.,New York, 1963.
6. Murray, J.D., Asymptotic Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1974.
7. Atkinson, F.V. and Fulton, C.T., Asymptotics of eigenvalues for problems on a finite interval with one limit circle singularity I, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 99 (1984) 51-70.
8. W.N. Everitt and A. Zettl. Sturm Liouville differential operations in direct sum spaces. Rocky Mountain J. Math. 16 (1986) 497-516.

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini Metinkale İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Akçaabat 17 Şubat Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

2009 yılında kazandığı Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik Bölümünü 2012-2013 eğitim-öğretim yılında tamamladı. 2014-2015 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon Eğitimi sertifikasını aldı.

2015-2017 yılları arasında MEB'de ücretli Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MatematikAnabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.