KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RİJİT DÜZLEME BAĞLI İZOTROPİK TABAKAYA OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ORTOTROP TABAKANIN SÜREKLİ VE SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

İnş. Yük. Müh. Pembe Merve KARABULUT

EKİM 2021
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RİJİT DÜZLEME BAĞLI İZOTROPİK TABAKAYA OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ORTOTROP TABAKANIN SÜREKLİ VE SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Pembe Merve KARABULUT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 / 09 /2021
Tezin Savunma Tarihi : 13 / 10 /2021

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsa ÇÖMEZ

Trabzon 2021

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır.

"Rijit Düzleme Bağlı İzotropik Tabakaya Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Ortotrop Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi" isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, bu süreçte manevi desteğini benden esirgemeyen, öğrencisi olmaktan onur duyduğum ve kendisini tanımaktan çok mutlu olduğum danışman Hocam "Prof. Dr. İsa Çömez" 'e en içten teşekkürlerimi borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca ve KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevliliği görevim esnasında üzerimde emeği olan bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen bütün hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma ve bu sürecin her aşamasında maddi ve manevi arkamda olan aileme ayrıca teşekkür etmek isterim.

Pembe Merve Karabulut

Trabzon,2021.

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum Rijit Düzleme Bağlı İzotropik Tabakaya Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. İsa Çömez'in sorumluluğumda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/10/2021.

Pembe Merve KARABULUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ IV
İÇİNDEKİLER V
ÖZET VII
SUMMARY VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ IX
TABLOLAR (ÇİZELGELER) DİZİNİ XIII
SEMBOLLER DİZİNİ XVI
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1.1. Giriş 1
1.1.2. Çalışmanın Önemi ve Amacı 2
1.1.3. Literatür Özeti 2
1.1.4. Çalışmanın Kapsamı 13
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi 13
1.2.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Ortotrop Tabakanın Genel Denklemlerinin Elde Edilmesi 14
1.2.2. Homojen Tabakanın Genel Denklemlerinin Elde Edilmesi 21
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 28
2.1. Problemin Tanımı 28
2.2. Katsayıların Belirlenmesi 32
2.2.1. Sürekli Temas Durumu 32
2.2.2. Süreksiz Temas Durumu 34
2.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi 36
2.3.1. Sürekli Temas Hali 36
2.3.2. Süreksiz Temas Hali 42
2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Sayısal Analiz 51
3. BULGULAR VE İRDELEME 58
3.1. Sürekli Temas Durumu 60
3.2. Süreksiz Temas Durumu 85
4. SONUÇLAR 113
5. ÖNERİLER 117

6. KAYNAKLAR..... 118
ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

RİJİT DÜZLEME BAĞLI İZOTROPİK TABAKAYA OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ORTOTROP TABAKANIN SÜREKLİ VE SÜREKSİZ TEMAS PROBLEMİ

İnş. Yük. Müh. Pembe Merve Karabulut

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. İsa Çömez
2021, 138 Sayfa

Bu çalışmada, rijit düzleme bağlı izotropik tabakaya oturan fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisi ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümlenmiş ve her iki çözümden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Birinci bölümde, temas problemleri üzerine günümüze kadar yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak olan elastik tabaka ve fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakaya ait gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elastisitenin temel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. İkinci bölümde, problem sürekli ve süreksiz hal için tanımlanmış ve her iki hal için sınır şartları yazılmıştır. Problem sürekli ve süreksiz halde gerilme ve yer değiştirme ifadelerine sınır şartları uygulanarak tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Gauss-Chebyshev formülasyonu yardımıyla cebrik denklem sitemine indirgenip çözülmüştür. Ayrıca problem ANSYS sonlu elemanlar paket programı yardımıyla modellenip sonlu elemanlar çözümleri yapılmıştır. Üçüncü bölümde kütle kuvvetlerinin etkisi altında ortotrop malzemenin inhomojenitesinin; panç-tabaka ve tabaka-tabaka arasındaki boyutsuz temas uzunlukları, temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları, tabakalar arasındaki açılma bölgeleri üzerine etkilerini ortaya koyan sonuçlar edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sürekli ve süreksiz temas problemi, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, ortotrop malzeme, sonlu elemanlar yöntemi.

A Doctoral Thesis

SUMMARY

CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS CONTACT PROBLEM OF A FUNCTIONALLY GRADED ORTHOTROP LAYER LYING ON AN ISOTROPIC LAYER BONDED TO A RIGID SUBSTRATE

Pembe Merve Karabulut

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. İsa Çömez
2021, 138 Pages

In this study, continuous and discontinuous contact problem of a a functionally graded orthotropic layer lying on an isotropic layer bonded to a rigid substrate is solved by using elasticity theory and a finite element method, and the results obtained from both solutions are compared.

In the first chapter, some studies on contact problems are mentioned. The stress and displacement expressions of the isotropic layer and functionally graded orthotropic layer have been obtained by using basic equations of elasticity and integral transformation techniques. In the second chapter, the problem is defined for continuous and discontinuous cases and boundary conditions for both cases are written. The problem is reduced to the singular integral equation system by applying boundary conditions to the stress and displacement expressions in continuous and discontinuous case. Using Gauss-Chebyshev formulation the singular integral equation system is reduced to the algebraic equation system. Also, the problem was modelled with the ANSYS package program and finite element solutions are performed. In the third chapter, the inhomogeneity of orthotropic material under the effect of mass forces; the results revealing the effects on the dimensionless contact lengths, contact stresses, initial separation loads, initial separation distances, and opening regions between the layers were obtained.

Keywords: continuous and discontinuous contact, functionally graded material, orthotropic material, finite element method.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Sürekli temas problemin geometrisi……. 28

Şekil 2. Süreksiz temas problemin geometrisi…… 29

Şekil 3. Analiz geometrisi…… 53

Şekil 4. PLANE183 elemanın geometrisi (üçgen ve dörtgen) …… 55

Şekil 5. ANSYS programında oluşturulan dikdörtgen ağ yapısının bir bölümü. 56

Şekil 6. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları…. 57

Şekil 7. Analiz sonrası şekil değiştirmiş hal ve düşey yer değiştirmeler (100x) 58

Şekil 8.a. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 1.5$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ……. 75

Şekil 8.b. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 3$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …… 76

Şekil 8.c. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 6$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …… 76

Şekil 9. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_1 = 4$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …… 77

Şekil 10.a. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 0.5x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem) ……. 78

Şekil 10.b. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 1x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem) ……..... 79

Şekil 10.c. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 2x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem) …… 79

Şekil 11. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi (Analitik Yöntem) 80

Şekil 12. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi (Analitik Yöntem) 81

Şekil 13. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\rho_2 / \rho_{10} = 1.25$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ……. 82

Şekil 14.a. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 10$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ……. 83

Şekil 14.b. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 100$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …… 83

Şekil 14.c. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 250$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …… 84

Şekil 15. Sürekli temasta sınır durumu $\left(P = P_{cr}\right)$ için R/h panç yarıçapının panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. $h_2 / h_1 = 1$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) …….. 85

Şekil 16.a Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.8x10^{-3}$, $\Gamma_2 = 1.5$) 98

Şekil 16.b Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 1x10^{-3}$, $\Gamma_2 = 3$) 99

Şekil 16.c Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 1.5x10^{-3}$, $\Gamma_2 = 6$) 100

Şekil 17. Süreksiz temas durumu için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 1.5x10^{-3}, \Gamma_1 = 4$) 102

Şekil 18. Süreksiz temas durumu için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.4x10^{-3}$) 103

Şekil 19. Süreksiz temas durumu için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.4x10^{-3}$) 104

Şekil 20. Süreksiz temas durumu için Ezz ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.4x10^{-3}$) 106

Şekil 21. Süreksiz temas durumu için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$) 107

Şekil 22.a Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}, R/h = 10$) 108

Şekil 22.b Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}, R/h = 100$) ……. 109

Şekil 22.c Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}, R/h = 250$) ……. 110

Şekil 23. Süreksiz temas durumu için boyutsuz R/h panç yarıçapının panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$, $h_2 / h_1 = 0.25$) ……. 111

Şekil 24. R/h_1 panç yarıçapı oranın değişimin σ_z boyutsuz normal gerilmelerine olan etkisi. ($P^* = 0.4x10^{-3}, \Gamma_1 = 4, \Gamma_2 = 1.5$) …….. 112

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Sonlu eleman çözümü için uygun eleman sayısının belirlenmesi…. 54

Tablo 2. Ortotropik malzeme özellikleri……... 59

Tablo 3. Problemin analitik çözümünde Gauss-Chebyshev formülasyonunda optimum N parametresinin belirlenmesi …… 60

Tablo 4. Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametrelerinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi …….. 61

Tablo 5. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi. …… 62

Tablo 6. E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi. …… 63

Tablo 7. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi. …… 64

Tablo 8. ρ_2 / ρ_{10} yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi. ……. 64

Tablo 9. h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi. …… 66

Tablo 10. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi …….. 67

Tablo 11. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve $\rho_{10} g / C_{550}$ yoğunluk oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi ……... 69

Tablo 12. Farklı ortotrop malzeme türlerinin (A, B,C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması $P = P_{cr}^{*} = P_{cr} / \left(\mu_{xy}\right)_A$, $\left(\mu_{xy}\right)_A = 3.929x10^9$ ……... 71

Tablo 13. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması ……. 72

Tablo 14. Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması …… 73

Tablo 15. h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması …… 74

Tablo 16. Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametrelerinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi ……. 86

Tablo 17. E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$……...….. 87

Tablo 18. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.5x10^{-3}\right)$……. 88

Tablo 19. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$…… 88

Tablo 20. ρ_2 / ρ_{10} yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$ …… 89

Tablo 21. h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$……. 90

Tablo 22. Farklı ortotropik malzeme türlerinin (A,B,C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu , tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması $P^* = P / \left(\mu_{xy}\right)_A = 3.5x10^{-3}$, $\left(\mu_{xy}\right)_A = 3.929x10^9$ ……. 92

Tablo 23. Uygulanan yük miktarının panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması ($P^* = P / \left(C_{550} h_1\right), \Gamma_1 = 0.2 , \Gamma_2 = 3$, C malzemesi) 92

Tablo 24. Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması. …… 93

Tablo 25. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması. ……. 94

Tablo 26. h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması 95

Tablo 27. Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisine ait elde edilen sonuçlarının Çömez (2019) ile karşılaştırılması $R / h_1 = 5$, $\mu_2 / C_{550} = \infty$, $\rho_{10} g h_1 / C_{550} = 1x10^{-6}$, $P / (C_{550} h_1) = 0.2x10^{-3}$, $\Gamma_1 = 1$, $E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ (izotropik özel hal) …… 97

SEMBOLLER DİZİNİ

a Rijit panç ve FD ortotrop tabaka arasındaki yarı temas uzunluğu

b Tabakalar arasındaki ayrılmanın başlangıç noktası

c Tabakalar arasındaki ayrılmanın bitiş noktası

E_{xx} Ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülü

E_{yy} Ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülü

E_{zz} Ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülü

G_{13} Ortotrop tabakanın xz düzlemindeki kayma modülü

G_{23} Ortotrop tabakanın yz düzlemindeki kayma modülü

G_{12} Ortotrop tabakanın xy düzlemindeki kayma modülü

C_{ij} Malzemenin x, y ve z doğrultularındaki elastisite modüllerine, Poisson oranlarına, kayma modüllerine bağlı elastik katsayılar

X, Y x ve y eksenleri doğrultusundaki kütle kuvvetleri bileşenleri

x, y Kartezyen koordinatlar

h_1 Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın yüksekliği

h_2 Homojen izotrop tabakanın yüksekliği

σ_x, σ_y x ve y doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri

τ_{xy} xy düzlemindeki kayma gerilmesi bileşeni

P Uygulanan dış yük

P_{cr}	İlk ayrılma için gerekli kritik yük miktarı
$p(x)$	Rijit panç altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
$\varphi(x)$	FD ortotrop tabaka ile homojen izotrop tabaka arasındaki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon
R	Rijit dairesel pançın yarıçapı
u , v	Düzlem halde Kartezyen koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleri
x_{cr}	FD ortotrop tabaka ve homojen izotrop yarım düzlem arasındaki ilk ayrılma uzaklığı
∂	Türev operatörü
κ_1	FD ortotrop tabakanın Kolosov sabiti
κ_2	Homojen izotrop tabakanın Kolosov sabiti
ν_1	FD ortotrop tabakanın Poisson oranı
ν_2	Homojen izotrop tabakanın Poisson oranı
$\mu_1(y)$	FD ortotrop tabakanın kayma modülü fonksiyonu
μ_0	FD ortotrop tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü
μ_2	Homojen izotrop tabakanın kayma modülü
$\rho_1(y)$	FD ortotrop tabakanın yoğunluk fonksiyonu
ρ_0	FD ortotrop tabakanın alt yüzeyinin yoğunluğu
ρ_2	Homojen izotrop tabakanın yoğunluğu
g	Yer çekimi ivmesi
ϕ_1, ψ_1	FD ortotrop tabaka için ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
ϕ_2 ,ψ_2	Homojen izotrop tabakanın ters Fourier dönüşüm fonksiyonları

β Rijitlik parametresi

γ Yoğunluk parametresi

Γ_1 Rijitlik inhomojenite parametresi

Γ_2 Yoğunluk inhomojenite parametresi

∇^2 Laplace opratörü

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleriyle temas halindedir. Bu temasın karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletiş şekilleri, temas halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki temas gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler temasın söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular temas probleminin uygulama sahasına girmektedir. (Çömez, 2009).

Elastisite teorisi mühendislik yapılarının; gerilme, yer ve şekil değiştirme problemlerinin çözümünde elemanter metotların yetersiz kaldığı pek çok duruma göre çok daha kesin sonuçlar vermektedir. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerle birlikte sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sınır elemanlar gibi sayısal yöntemlerin mühendislik problemlerinde kullanımı yaygınlaşmıştır. Günümüzde mühendislikte karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılan en yaygın ve en etkili sayısal yöntemlerden biri de sonlu elemanlar yöntemidir.

Yapı elemanlarının hasara uğramasındaki en temel neden yüksek gerilme bölgelerinde oluşan kırılmalardır. Bu nedenle tasarım sırasında, yüzeyler arasında temastan dolayı meydana gelen temas gerilme dağılımlarının belirlenmesi önemlidir. Mühendislik uygulamalarında yüksek sıcaklığa dayanıklılık gerektiren kaplama teknolojisinde, kaplama olarak seramik malzeme seçilmesi yüksek sıcaklığa karşı dayanıklılık kazandırırken, seramik ve yapıştırıldığı gövde arasındaki farklı termal genleşme katsayıları gerilme yığılmalarına yol açar. Diğer taraftan malzeme biliminin ilerlemesiyle malzeme özelliklerinin malzeme içerisinde konuma bağlı olarak değiştirilebildiği üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu şekilde üretilen malzemeler FDM (Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme) olarak isimlendirilmektedir. Değişken özellikli malzeme veya malzeme sistemleri kullanılarak sistemin çalışma sıcaklığı yükseltilmiş, malzemenin sağlamlık, tokluk ve korozyon dayanımı gibi özelliklerinin artırılması sağlanmıştır. Sağladıkları üstün özellikler sayesinde FDM'lerin günümüzde yüksek sıcaklık uygulamaları, uzay araçları, tıp, mikro

elektronik ve endüstriyel uygulamalar gibi birçok alanda kullanımı yaygınlaşmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirme düşüncesiyle malzeme teknolojisinde doğmuş bir fikir olup bu alanda hızlı gelişmeler meydana gelmektedir. FDM'ler sürekli değişen dereceli/kademeli bir yapıda birden fazla malzemeden oluşurlar. Birleşimin tek bir yapıda uyumlu bir şekilde çalışabilmesi için kademeli bir geçiş bulunmaktadır ve bu nedenle malzeme özellikleri sabit sayısal değerler olarak değil fonksiyonlar ile ifade edilmektedir.

1.1.2. Çalışmanın Önemi ve Amacı

Bilgisayar teknolojisinde meydana gelen hızlı değişimle beraber sayısal çözüm yöntemlerinin kullanımı kolaylaşmış ve yaygınlaşmıştır. Bu durum değişik malzeme özelliklerinin mekanik davranışlarının analiz edilmesini ve simülasyonunun yapılmasını sağlayarak, farklı kullanım alanlarında değişimin avantaj ve dezavantajlarının belirlenmesine yardımcı olmakla beraber daha iyi tasarım ve modellerin geliştirilmesinin önünü açmaktadır. Son yıllarda tabakalı ortamların temas mekaniğinde de fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin davranışı araştırma konusu olmuştur. Yapılan literatür araştırması sonucunda fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakaların çözümünde kütle kuvvetlerinin hesaba katılmasına ilişkin herhangi bir çalışma olmadığı saptanmıştır. Literatürde bu eksikliğin giderilmesine katkıda bulunmak, bu çalışmanın içerdiği yenilik olarak düşünülmektedir.

1.1.3. Literatür Özeti

Temas mekaniğinde kütle kuvvetlerinin etkisi kaçınılamaz gerçektir. Kütle kuvvetlerinin etkisi altında sürekli ve süreksiz temas olmak üzere iki tür temas oluşur. Sürekli temas halinde malzemeler arasında ayrılma meydana gelmez. Uygulanan yük kritik değeri aştığında ise malzemeler arasında ayrılma bölgeleri meydana gelir ve bu durum süreksiz temas hali olarak adlandırılır. Literatürde kütle kuvvetlerinin etkisinin dikkate alındığı temas mekaniği problemlerine verilebilecek örneklerden bazıları şunlardır.

Civelek vd. (1978), rijit dikdörtgen blok aracılığıyla bastırılan elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiş, malzeme özellikleri ve yükleme durumlarının

sürekli ve süreksiz halde temas gerilmesi dağılımları, temas uzunlukları, ilk ayrılma yük ve uzaklıkları ile süreksiz temasta ayrılma bölgesine olan etkisini araştırmışlardır.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), elastik yarım düzlem üzerine oturan yayılı yük ile yüklenmiş elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini elastisite teorisi ve Fourier dönüşümleri yardımıyla çözümlemişlerdir.

Çakıroğlu vd. (2001), elastik yarım düzlem üzerine oturan iki elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Çeşitli malzeme özellikleri ve yükleme durumlarının sistemde meydana gelen sürekli hal için ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıkları; süreksiz hal için de ayrılma bölgeleri ve her iki durum için temas gerilmesi değerine olan etkilerini araştırmışlardır.

Kahya vd. (2007), iki ortotrop tabakanın sürekli temas problemini incelemişlerdir. Ortotrop malzeme özelliklerinin temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarına olan etkisini incelemişlerdir.

Özşahin ve Taşkıner (2013), üç tane rijit dikdörtgen panç aracılığıyla yüklenmiş, elastik yarım düzlem üzerine oturan bir elastik tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Temas gerilme dağılımları, ilk ayrılma yük ve uzaklıkları, ayrılma bölgesinin uzunluğu ve bu bölgedeki düşey yer değiştirmenin miktarına ilişkin sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Öner vd. (2015), elastik yarım düzlem üzerine uzanan iki elastik tabakanın sürekli temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak ele almışlardır.

Öner vd. (2017), elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarına olan etkisini incelemişlerdir.

Adıyaman vd. (2017), rijit düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyinde rijitlik ve yoğunluk oranlarında meydana gelen azalmanın sürekli temas hali için ilk ayrılma uzaklıklarında, süreksiz temas hali için de ayrılma bölgesinin büyüklüğünde artış meydana getirdiğini gözlemlemişlerdir.

Polat vd. (2018), iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş elastik yarım düzlem üzerine uzanan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik yöntem kullanarak ele almışlardır.

Çömez (2019), rijit silindirik panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini incelemiştir. İlk ayrılma yükü, ilk ayrılma uzaklıkları, süreksiz temas için ayrılma bölgesi, temas gerilme ve uzunluklarına ait sayısal sonuçlar elde etmiştir.

Kaya vd. (2020), alt tarafından rijit düzleme bağlı elastik tabaka üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik yöntem ve sonlu eleman yöntemini kullanarak ele almışlardır.

Yaylacı vd. (2020), yayılı yük ile yüklenmiş rijit düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözümlemiş ve iki farklı yöntemden yeterli yaklaşım oranlarında çözümler elde etmişlerdir.

Yaylacı vd. (2021), elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözümlemiş ve iki farklı yöntemden elde edilen sonuçların yeterli düzeyde birbirine yakın olduğunu göstermişlerdir.

Kütle kuvvetlerinin etkisinin dikkate alınmadığı durumda temas sınırlı bir bölgede oluşmaktadır. Bu duruma ayrılmalı temas durumu adı verilmektedir. Literatürde ayrılmalı temas durumu ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları şunlardır.

El-Borgi vd. (2006), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitlik parametresi ve tabaka yüksekliğinin temas gerilmesi dağılımları ve temas uzunluklarına olan etkisini incelemişlerdir.

Rhimi vd. (2009), homojen-elastik yarım düzlem üzerine oturan yayılı yük ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı eksenel simetrik temas problemini çözümlemişlerdir.

Rhimi vd. (2011), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen yarım düzlem arasındaki eksenel simetrik ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir.

El-Borgi vd. (2014), yayılı yük ile yüklenmiş homojen-elastik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Sürtünme katsayısının ve malzeme değişim parametresinin temas gerilmelerinin dağılımı ve temas uzunluklarına olan etkisini göstermişlerdir.

Yan ve Li (2015), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik tabaka arasındaki sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini Fourier dönüşümleri ve Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemi yardımıyla incelemişlerdir.

Adıyaman vd. (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve iki homojen çeyrek düzlem arasındaki sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir.

Çömez vd. (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Her iki tabakanın malzeme özelliklerinin fonksiyonel olarak değiştiği durumun temas gerilmeleri ve temas uzunluklarına olan etkisi incelenmiştir.

El-Borgi ve Çömez (2017), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş homojen yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini çözümlemişlerdir.

Yan ve Mi (2017), üst yüzeyinden itibaren bir kısmı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliğine sahip tabaka ve homojen yarım düzlemin sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş kısmın kalınlığının temas gerilmeleri ve temas uzunluklarını büyük oranda etkilediği sonucuna varmışlardır.

Yılmaz vd. (2018), fonksiyonel derecelendirilmiş çift tabakanın sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini Fourier dönüşümleri ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemişlerdir. Sürtünme katsayısının, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitlik parametresinin ve tabaka kalınlıklarının temas gerilmeleri ve temas uzunluklarına olan etkisini gösteren sonuçlar elde etmişlerdir.

Çömez vd. (2018), iki çeyrek düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Geometrik özellikler ve malzeme özelliklerindeki değişimin temas uzunlukları ve temas gerilmelerine olan etkisini incelemişlerdir.

Yan vd. (2019), elastik yarım düzleme bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözümlemişlerdir.

Lopes ve Hills (2019), elastik yarım düzleme oturan ve simetri ekseninden düşey noktasal yük ile yüklenmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Yüzeysel sürtünme kuvvetlerinin uygulanan yükle orantılı olmasına rağmen temas yüzeylerinin yükten bağımsız olduğu sonucuna varmışlardır.

Yaylacı vd. (2021), Winkler zemini üzerine oturan homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakadan oluşan sistemin sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini analitik yöntem, sonlu elemanlar yöntemi ve yapay sinir ağları yardımıyla çözümlemişler ve elde edilen sonuçların istenilen yaklaşım oranlarında olduğunu göstermişlerdir.

Bağlı temas durumunda malzemeler arasında ayrılma bölgesi oluşmamaktadır. Bağlı temas durumuna ait literatürde mevcut temas problemlerinden bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Güler ve Erdoğan (2004), homojen yarım düzleme bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir.

Güler ve Erdoğan (2007), değişken profile bağlı bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki sürtünmeli ve bağlı temas problemini ele almışlardır.

Ke ve Wang (2007), homojen yarım düzleme bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini transfer matris metodu ve Fourier integral dönüşümleri yardımıyla çözümlemişlerdir.

Yang ve Ke (2008), birbirlerine tam bağlı homojen homojen tabaka, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen yarım düzlemden oluşan sistemin bağlı temas problemini incelemişlerdir.

Choi (2009), rijit düzleme bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve rijit dikdörtgen panç arasındaki sürtünmeli ve bağlı temas problemini çözümlemiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitlik parametresinin, sürtünme katsayısının ve panç genişliğinin temas uzunlukları ve temas gerilme dağılımlarına olan etkisini incelemişlerdir.

Chen ve Chen (2012), homojen yarım düzleme tam bağlı rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Tabakanın kayma modülünün tabaka alt yüzeyinden itibaren doğrusal olarak değiştiği kabul edilmiştir.

Çömez ve Erdöl (2013), rijit bir panç aracılığıyla bastırılan homojen yarım düzleme tam bağlı elastik tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Sürtünmeli ve sürtünmesiz temas durumu için temas gerilmeleri, temas uzunlukları, normal gerilmeler ve kayma gerilmelerine ait sayısal sonuçlar elde etmişlerdir.

Chidlow ve Teodorescu (2014), birbirlerine tam bağlı homojen tabaka, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmeli temas

problemini incelemişlerdir. Derecelendirilmiş elastik tabakanın yüzey altı gerilmelerine sürtünme katsayısının etkisini ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır.

Chen vd. (2015), değişken açılı bir eksende fonksiyonel derecelendirilmiş yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele alarak yüksek aşınma dayanımına sahip yüzeylerin tasarımı ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin mekaniğini anlamaya yardımcı olmayı amaçlamışlardır.

Çömez ve Güler (2017), rijit bir panç aracılıyla yüklenmiş alt tarafından rijit düzleme ve birbirlerine tam bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır.

Piezoelektrik kristal yapıdaki cisimlerin kendilerine dışarıdan uygulanan basınç miktarı ile orantılı olarak elektrik üretme özelliğine denir. Literatürde piezoelektrik malzemelerin temasına dair yapılan çalışmalara aşağıdaki örnekler verilebilir.

Ke vd. (2008), piezoelektrik yarım düzleme oturan fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabakanın sürtünmesiz temas mekaniğini ele almışlardır. Elde edilen sonuçlar fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabakanın malzeme değişim sabiti ve panç geometrisinin temas performansında çok önemli bir rol oynadığını göstermektedir.

Ke vd. (2010), piezoelektrik yarım düzlem üzerine uzanan fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Malzeme değişim özellikleri ve sürtünme katsayısının fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabakanın temas performansında çok önemli bir rol oynadığı sonucunu elde etmişlerdir.

Ma vd. (2014), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş elektromanyetik elastik yarım düzlem üzerine uzanan, fonksiyonel derecelendirilmiş elektromanyetik elastik tabakanın piezoelektirik temas problemini incelemişlerdir. Malzeme değişim parametresinin, panç geometrisinin, elektromanyetik mekanik yüklerin fonksiyonel derecelendirilmiş elektromanyetik elastik temas davranışında önemli etkisini ortaya koymuşlardır.

Ma vd. (2014), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş piezoelektrik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Sürtünme katsayısının piezoelektrik malzemelerin elektro-mekanik sürtünmeli temas davranışında önemli etkisi olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Ellomi vd (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş elektromanyetik elastik yarım düzlemle rijit panç arasındaki sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Bu çalışmada dikdörtgen ve dairesel panç profilleri için malzeme değişim parametresi, sürtünme katsayısı,

elastik, elektrik ve manyetik katsayıların yüzeydeki temas gerilmeleri elektriksel yer değiştirme, manyetik indüksiyon dağılımı üzerine etkilerini araştırmışlardır.

Su vd. (2016), üç farklı panç profili aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabaka ve piezoelektrik yarım düzlemden oluşan sistemin eksenel simetrik sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır.

Su vd. (2018), piezoelektrik yarım düzlem üzerine uzanan fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik tabakanın sürtünmeli temas probleminin çözümü için yeni bir yöntem ortaya koymuşlar ve literatürde klasik yöntem ile çözülen çalışmalar da ele alınarak yöntemin etkinliğini ve avantajlarını incelemişlerdir.

Song vd. (2020), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş piezoelektrik yarım düzlemin sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Yüzey etkilerinin piezoelektrik malzemelerin mikro-nano ölçekte temas davranışında önemli bir rol oynadığı sonucunu elde etmişlerdir.

Termoelastik malzemelerde uygulanan yükün bir kısmı ısıya dönüşürken bir kısmı da yük kalktığında geri iade edilir. Son yıllarda temas mekaniğinde termoelastik malzemelerin kullanımına verilebilecek örneklerden bazıları şunlardır.

Choi ve Paulino (2008), rijit dikdörtgen panç aracılığıyla yüklenmiş homojen yarım düzlem–fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka–homojen tabakadan oluşan sistemin sürtünmeli termoelastik temas problemini ele almışlardır.

Lui vd. (2011), sabit bir hızla hareket eden rijit silindirik bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen yarım düzlemin sürtünmeli termoelastik temas problemini çözümlemişlerdir.

Liu vd. (2011), homojen yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini çözümlemişlerdir. Malzeme değişim parametresinin ve sürtünme katsayısının termoelastik özelliklere olan etkisini ortaya koymuşlardır.

Zhou ve Ke (2011), sabit bir hızla hareket eden panç aracılığıyla yüklenmiş piezoelektrik tabakanın sürtünmeli termoelastik temas problemini ele almışlardır.

Chen vd. (2012), sabit bir hızla hareket eden rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş alt tarafından rijit düzleme tam bağlı termoelastik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır.

Chen ve Chen (2013), hareketli bir panç aracılığıyla yüklenmiş rijit bir düzleme bağlı termoelastik tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Göreceli hızın, sürtünme katsayısının, kayma modülleri oranının ve termal parametrelerin temas gerilme parametrelerine olan etkisini ortaya koymuşlardır.

Mao vd. (2014), fonksiyonel derecelendirilmiş termoelastik tabaka ve homojen yarım düzlem arasındaki termoelastik kararsızlık problemini ele almışlardır. Sonuçlar termoelastik kararsızlık davranışının fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme indeksiyle değişebileceğini göstermektedir.

Balcı vd. (2015), sabit bir hızla hareket eden rijit dikdörtgen bir panç aracılığıyla yüklenmiş termoelastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır.

Mao vd. (2015), alt ve üst yüzeyinden düzgün yayılı yük ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve homojen tabakadan oluşan sistemin sürtünmesiz termoelastik temas problemini ele almışlardır.

Balcı vd. (2017), rijit dikdörtgen panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş termoelastik tabaka ve homojen yarım düzlem arasındaki sürtünmeli temas problemini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözümlemişlerdir. Çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin yüzey gerilmelerine olan etkilerini ortaya koymuşlardır.

Wang vd. (2018), rijit bir panç aracılığıyla yüklemiş termoelastik tabaka ve yarım düzlemden oluşan sistemin 3 boyutlu sürtünmeli temas problemini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak ele almışlardır.

Çömez (2021), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş termoelastik tabaka ve yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini ele almıştır. Termoelastik parametrelerin, sürtünme katsayısının, dış yükün ve panç çapının temas gerilemeleri ve temas uzunlukları üzerindeki etkilerini göstermiştir.

Liu vd. (2021), kendi ekseni etrafında dönen rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş termoelastik tabakanın eksenel simetrik temas problemini incelemişlerdir. Sürtünme katsayısı, açısal hız, fonksiyonel değişim indeksi, tabaka kalınlığı ve panç geometrisinin termoelastik temas özelliklerine olan etkisini araştırmışlardır.

Bazı temas problemlerinde yükün uygulandığı panç sabit olmayıp belirli bir hızla yüzey boyunca hareket etmektedir. Temas problemlerinde pançın hareketli olması durumuna dair yapılmış çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Zhou ve Lee (2012), sabit bir hızla hareket eden rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş elektromanyetik elastik yarım düzlemin piezoelektrik temas problemini incelemişlerdir.

Zhou ve Lee (2013), değişken profile sahip rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş anizotropik piezoelektrik malzemelerin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Sürtünme katsayısının yüzey gerilmeleri ve elektriksel yer değiştirmeler üzerinde olan etkisini incelemişlerdir.

Çömez (2015), sabit bir hızla hareket eden rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş alt tarafından tam bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini ele almıştır.

Çömez (2017), sabit bir hızla hareket eden rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş alt tarafından tam bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almıştır.

Balcı ve Dağ (2018), sabit bir hızla hareket eden rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş homojen tabaka-yarım düzlem sisteminin sürtünmeli temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak ele almışlardır. Panç hızının, malzeme parametrelerinin, geometrik parametrelerin ve sürtünmenin temas gerilmeleri üzerine olan etkisini araştırmışlardır.

Balcı ve Dağ (2019), sabit bir hızla hareket eden rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka- homojen yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Pançın hızı, sürtünme katsayısı, malzeme inhomojenitesi ve geometrik parametrelerinin temas gerilmeleri üzerine olan etkisini araştırmışlardır.

Fiziksel özellikleri malzeme içinde yöne bağlı olarak değişen malzemeler anizotropik malzeme olarak adlandırılmaktadır. Temas mekaniğinde anizotropik malzemeler kullanılarak yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Kahya vd. (2007), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş anizotropik tabaka ve anizotropik yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır. Temas gerilmeleri ve temas uzunluklarının malzeme içindeki lif açısının değişiminden önemli ölçüde etkilendiği sonucunu elde etmişlerdir.

Batra ve Jiang (2008), sonlu ebatlara sahip anizotropik tabaka ve rijit panç arasındaki sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır.

Bir malzemede bir düzleme göre malzeme simetrisi var ise böyle malzemelere monoklinik malzeme adı verilir. Temas mekaniğinde monoklinik malzemeler kullanılarak yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Çömez ve Yılmaz (2018), rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş monoklinik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemlerini kullanarak ele almışlar ve her iki yöntemden birbirleriyle oldukça uyumlu sonuçlar elde etmişlerdir.

Yılmaz vd. (2019), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş birbirlerine tam bağlı monoklinik tabaka ve izotropik yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Panç profili değişkendir. Problemin çözümünde analitik yöntem

ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır ve her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Ortotrop malzemeler anizotrop malzemelerin bir alt grubudur ve üç ana simetri düzlemi bulunur. Malzeme özellikleri bu eksenlere göre simetriktir. Ortotrop malzeme 3 tane elastisite modülü E_x, E_y, E_z, 3 tane Poisson oranı υ_x υ_y υ_z ve 3 tane kayma modülü G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} olmak üzere 9 malzeme sabiti ile ifade edilir. Temas mekaniğinde ortotrop malzemeler kullanılarak yapılan çalışmalara verilebilecek örneklerden bazıları şunlardır.

Chaudhuri ve Ray (1998), üst yüzeyinden yayılı yük ile yüklü ortotrop yarım düzlem üzerine uzanan ortotrop tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini ele almışlardır ve ortotrop malzeme özelliklerinin temas gerilemeleri ve temas uzunluklarına olan etkisini ortaya koyan sonuçlar elde etmişlerdir.

Kahya vd. (2007), iki ortotropik tabakanın sürekli temas problemini incelemişlerdir. Ortotrop malzeme özelliklerinin temas gerilmeleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarına olan etkisini incelemişlerdir.

Erbaş vd. (2011), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş ortotrop tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Yükleme panç merkezinden belirli bir eksantrisiteye sahiptir ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için asimtotik yöntemden faydalanılmıştır.

Küçüksucu vd. (2015), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş ortotrop yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Çeşitli malzeme parametreleri ve geometrik parametrelerin değişiminin çatlak dayanımına olan etkisini belirlenmeye çalışılmıştır.

Küçüksucu ve Güler (2016), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş ortotropik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Ortotrop malzeme parametrelerinin ve sürtünme katsayısının temas gerilmeleri ve temas uzunluklarına olan etkisini araştırmışlardır.

Güler vd. (2017), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözümlemişlerdir.

Alina vd. (2017), sabit bir hızla hareket eden rijit silindirik panç aracılığıyla yüklenmiş ortotrop yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır.

Arslan ve Dağ (2018), değişken profile sahip rijit panç ile homojen izotrop yarım düzleme bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sürtünmeli temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak ele almışlardır.

Sürtünme katsayısı, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme parametreleri ve ortotrop malzeme özelliklerinin sistemin temas davranışına olan etkisini ortaya koymuşlardır.

Alina vd. (2018), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş izotrop yarım düzleme bağlı ortotrap tabakanın sürtünmeli temas problemini çözümlemişlerdir. Yüzey gerilme dağılımlarına rijitlik oranı ve kayma parametrelerinin poisson oranına kıyasla çok daha etkili olduğu sonucunu elde etmişlerdir.

Yılmaz vd. (2018), rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş birbirlerine tam bağlı ortotrop tabaka–izotrop yarım düzlemden oluşan sistemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. İzotrop ve ortotrop malzeme özelliklerinin, geometrik özelliklerin ve sürtünme etkisinin temas gerilmeleri ve temas uzunluklarına olan etkisini gösteren sonuçlar elde etmişlerdir.

Yıldırım vd. (2019), simetri ekseninden rijit bir panç aracılığıyla düşey ve yatay yönde yüklenmiş, alttan rijit düzleme bağlı homojen-ortotrop tabaka sisteminin sürtünmeli ve ayrılmalı temas problemini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Malzeme ortotropisinin, sürtünme katsayısının gerilmeler ve temas yüzeylerine olan etkisini göstermişlerdir.

Çömez (2020), hareketli silindirik panç ile yüklenmiş izotrop yarım düzleme bağlı ortotrop tabakanın sürtünmeli temas problemini çözümlemiştir. Panç hızının ve yarıçapının, sürtünme katsayısının ve ortotropik malzeme özelliklerinin temas gerilme dağılımlarına olan etkisini ortaya koymuştur.

Enine izotropik malzemede ise 3 simetri düzleminin yanı sıra malzeme özelliklerinin aynı olduğu bir simetri ekseni bulunmaktadır. Bu nedenle simetri eksenine göre simetrik konumlara sahip herhangi iki malzeme lifi aynı rijitliğe sahiptir. Temas mekaniğinde enine izotropik malzemeler kullanılarak yapılan çalışmalara aşağıdaki örnekler verilebilir.

Kuo ve Keer (1992), rijit silindirik bir panç aracılığıyla yüklenmiş enine izotropik çok tabakalı yarım düzlemin eksenel simetrik sürtünmeli temas problemini ele almışlardır.

Patra vd. (2016), değişken profile sahip rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş enine izotropik elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Problemin çözümünde ikinci dereceden Henkel dönüşümlerinden faydalanılmıştır.

Hou vd. (2018), rijit küresel bir panç aracılığıyla yüklenmiş enine izotrop malzemeden oluşan tabaka-yarım düzlem sisteminin 3 boyutlu sürtünmesiz temas problemini analitik yöntem kullanarak ele almışlardır.

Patra vd. (2018), değişken profile sahip rijit bir panç aracılığıyla yüklenmiş enine izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Tabakanın malzeme özelliklerinin fonksiyonel değişiminin ve uygulanan yükün temas uzunlukları ve gerilme dağılımları üzerinde olan etkisini incelemişlerdir.

1.1.4. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmanın amacı rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve homojen izotrop bir tabaka üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabaka ile homojen tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemine göre incelenerek ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları, temas yüzeylerindeki gerilme dağılımlarının elde edilmesidir.

Analitik yöntemde çözüm için tabakalar için elde edilen gerilme ve yer değiştirme denklemlerine sınır şartları uygulanarak, problem önce sürekli temas durumu için bir tekil integral denkleme, süreksiz temas durumu için bir tekil integral denklem sistemine indirgenecek, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılması ile de cebrik denklem sistemine dönüştürülecektir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü ile sürekli ve süreksiz temas durumunun analitik çözümleri yapılmış olacaktır. Sayısal yöntemde sonlu elemanlar metodunu kullanan ANSYS paket programı kullanılacaktır. Öncelikle FDM'den oluşan tabaka ortotropik modellenebilmesi için APDL (ANSYS Parametric Design Langulage) kodları kullanılarak özel bir alt program hazırlanacak ve ANSYS programımın içine eklenecektir. Daha sonra problemler modellenerek analizler yapılacaktır.

Son bölümde tez kapsamında, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılacak, problemin sürekli temas haline ilişkin ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları, süreksiz temas haline ilişkin açılma mesafeleri, temas gerilmeleri değerleri hesaplanacaktır. Son olarak, her iki yöntem için elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde elastisitenin temel denklemlerinden yola çıkılıp integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla yer değiştirme- gerilme bağıntıları kullanılarak

denge denklemlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi olan Navier denklemleri elde edilecektir. Elde edilen kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünü kolaylaştırmak amacıyla yer değiştirme ifadelerinin Fourier dönüşümleri kullanılarak denklem sistemi bir adi diferansiyel denklem takımına çevrilecektir. Adi diferansiyel denklem takımının çözümünden yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir.

1.2.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Ortotrop Tabakanın Genel Denklemlerinin Elde Edilmesi

İki boyutlu halde ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için denge denklemleri (1) ve (2) no'lu ifadelerde verildiği gibidir.

$$\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} - \rho_1(z) g = 0 \tag{2}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakaya ait gerilme bileşenlerine ait ifadeler (3)-(5) no'lu ifadelerde verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\sigma_{x1}(x,z) = C_{11}(z)\frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{13}(z)\frac{\partial w_1}{\partial z} \tag{3}$$

$$\sigma_{z1}(x,z) = C_{13}(z)\frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{33}(z)\frac{\partial w_1}{\partial z} \tag{4}$$

$$\tau_{z1}(x,z) = C_{55}(z)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \tag{5}$$

Bu ifadelerde geçen $C_{11}(z), C_{13}(z), C_{33}(z), C_{55}(z)$, $\rho_1(z)$ (6)-(10) no'lu ifadelerde verildiği gibidir.

$$C_{11}(z) = C_{110}e^{\gamma z} \tag{6}$$

$$C_{13}(z) = C_{130}e^{\gamma z} \tag{7}$$

$$C_{33}(z) = C_{330}e^{\gamma z} \tag{8}$$

$$C_{55}(z) = C_{550}e^{\gamma z} \tag{9}$$

$$\rho_1(z) = \rho_{10}e^{\beta z} \tag{10}$$

Burada γ ve β sırasıyla FDM ortotrop tabakaya ait rijitlik ve yoğunluk parametrelerini temsil etmektedirler.

Gerilme ifadelerinin gerekli türevlerinin alınıp (1)-(2) no'lu denge denklemlerinde yerlerine yazılmasıyla (11)-(12) ifadelerinde verilen Navier denklemleri elde edilirler.

$$C_{550}\gamma\frac{\partial u_1}{\partial z} + C_{550}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + C_{550}\gamma\frac{\partial w_1}{\partial x} + C_{130}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z} + C_{550}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z} + C_{110}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{11}$$

$$-g\rho_{10} + e^{z\theta}\left(C_{330}\gamma\frac{\partial w_1}{\partial z} + C_{330}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + C_{130}\gamma\frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{130}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z} + C_{550}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z} + C_{550}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{12}$$

(11)-(12) ifadelerinde geçen θ aşağıda verildiği gibidir.

$$\theta = \gamma - \beta \tag{13}$$

(11) ve (12) no'lu kismi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünü kolaylaştırmak için Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Aşağıda verilen Fourier dönüşümü bağıntıları tanımlanmıştır.

$$u_1(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_1(\alpha,z)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{14}$$

$$\tilde{u}_1(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}u_1(\alpha,z)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho g e^{i\alpha x}d\alpha=\rho g\delta(\alpha) \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}d\alpha=\delta(x) \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_1}{\partial x}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha\tilde{u}_1$$ (18)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial z}=-i\alpha\tilde{u}_1'$$ (19)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}e^{i\alpha x}d\alpha=-\alpha^2\tilde{u}_1$$ (20)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_1}{\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha=\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial z}=\tilde{u}_1'$$ (21)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}e^{i\alpha x}d\alpha=\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial z^2}=\tilde{u}_1''$$ (22)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_1}{\partial x}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha\tilde{w}_1$$ (23)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha\frac{\partial\tilde{w}_1}{\partial z}=-i\alpha\tilde{w}_1'$$ (24)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}e^{i\alpha x}d\alpha = -\alpha^2 \bar{w}_1 \tag{25}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_1}{\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} = \bar{w}_1^{I} \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial z^2} = \bar{w}_1^{II} \tag{27}$$

(14)-(27) no'lu ifadelerinin (11)-(12) no'lu kısmi türevli diferansiyel denklem takımında yerlerine yazılmasıyla (28)-(29) no'lu ifadelerde verilen adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$-C_{110}\alpha^2 \bar{u}_1 - i\left\{C_{550}\alpha\gamma \bar{w}_1 + iC_{550}\gamma \bar{u}_1^{I} + C_{130}\alpha \bar{w}_1^{I} + C_{550}\alpha \bar{w}_1^{I} + iC_{550}\bar{u}_1^{II}\right) = 0 \tag{28}$$

$$-\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}C_{550}\delta(x) + e^{\pi\theta}\left\{-iC_{130}\gamma\alpha \bar{u}_1 - C_{550}\alpha^2 \bar{w}_1^{I} - i\left(C_{130}+C_{550}\right)\alpha \bar{u}_1^{I}\right.$$

$$\left. + C_{330}\left(\gamma \bar{w}_1^{I} + \bar{w}_1^{II}\right)\right\} = 0 \tag{29}$$

Bu denklemlerin çözümü (30) ve (31) no'lu ifadelerde verildiği gibi aranacaktır.

$$\bar{u}(z) = Ae^{nz} + B_{01}e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(x) \tag{30}$$

$$\bar{w}(z) = i\left(Ame^{nz} + B_{02}e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(x)\right) \tag{31}$$

İlk olarak A=0 olarak alınırsa

$$B_{01} = 0 \tag{32}$$

$$B_{02} = \frac{iC_{550}}{C_{330}\gamma\theta - C_{330}\theta^2} \tag{33}$$

elde edilir. $\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} = 0$ olarak alınırsa (34)-(35) no'lu denklemler elde edilir.

$$Ae^{nz}\left(\alpha\left(C_{130}mn - C_{110}\alpha\right) + C_{550}\left(n + m\alpha\right)\left(n + \gamma\right)\right) = 0 \tag{34}$$

$$-iAe^{\pi(n+\theta)}\left(-C_{330}mn\left(n+\gamma\right) + \alpha\left(C_{550}\left(n + m\alpha\right) + C_{130}\left(n+\gamma\right)\right)\right) = 0 \tag{35}$$

(34) ve (35) no'lu denklemler aşağıda verildiği gibi sadeleştirilebilir.

$$\left(\alpha\left(C_{130}mn - C_{110}\alpha\right) + C_{550}\left(n + m\alpha\right)\left(n + \gamma\right)\right) = 0 \tag{36}$$

$$\left(-C_{330}mn\left(n+\gamma\right) + \alpha\left(C_{550}\left(n + m\alpha\right) + C_{130}\left(n+\gamma\right)\right)\right) = 0 \tag{37}$$

(36)-(37) no'lu denklemlerin ortak çözümünden (38) no'lu ifade elde edilir.

$$m = \frac{C_{110}\alpha^2 - C_{550}n\left(n+\gamma\right)}{\alpha\left(C_{130}n + C_{550}\left(n+\gamma\right)\right)} \tag{38}$$

(38) no'lu ifade (37) nolu denklemde yerlerine yazılırsa (39) no'lu denklem elde edilir.

$$C_{330}n\left(n+\gamma\right)\left(-C_{110}\alpha^2 + C_{550}n\left(n+\gamma\right)\right) + \alpha^2\left(C_{110}C_{550}\alpha^2 + {C_{130}}^2 n\left(n+\gamma\right)\right) + C_{130}C_{550}\left(2n^2 + 2n\gamma + \gamma^2\right) = 0 \tag{39}$$

(39) no'lu karakteristik denklemin çözümünden ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen n_i $\left(i = 1,...,4\right)$ ve m_i $\left(i = 1,...,4\right)$ ifadeleri (40)-(46) no'lu denklemler olarak elde edilmiştir.

$$n_1 = -\frac{1}{2C_{330}C_{550}}\left(C_{330}\,C_{550}\gamma + \sqrt{C_{330}C_{550}\left(-2K_1 + 2\sqrt{K_2}\right)}\right) \tag{40}$$

$$n_2 = \frac{1}{2C_{330}C_{550}}\left(-C_{330}\,C_{550}\gamma + \sqrt{C_{330}C_{550}\left(-2K_1 + 2\sqrt{K_2}\right)}\right) \tag{41}$$

$$n_3 = -\frac{1}{2C_{330}C_{550}}\left(C_{330}\,C_{550}\gamma + \sqrt{C_{330}C_{550}\left(-2K_1 - 2\sqrt{K_2}\right)}\right) \tag{42}$$

$$n_4 = \frac{1}{2C_{330}C_{550}}\left(-C_{330}\,C_{550}\gamma + \sqrt{C_{330}C_{550}\left(-2K_1 - 2\sqrt{K_2}\right)}\right) \tag{43}$$

$$K_1 = C_{330}C_{550}\left(-2\left({C_{130}}^2 - C_{110}C_{330} + 2C_{130}C_{550}\right)\alpha^2 + C_{330}C_{550}\gamma^2\right. \tag{44}$$

$$K_2 = \left({C_{130}}^2 - C_{110}C_{330}\right)\left(-C_{110}C_{330} + \left(C_{130} + 2{C_{550}}^2\right)\alpha^4 - 4C_{130}C_{330}{C_{550}}^2\alpha^2\gamma^2\right) \tag{45}$$

$$m_i = \frac{C_{110}\alpha^2 - C_{550}n_i\left(n_i + \gamma\right)}{\alpha\left(C_{130}n_i + C_{550}\left(n_i + \gamma\right)\right)} \tag{46}$$

Bu ifadelerde geçen $C_{110}, C_{130}, C_{330}, C_{550}$ ifadeleri aşağıda verildiği gibidir.

$$C_{110} = \frac{E_{xx}\left(-1 + \nu_{yz}\nu_{zy}\right)}{-1 + \nu_{xy}\left(\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}\right) + \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{xz}\left(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\right)} \tag{47}$$

$$C_{130} = \frac{E_{xx}\left(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\right)}{-1 + \nu_{xy}\left(\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}\right) + \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{xz}\left(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\right)} \tag{48}$$

$$C_{330} = \frac{E_{zz}\left(-1 + \nu_{xy}\nu_{yx}\right)}{-1 + \nu_{xy}\left(\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}\right) + \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{xz}\left(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\right)} \tag{49}$$

$$C_{550} = G_{13} \tag{50}$$

Ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın yer değiştirme ifadelerinin Fourier dönüşümleri ise (51)-(52) no'lu ifadelerde olduğu gibi elde edilmiştir.

$$\hat{u}_1(z) = A_1 e^{n_1 z} + A_2 e^{n_2 z} + A_3 e^{n_3 z} + A_4 e^{n_4 z} \tag{51}$$

$$\hat{w}_1(z) = i\left(A_1 m_1 e^{n_1 z} + A_2 m_2 e^{n_2 z} + A_3 m_3 e^{n_3 z} + A_4 m_4 e^{n_4 z} + i\frac{1}{Z_3(\gamma-\theta)\theta} e^{-z\theta} \frac{\rho_{10} g}{C_{550}} \delta(\alpha)\right) \tag{52}$$

Yer değiştirme ifadelerinin gerekli türevlerinin alınıp (3)-(5) no'lu ifadelerde yerlerine yazılmasıyla (53)-(55) no'lu ifadelerde verilen ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenlerinin Fourier dönüşümleri elde edilirler.

$$\hat{\sigma}_{x_1}(z) = ie^{z\gamma} C_{550}\left(A_1 e^{n_1 z}\left(m_1 n_1 Z_2 - Z_1\alpha\right) + A_2 e^{n_2 z}\left(m_2 n_2 Z_2 - Z_1\alpha\right) + A_3 e^{n_3 z}\left(m_3 n_3 Z_2 - Z_1\alpha\right) + A_4 e^{n_4 z}\left(m_4 n_4 Z_2 - Z_1\alpha\right) - i\frac{e^{-z\theta}\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} Z_2 \delta(\alpha)}{Z_3\gamma - Z_3\theta}\right) \tag{53}$$

$$\hat{\sigma}_{z_1}(z) = ie^{z\gamma} C_{550}\left(A_1 e^{n_1 z}\left(m_1 n_1 Z_3 - Z_2\alpha\right) + A_2 e^{n_2 z}\left(m_2 n_2 Z_3 - Z_2\alpha\right) + A_3 e^{n_3 z}\left(m_3 n_3 Z_2 - Z_2\alpha\right) + A_4 e^{n_4 z}\left(m_4 n_4 Z_2 - Z_1\alpha\right) - i\frac{e^{-z\theta}\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} \delta(\alpha)}{\gamma - \theta}\right) \tag{54}$$

$$\hat{\tau}_{xz}(z) = e^{z\theta} C_{550}\left(A_1 e^{n_1 z}\left(n_1 + m_1\alpha\right) + A_2 e^{n_2 z}\left(n_2 + m_2\alpha\right) + A_3 e^{n_3 z}\left(n_3 + m_3\alpha\right) + A_4\left(n_4 + m_4\alpha\right)\right) \tag{55}$$

(53)-(55) no'lu ifadelerin ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait yer değiştirme ve gerilme bileşenleri (56)-(61) no'lu ifadelerde verildiği gibi elde edilmiştir.

$$u_1(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=}^{4}A_i e^{n_i z}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{56}$$

$$w_1(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i m_i e^{n_i z}+i\frac{1}{Z_3(\gamma-\theta)\theta}e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(\alpha)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{57}$$

$$\sigma_{1x}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}\left(m_i n_i Z_2-Z_1\alpha\right)-i\frac{e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}Z_2\delta(\alpha)}{Z_3\gamma-Z_3\theta}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{58}$$

$$\sigma_{1z}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}\left(m_i n_i Z_3-Z_2\alpha\right)-i\frac{e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(\alpha)}{\gamma-\theta}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{59}$$

$$\tau_{1xz}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}\left(n_i+m_i\alpha\right)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{60}$$

$$Z_1=\frac{C_{110}}{C_{550}}\quad Z_2=\frac{C_{130}}{C_{550}}\quad Z_3=\frac{C_{330}}{C_{550}} \tag{61.a-b-c}$$

1.2.2. Homojen Tabakanın Genel Denklemlerinin Elde Edilmesi

İki boyutlu halde homojen tabaka için denge denklemleri (62) ve (63) no'lu ifadelerde verildiği gibidir.

$$\frac{\partial\sigma_{x2}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz2}}{\partial z}=0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{z2}}{\partial z}-\rho_1 g=0 \tag{63}$$

Homojen tabakaya ait gerilme bileşenlerine ait ifadeler (64)-(66) no'lu ifadelerde verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\sigma_{x2}(x,z)=\mu_2\left(\frac{\kappa_2+1}{\kappa_2-1}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{3-\kappa_2}{\kappa_2-1}\frac{\partial w_2}{\partial z}\right) \tag{64}$$

$$\sigma_{z2}(x,z)=\mu_2\left(\frac{3-\kappa_2}{\kappa_2-1}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\kappa_2+1}{\kappa_2-1}\frac{\partial w_2}{\partial z}\right) \tag{65}$$

$$\tau_{xz2}(x,z)=\mu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right) \tag{66}$$

Homojen tabakaya ait gerilme ifadelerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi (67) ve (68) no'lu denklemlerde verildiği gibidir.

$$\left((\kappa_2-1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\partial z}+(1+\kappa_2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)=0 \tag{67}$$

$$-\frac{g\rho_2}{\mu_2}(\kappa_2-1)+\left((1+\kappa_2)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(\kappa_2-1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0 \tag{68}$$

Elde edilen bu kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünü kolaylaştırmak için Fourier dönüşümleri kullanılmıştır ve aşağıda verilen (69)-(78) no'lu ifadeler tanımlanmıştır.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_2}{\partial x}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha \text{[illegible]} \tag{69}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha=-i\alpha\frac{\partial \text{[illegible]}}{\partial z}=-i\alpha \text{[illegible]} \tag{70}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}e^{i\alpha x}d\alpha = -\alpha^2 \bar{u}_2 \tag{71}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_2}{\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} = \bar{u}_2^{I} \tag{72}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial z^2} = \bar{u}_2^{II} \tag{73}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_2}{\partial x}e^{i\alpha x}d\alpha = -i\alpha \bar{w}_2 \tag{74}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z}e^{i\alpha x}d\alpha = -i\alpha \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z} = -i\alpha \bar{w}_2^{I} \tag{75}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}e^{i\alpha x}d\alpha = -\alpha^2 \bar{w}_2 \tag{76}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_2}{\partial z}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z} = \bar{w}_2^{I} \tag{77}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial z^2} = \bar{w}_2^{II} \tag{78}$$

(69)-(78) no'lu ifadelerin (67)-(68) no'lu kısmi türevli diferansiyel denklem takımında yerlerine yazılmasıyla (79)-(80) no'lu ifadelerde verilen adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$-\alpha^2\left(1+\kappa_2\right)\bar{u}_1 - 2i\alpha \bar{w}_2^{I} + \left(1+\kappa_2\right)\bar{u}_1^{II} = 0 \tag{79}$$

$$\frac{g\rho_2}{\mu_2}(1-\kappa_2)\delta(\alpha)-\alpha^2(\kappa_2-1)\hat{w}_1-2i\alpha\hat{u}_1'+(1+\kappa_2)\hat{w}_1''=0 \tag{80}$$

Bu denklemlerin çözümü (81) ve (82) no'lu ifadelerde verildiği gibi aranacaktır.

$$\hat{u}_1(z)=Ae^{nz}+B_{01}\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha) \tag{81}$$

$$\hat{w}_2(z)=i\left(Ame^{nz}+B_{02}\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)\right) \tag{82}$$

İlk olarak $A=0$ olarak alınırsa

$$B_{01}=0 \tag{83}$$

$$B_{02}=i \tag{84}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\hat{u}_1(z)=Ae^{nz} \tag{85}$$

$$\hat{w}_1(z)=i\left(Ame^{nz}+i\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)\right) \tag{86}$$

elde edilirler. Elde edilen (85)-(86) no'lu ifadelerin (79)-(80) no'lu denklemlerde yerlerine yazılmasıyla (87)-(88) no'lu denklem çiftine elde edilir.

$$Ae^{nz}\left(2mn\alpha+n^2(\kappa_2-1)-\alpha^2(1+\kappa_2)\right)=0 \tag{87}$$

$$iAe^{nz}n\left(-2\alpha+mn(1+\kappa_2)\right)+\frac{g\rho_2}{\mu_2}(1-\kappa_2)\delta(\alpha)$$

$$-i\alpha^2\left(\kappa_2-1\right)\left(Ae^{nz}m+\frac{i\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta\left(\alpha\right)}{\alpha^2}\right)=0 \quad (88)$$

Buradan karakteristik denklem

$$\left(n^2-\alpha^2\right)^2=0 \quad (89)$$

olarak elde edilir ve bu denklemin çözümünden homojen tabakaya ait yatay değiştirme ifadesinin Fourier dönüşümü (90) no'lu denklemde verildiği gibi elde edilir.

$$\hat{u}_2(z)=B_1e^{\alpha z}+B_2ze^{\alpha z}+B_3e^{-\alpha z}+B_4ze^{-\alpha z} \quad (90)$$

$\frac{g\rho_2}{\mu_2}=0$ olarak alınırsa (87)-(88) denklemleri (91)-(92) denklemlerine dönüşürler.

$$-\alpha^2\left(1+\kappa_2\right)\hat{u}_2-2i\alpha\hat{w}_2^{I}+\left(1+\kappa_2\right)\hat{u}_2^{II}=0 \quad (91)$$

$$-\alpha^2\left(\kappa_2-1\right)\hat{w}_2-2i\alpha\hat{u}_2^{I}+\left(1+\kappa_2\right)\hat{w}_2^{II}=0 \quad (92)$$

(91) ve (92) no'lu denklemlerin ortak çözümünden

$$\hat{w}_2(z)=\frac{i\left(\alpha^2\left(3+\kappa_2\right)\hat{u}_2^{I}-\left(1+\kappa_2\right)\hat{u}_2^{III}\right)}{2\alpha^3} \quad (93)$$

(93) ifadesi elde edilir. (90) ifadesi (93) ifadesinde yerine yazıldığında homojen tabakaya ait düşey yer değiştirme bileşeninin Fourier dönüşümü (94) ifadesinde verildiği gibi elde edilir.

$$\hat{w}_2(z) = i\left(B_1 e^{\alpha z} + \frac{B_2 e^{z\alpha}\left(z\alpha - \kappa_2\right)}{\alpha} - B_3 e^{-z\alpha} - \frac{B_4 e^{-z\alpha}\left(z\alpha + \kappa_2\right)}{\alpha} + i\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)\right) \quad (94)$$

Yer değiştirme ifadelerinin gerekli türevlerinin alınıp (65)-(67) no'lu ifadelerde yerlerine yazılmasıyla (95)-(97) no'lu ifadelerde verilen homojen tabakaya ait gerilme bileşenlerinin Fourier dönüşümleri elde edilirler.

$$\hat{\sigma}_{x2}(z) = -i\mu_2\left(2B_1 e^{z\alpha}\alpha + B_2 e^{z\alpha}\left(3 + 2z\alpha - \kappa_2\right) + 2B_3 e^{-z\alpha} + B_4 e^{-z\alpha}\left(-3 + 2z\alpha + \kappa_2\right)\right) \quad (95)$$

$$\hat{\sigma}_{z2}(z) = i\mu_2\left(2B_1 e^{z\alpha}\alpha + B_2 e^{z\alpha}\left(-1 + 2z\alpha - \kappa_2\right) + 2B_3 e^{-z\alpha}\alpha + B_4 e^{-z\alpha}\left(1 + 2z\alpha + \kappa_2\right)\right) \quad (96)$$

$$\hat{\tau}_{xz2}(z) = \mu_2\left(2\beta_1 e^{z\alpha}\alpha + B_2 e^{z\alpha}\left(1 + 2z\alpha - \kappa_2\right) - 2B_3 e^{-z\alpha} - B_4 e^{-z\alpha}\left(-1 + 2z\alpha + \kappa_2\right) + \frac{i\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)}{\alpha}\right) \quad (97)$$

(90), (95)-(97) no'lu ifadelerin ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla homojen tabakaya ait yer değiştirme ve gerilme bileşenleri (98)-(102) no'lu ifadelerde verildiği gibi elde edilmiştir.

$$u_2(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[B_1 e^{\alpha z} + B_2 z e^{\alpha z} + B_3 e^{-\alpha z} + B_4 z e^{-\alpha z}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \quad (98)$$

$$w_2(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\left[B_1 e^{\alpha z} + \frac{B_2 e^{z\alpha}\left(z\alpha - \kappa_2\right)}{\alpha} - B_3 e^{-z\alpha} - \frac{B_4 e^{-z\alpha}\left(z\alpha + \kappa_2\right)}{\alpha} + i\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \quad (99)$$

$$\sigma_{x2}(x,z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\mu_2\left[2B_1 e^{z\alpha}\alpha + B_2 e^{z\alpha}\left(3 + 2z\alpha - \kappa_2\right) + 2B_3 e^{-z\alpha}\right.$$

$$+B_4 e^{-z\alpha}\left(-3+2z\alpha+\kappa_2\right)\Big]e^{-i\alpha x}d\alpha \quad (100)$$

$$\sigma_{z2}\left(x,z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\mu_2\Big[2B_1 e^{z\alpha}\alpha+B_2 e^{z\alpha}\left(-1+2z\alpha-\kappa_2\right)+2B_3 e^{-z\alpha}\alpha$$

$$+B_4 e^{-z\alpha}\left(1+2z\alpha+\kappa_2\right)\Big]e^{-i\alpha x}d\alpha \quad (101)$$

$$\tau_{xz2}\left(x,z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mu_2\Big[2\beta_1 e^{z\alpha}\alpha+B_2 e^{z\alpha}\left(1+2z\alpha-\kappa_2\right)-2B_3 e^{-z\alpha}-B_4 e^{-z\alpha}\left(-1+2z\alpha+\kappa_2\right)$$

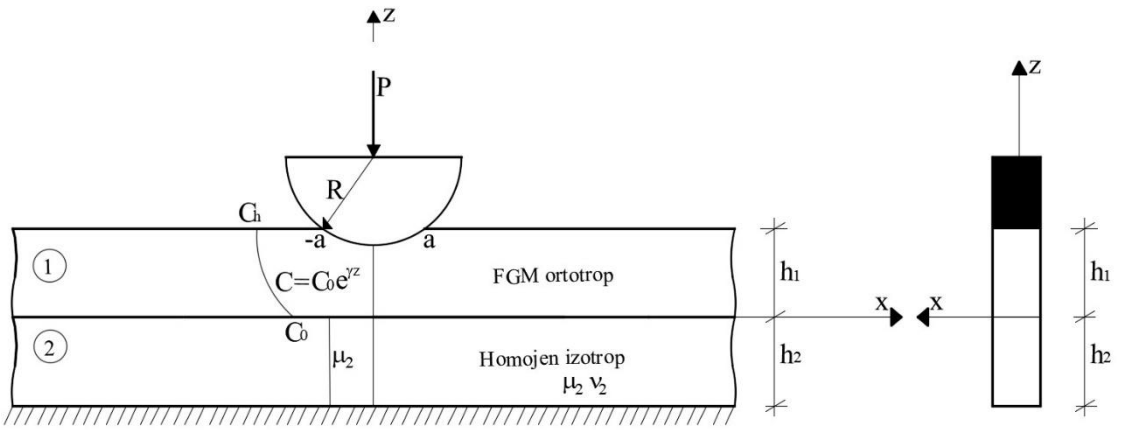
$$+\frac{i\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta\left(\alpha\right)}{\alpha}\Big] \quad (102)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Bu çalışmada, homojen, izotrop bir tabaka üzerinde oturan ve rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir.

Tabakalar x ekseni boyunca (-∞, ∞) aralığında uzanmaktadırlar. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z ekseni doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.

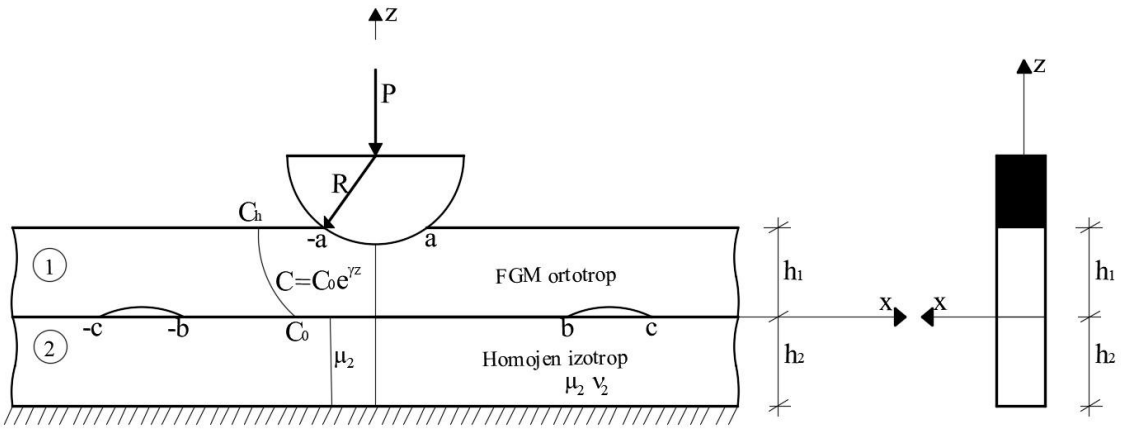


Şekil 1. Sürekli temasta problemin geometrisi

Problemin sürekli temasına ilişkin geometrisi Şekil 1'de verilmiştir. (1) no'lu tabaka fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabaka olup $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{55}$ malzemenin elastisite modülü ve Poisson oranı ve kayma modüllerine bağlı elastik katsayılardır, tabaka yüksekliğine bağlı fonksiyonel olarak değişmektedirler. ρ_1 (1) no'lu tabakanın yoğunluğu olup tabaka yüksekliği ile fonksiyonel olarak değişmektedir. (2) no'lu tabaka homojen olup kayma modülü değeri, Poisson oranı ve yoğunluğunun sabit olduğu kabul edilmiştir.

Tabakaların kütle kuvvetleri hesaplarda dikkate alınmıştır. Tabakaların ara yüzeylerinde sadece basınç gerilmelerinin aktarılabildiği kabul edildiğinden dış yükün belirli bir değeri aşması durumunda $\left(P > P_{cr}\right)$ tabakalar arasında ayrılma meydana gelebilir

ve süreksiz temas durumu oluşur (Şekil 2). Ayrılmayı meydana getirecek en küçük yük değeri kritik yük (P_{cr}) ve ayrılmanın başlayacağı ilk nokta ilk ayrılma uzaklığı (x_{cr}) olarak adlandırılırlar.



Şekil 2. Süreksiz temasta problemin geometrisi

Problemin çözümünde kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

1 no'lu tabaka için;

$$u_1(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=}^{4}A_i e^{n_i z}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{103}$$

$$w_1(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i m_i e^{n_i z}+i\frac{1}{Z_3(\gamma-\theta)\theta}e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(\alpha)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{104}$$

$$\sigma_{1x}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}(m_i n_i Z_2-Z_1\alpha)-i\frac{e^{-z\theta}\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}Z_2\delta(\alpha)}{Z_3\gamma-Z_3\theta}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{105}$$

$$\sigma_{1z}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}\left(m_i n_i Z_3 - Z_2\alpha\right) - i\frac{e^{-z\theta}\,\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\delta(\alpha)}{\gamma-\theta}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (106)$$

$$\tau_{1xz}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ie^{z\gamma}C_{550}\left[\sum_{i=1}^{4}A_i e^{n_i z}\left(n_i + m_i\alpha\right)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (107)$$

$$Z_1=\frac{C_{110}}{C_{550}};\quad Z_2=\frac{C_{130}}{C_{550}};\quad Z_3=\frac{C_{330}}{C_{550}} \qquad (108.a\text{-}b\text{-}c)$$

2 no'lu tabaka için;

$$u_2(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[B_1e^{\alpha z}+B_2ze^{\alpha z}+B_3e^{-\alpha z}+B_4ze^{-\alpha z}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (109)$$

$$w_2(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\left[B_1e^{\alpha z}+\frac{B_2e^{z\alpha}\left(z\alpha-\kappa_2\right)}{\alpha}-B_3e^{-z\alpha}-\frac{B_4e^{-z\alpha}\left(z\alpha+\kappa_2\right)}{\alpha}\right.$$
$$\left.+i\frac{1}{\alpha^2}\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (110)$$

$$\sigma_{2x}(x,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\mu_2\left[2B_1e^{z\alpha}\alpha+B_2e^{z\alpha}\left(3+2z\alpha-\kappa_2\right)+2B_3e^{-z\alpha}\right.$$
$$\left.+B_4e^{-z\alpha}\left(-3+2z\alpha+\kappa_2\right)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (111)$$

$$\sigma_{2z}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\mu_2\left[2B_1e^{z\alpha}\alpha+B_2e^{z\alpha}\left(-1+2z\alpha-\kappa_2\right)+2B_3e^{-z\alpha}\alpha\right.$$
$$\left.+B_4e^{-z\alpha}\left(1+2z\alpha+\kappa_2\right)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (112)$$

$$\tau_{2xz}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mu_2\left[2\beta_1e^{z\alpha}\alpha+B_2e^{z\alpha}\left(1+2z\alpha-\kappa_2\right)-2B_3e^{-z\alpha}-B_4e^{-z\alpha}\left(-1+2z\alpha+\kappa_2\right)\right.$$

$$+\frac{i\frac{g\rho_2}{\mu_2}\delta(\alpha)}{\alpha}\Bigg] \qquad (113)$$

Bu ifadelerde geçen $A_j, B_j \ (j=1....4)$ katsayıları probleme ait sınır şartlarından belirlenecektir. Problemin sürekli temasına ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{1z}(x_1,h_1)=\begin{cases}-p(x) & -a\le x\le a\\ 0 & x\le -a, x\ge 0\end{cases} \qquad (114)$$

$$\tau_{1xz}(x_1,h_1)=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (115)$$

$$\tau_{1xz}(x_1,0)=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (116)$$

$$\sigma_{1z}(x,0)=\sigma_{1z}(x,0) \qquad -\infty<x<\infty \qquad (117)$$

$$\tau_{2xz}(x_1,0)=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (118)$$

$$w_1(x,0)=w_2(x,0) \qquad -\infty<x<\infty \qquad (119)$$

$$w_2(x,-h_2)=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (120)$$

$$u_2(x,-h_2)=0 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (121)$$

İntegral denklem için;

$$\frac{\partial}{\partial x}w_1(x,h_1)=\frac{x}{R} \qquad -a<x<a \qquad (122)$$

$$\left|\sigma_{1z}\left(x,0\right)\right|_{\max} \le 0 \tag{123}$$

şartları kullanılacaktır.

Probleme ilişkin denge şartı ise aşağıda ifade edilmiştir.

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{1z}\left(x,h_1\right)dx = \int_{-a}^{a} p\left(x\right)dx = P \tag{124}$$

(114) ifadesindeki $p\left(x\right)$, rijit panç ve FD ortotrop tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmesi değerlerini, a ise rijit panç ve (1) no'lu tabaka arasındaki yarı temas uzunluğunu göstermektedir.

Tabakalar arasında ayrılma meydana geldiğinde tabakaların ara yüzeyleri boyunca σ_z normal gerilmesi sıfır olmakta ve düşey yer değiştirmelerin farkının türevi artık sıfırdan farklı bir değer almaktadır. Dolayısıyla sürekli temas durumu için yazılan sınır şartları artık geçerli olmamaktadır ve süreksiz temas hali için yeniden yazılması gerekir.

Problemin süreksiz temas durumu için sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\sigma_{1z}\left(x_1,h_1\right) = \begin{cases} -p\left(x\right) & -a \le x \le a \\ 0 & x \le -a, x \ge 0 \end{cases} \tag{125}$$

$$\tau_{1xz}\left(x_1,h_1\right) = 0 \qquad -\infty < x < \infty \tag{126}$$

$$\tau_{1xz}\left(x_1,0\right) = 0 \qquad -\infty < x < \infty \tag{127}$$

$$\sigma_{1z}\left(x,0\right) = \sigma_{2z}\left(x,0\right) \quad -\infty < x < \infty \tag{128}$$

$$\tau_{2xz}\left(x_1,0\right) = 0 \qquad -\infty < x < \infty \tag{129}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[w_1\left(x,0\right) - w_2\left(x,0\right)\right] = f\left(x\right) \qquad \begin{matrix} b < x < c \\ -c < x < -b \end{matrix} \tag{130}$$

$$w_2\left(x,-h_2\right)=0 \qquad -\infty<x<\infty \tag{131}$$

$$u_2\left(x,-h_2\right)=0 \qquad -\infty<x<\infty \tag{132}$$

İntegral denklem için

$$\frac{\partial}{\partial x}w_1\left(x,h_1\right)=\frac{x}{R} \qquad -a<x<a \tag{133}$$

$$\sigma_{1z}\left(x,0\right)=0 \qquad b<x<c \tag{134}$$

$$\int_b^c f\left(t_2\right)dt_2=0 \tag{135}$$

şartları kullanılacaktır. Probleme ilişkin denge şartı ise aşağıda ifade edilmiştir.

$$\int_{-a}^{a} p\left(t_1\right)dt_1=P \tag{136}$$

Bu ifadelerde, b ve c sırasıyla ayrılma bölgesinin başlangıç ve bitiş noktalarını, $p\left(x\right)$ rijit panç altındaki bilinmeyen temas gerilmesini, $f\left(x\right)$ tabakaların birbirinden ayrıldığı $\left(b,c\right)$ arasındaki düşey yer değiştirmelerin farkının türevi olan bilinmeyen bir fonksiyonu temsil etmektedir.

2.2. Katsayıların Belirlenmesi

2.2.1. Sürekli Temas Durumu

Problemin sürekli hali için verilen 114 ve 121 no'lu sınır şartlarının, gerilme ve yer değiştirme ifadelerine uygulanması ve bu ifadelerin ters Fourier dönüşümlerinin alınması

sonucu A_j ve B_j $(j=1....4)$ katsayılarını içeren 8 adet cebrik denklem aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{4} ie^{h_1 n_i} a_i A_i = \frac{1}{C_{550} e^{h_1 \gamma}} \int_0^a p(t_1) e^{i\alpha t} dt_1 - \frac{\delta(\alpha) e^{-h_1 \theta} \dfrac{\rho_{10} g}{C_{550}}}{\gamma - \theta} \tag{137}$$

$$\sum_{I=1}^{4} e^{h_1 n_i} b_i A_i = 0 \tag{138}$$

$$\sum_{I=1}^{4} b_i A_i = 0 \tag{139}$$

$$\sum_{i=1}^{4} i a_i A_i - 2i \frac{\mu_2}{C_{550}} \alpha B_1 + i \frac{\mu_2}{C_{550}} (1+\kappa_2) B_2 - 2i \frac{\mu_2}{C_{550}} \alpha B_3 - i \frac{\mu_2}{C_{550}} (1+\kappa_2) B_4 = -\frac{\delta(\alpha) \dfrac{\rho_{10} g}{C_{550}}}{\gamma - \theta} \tag{140}$$

$$2 \frac{\mu_2}{C_{550}} \alpha B_1 - \frac{\mu_2}{C_{550}} (\kappa_2 - 1) B_2 - 2 \frac{\mu_2}{C_{550}} \alpha B_3 - \frac{\mu_2}{C_{550}} (\kappa_2 - 1) B_4 = -\frac{i\delta(\alpha) \dfrac{\mu_2}{C_{550}} \dfrac{g\rho_2}{\mu_2}}{\alpha} \tag{141}$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i \alpha A_i - \alpha B_1 + \kappa_2 B_2 + \alpha B_3 + \kappa_2 B_4 = \frac{i\delta(\alpha) \dfrac{\mu_2}{C_{550}} \dfrac{g\rho_2}{\mu_2}}{\alpha} \tag{142}$$

$$ie^{-h_2 \alpha} B_1 - \frac{ie^{-h_2 \alpha} (h_2 \alpha + \kappa_2)}{\alpha} B_2 - ie^{h_2 \alpha} B_3 + \frac{ie^{h_2 \alpha} (h_2 \alpha - \kappa_2)}{\alpha} B_4 = i\alpha \left(\frac{\delta(\alpha) g \rho_2}{\mu_2 \alpha^2} - \frac{\delta(\alpha) \rho_{10} g}{C_{550} Z_3 (\gamma - \theta) \theta} \right) \tag{143}$$

$$e^{-h_2\alpha}B_1 - e^{-h_2\alpha}h_2B_2 + e^{h_2\alpha}B_3 - e^{h_2\alpha}h_2B_4 = 0 \tag{144}$$

2.2.2. Süreksiz Temas Durumu

Problemin süreksiz hali için verilen 125 ve 133 no'lu sınır şartlarının, gerilme ve yer değiştirme ifadelerine uygulanması ve bu ifadelerin ters Fourier dönüşümlerinin alınması sonucu A_j ve B_j $(j=1....4)$ katsayılarını içeren 8 adet cebrik denklem aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{4} ie^{h_1 n_i} a_i A_i = \frac{1}{C_{550}e^{h_1\gamma}} \int_0^a p(t_1)e^{i\alpha t}dt_1 - \frac{\delta(\alpha)e^{-h_1\theta}\dfrac{\rho_{10}g}{C_{550}}}{\gamma-\theta} \tag{145}$$

$$\sum_{I=1}^{4} e^{h_1 n_i} b_i A_i = 0 \tag{146}$$

$$\sum_{I=1}^{4} b_i A_i = 0 \tag{147}$$

$$\sum_{i=1}^{4} ia_i A_i - 2i\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha B_1 + i\frac{\mu_2}{C_{550}}(1+\kappa_2)B_2 - 2i\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha B_3 - i\frac{\mu_2}{C_{550}}(1+\kappa_2)B_4 = -\frac{\delta(\alpha)\dfrac{\rho_{10}g}{C_{550}}}{\gamma-\theta} \tag{148}$$

$$2\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha B_1 - \frac{\mu_2}{C_{550}}(\kappa_2-1)B_2 - 2\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha B_3 - \frac{\mu_2}{C_{550}}(\kappa_2-1)B_4 = -\frac{i\delta(\alpha)\dfrac{\mu_2}{C_{550}}\dfrac{g\rho_2}{\mu_2}}{\alpha} \tag{149}$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i\alpha A_i - \alpha B_1 + \kappa_2 B_2 + \alpha B_3 + \kappa_2 B_4 = \frac{i\delta(\alpha)\dfrac{\mu_2}{C_{550}}\dfrac{g\rho_2}{\mu_2}}{\alpha} + \frac{\int_b^c f(t_2)e^{i\alpha t}dt_2}{C_{550}e^{\gamma h_1}} \tag{150}$$

$$ie^{-h_2\alpha}B_1-\frac{ie^{-h_2\alpha}\left(h_2\alpha+\kappa_2\right)}{\alpha}B_2-ie^{h_2\alpha}B_3+\frac{ie^{h_2\alpha}\left(h_2\alpha-\kappa_2\right)}{\alpha}B_4$$

$$=i\alpha\left(\frac{\delta(\alpha)g\rho_2}{\mu_2\alpha^2}-\frac{\delta(\alpha)\rho_{10}g}{C_{550}Z_3(\gamma-\theta)\theta}\right) \quad (151)$$

$$e^{-h_2\alpha}B_1-e^{-h_2\alpha}h_2B_2+e^{h_2\alpha}B_3-e^{h_2\alpha}h_2B_4=0 \quad (152)$$

Bu denklemlerde

$$a_1=\left(m_1n_1Z_3-Z_2\alpha\right) \quad (153)$$

$$a_2=\left(m_2n_2Z_3-Z_2\alpha\right) \quad (154)$$

$$a_3=\left(m_3n_3Z_3-Z_2\alpha\right) \quad (155)$$

$$a_4=\left(m_4n_4Z_3-Z_2\alpha\right) \quad (156)$$

$$b_1=\left(n_1+m_1\alpha\right) \quad (157)$$

$$b_2=\left(n_2+m_2\alpha\right) \quad (158)$$

$$b_3=\left(n_3+m_3\alpha\right) \quad (159)$$

$$b_4=\left(n_4+m_4\alpha\right) \quad (160)$$

olarak ifade edilirler. 137 ve 144 denklemlerinin ortak çözümü sonucu bilinmeyen A_j ve B_j $\left(j=1....4\right)$ katsayıları elde edilirler.

2.3. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

2.3.1 Sürekli Temas Hali

Ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve rijit blok arasındaki bilinmeyen gerilme değerleri daha önce kullanılmayan (122) no'lu sınır şartından elde edilecektir. $\frac{\partial}{\partial x}\left[w_1(x,h_1)\right]$ teşkil edilir ve (137) - (144) ifadelerinden elde edilen katsayılar bu ifadede yerlerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}dt\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}e^{i\alpha(t-x)}d\alpha\right]+\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w_{1c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$
$$+\frac{g\rho_2}{\mu_2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w_{1M}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x}dx=\frac{x}{R} \qquad (161)$$

elde edilir. $\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ifadesinin değişimi incelendiğinde

$$\mathrm{Re}\left[\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right]=0 \qquad (162)$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{M_{10}(-\alpha)}{\Delta_{10}(-\alpha)}\right]=-\mathrm{Im}\left[\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right] \qquad (163)$$

olduğu görülmektedir. Buradan;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}e^{i\alpha(t-x)}d\alpha=-2\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{M_{10}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right]\sin\alpha(t-x)d\alpha \qquad (164)$$

ifadesi elde edilebilir. $\frac{w_{1c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ve $\frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ifadelerinin değişimi incelendiğinde

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{w_{1c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}=0 \tag{165}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}=0 \tag{166}$$

olduğu görülmektedir. Buradan (161) ifadesi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{p(t)}{C_{550}}dt\left[\int_0^\infty \frac{M_1(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)}\sin\alpha(t-x)\,d\alpha\right]=\frac{x}{R} \tag{167}$$

şeklini alır. Burada

$$\Delta_1(\alpha)=\Delta_{10}(\alpha) \tag{168}$$

$$M_1(\alpha)=iM_{10}(\alpha)\frac{1}{e^{\gamma h_1}} \tag{169}$$

şeklindedir.

$\frac{M_1(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)}$ ifadesi $x\to\infty$' da sıfırdan farklı bir değere yakınsamaktadır. Bu nedenle bu fonksiyonun sayısal integrasyonu mümkün olmamaktadır ve bu çekirdeğin yakınsamasını bozan terimler tespit edilmelidir. Bu terime singüler terim adı verilmektedir. Elde edilen süngüler terim çekirdek fonksiyonundan çıkarılacak daha sonra integral denkleme eklenecektir.

$$\text{Singüler terim}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{M_1(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)}=\varphi_1 \tag{170}$$

şeklinde elde edilmiştir ve (167) ifadesi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p(t)dt\left[\frac{\varphi_1}{t-x}+k_1(x,t)\right]=C_{550}\frac{x}{R} \tag{171}$$

halini alır. Burada

$$k_1(x,t)=\int_0^{\infty} k_{1çek}(\alpha)\sin\alpha(t-x)\,d\alpha \tag{172}$$

$$k_{1çek}=\frac{M_1(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)}-\varphi_1 \tag{173}$$

$$\varphi_1=\left(2\sqrt{2}e^{-h_1\gamma}Z_1{Z_3}^2\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)/$$
$$\left(\left(-{Z_2}^2+Z_1Z_3\right)\sqrt{\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}\right.$$
$$\sqrt{\left(Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}$$
$$\left(\sqrt{\left(-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}\right)-$$
$$\left.\left.\sqrt{Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}\right)\right) \tag{174}$$

dir. Yük belli bir değeri aştığında $\left(P>P_{cr}\right)$ tabakalar arasındaki temasın sürekliliği bozulmakta ayrılmalar meydana gelmektedir. Sürekli problemin çözümü dış kuvvetin kritik yükten küçük olması durumunda geçerlidir. Bu yüzden tabakalar arasındaki temas gerilmesi değeri $\sigma_{1z}(x,0)$ bulunmalıdır. A_i ve B_i $\left(i=1,...,3\right)$ değerleri (123) denkleminde yazılırsa tabakalar arasındaki temas gerilmesi aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\sigma_{1z}(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}dt\left[\int_{-\infty}^{\infty} C_{550}\frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}e^{i\alpha(t-\alpha)}d\alpha\right]+$$

$$\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)} \delta(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{g\rho_2}{\mu_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_{2M}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)} \delta(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{175}$$

$\frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ifadesinin değişimi incelendiğinde

$$\mathrm{Im}\left[\frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right] = 0 \tag{176}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{M_{21}(-\alpha)}{\Delta_{10}(-\alpha)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right] \tag{177}$$

olduğu görülmektedir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)} e^{i\alpha(t-x)} d\alpha = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{M_{21}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}\right] \cos(t-x)\, d\alpha \tag{178}$$

ifadesi elde edilebilir. $\frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ve $\frac{w_{2M}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)}$ ifadelerinin değişimi incelendiğinde

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)} = -C_{550} \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \tag{179}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{w_{2M}(\alpha)}{\Delta_{10}(\alpha)} = 0 \tag{180}$$

olduğu görülmektedir. Buradan (175) ifadesi

$$\sigma_{1z}(x,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} p(t) dt \left[\int_{0}^{\infty} \frac{M_2(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} \cos\alpha(t-x)\, d\alpha\right] - \rho_{10} g \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \tag{181}$$

şeklini alır. Burada

$$M_2(\alpha) = \mathrm{Re}\left[e^{-\gamma h_1} M_{21}(\alpha)\right] \tag{182}$$

şeklindedir.

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{M_2(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} = 0 \tag{183}$$

olduğundan $\frac{M_2(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)}$ ifadesinde singüler terim bulunmamaktadır ve (181) ifadesi düzenlenerek aşağıda verilen (184) ve (185) ifadeleri elde edilmiştir.

$$\sigma_{1z}(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p(t) k_2(x,t)\,dt - \rho_{01} g \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \tag{184}$$

$$k_2(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{M_2(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} \cos\alpha(t-x)\,d\alpha \tag{185}$$

Problemin sayısal çözümü için aşağıdaki normalizasyonlar yapılacaktır.

$$\alpha = z / h_1 \tag{186}$$

$$x = as \tag{187}$$

$$t = ar \tag{188}$$

$$dt = adr \tag{189}$$

$$\phi(r) = \frac{p(t)}{C_{550}} \tag{190}$$

Normalizasyon işlemi sonucunda (171) no'lu integral denklem, (186) no'lu denklem ve (124) nolu denge şartı aşağıdaki şekle gelir;

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi(r)dr\left[\frac{\varphi_1}{r-s}+\frac{a}{h_1}k_1(s,r)\right]=\frac{\frac{a}{h}s}{\frac{R}{h}} \tag{191}$$

$$\frac{\sigma_{1z}(x,0)}{C_{550}}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi(r)\left[\frac{a}{h_1}k_2(s,r)\right]dr-\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\frac{e^{\beta h_1}-1}{\beta}=0 \tag{192}$$

$$\frac{a}{h}\int_{-1}^{1}\phi(r)dr=\frac{P}{C_{550}h} \tag{193}$$

Panç altındaki temas gerilmelerinin değeri, temasın her iki ucunda sıfır olduğundan $g(\pm1)=0$ olur. Bu durumda integral denklemin indisi (-1)'dir. Buna göre tekil integral denklemin sayısal çözümü aşağıda verildiği gibi aranacaktır. (Erdoğan ve Gupta,1972)

$$\phi(r)=G(r)\left(1-r^2\right)^{1/2}\qquad(-1\le r\le 1) \tag{194}$$

Burada $G(r)$ $(-1\le r\le 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak (191) ve (193) no'lu denklemler aşağıdaki hale indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^{N+1}G(r_i)\left[\frac{\varphi_1}{r_1-s_k}+\frac{a}{h_1}k_1(s_k,r_i)\right]=\frac{\frac{a}{h}s_k}{\frac{R}{h}}\quad k=1...N+1 \tag{195}$$

$$\frac{a}{h}\sum_{i=1}^{N}G(r_i)=\frac{P_{cr}}{C_{550}h} \tag{196}$$

$$\frac{\sigma_{1z}(x,0)}{C_{550}} = \sum_{i=1}^{N} G(r_i)\left[\frac{a}{h}k_2(s_k,r_i)\right] - \frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\frac{e^{\beta h_1}-1}{\beta} = 0 \tag{197}$$

$$s_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{N+1}\right) \qquad (k = 1,...,N+1) \tag{198}$$

$$r_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \qquad (i = 1,...,N) \tag{199}$$

Burada rijit panç ile tabaka arasındaki temas simetrik olduğu için (195)'de $N/2+1.$ denklem otomatik olarak sağlanır. Böylelikle N tane $G(r_i)$, a/h_1 ve $P_{cr}/(C_{550}h_1)$ olmak üzere toplam $N+2$ bilinmeyene karşılık, N tane denklem, denge şartı ve (198) no'lu denklem olmak üzere toplam $N+2$ denklem elde edilir. (195) integral denklemi a/h_1 ve $P_{cr}/(C_{550}h_1)$ bilinmeyenleri nedeniyle lineer değildir ve iterasyon uygulanarak bilinmeyenler bulunur. Aynı zamanda çözüm tabakalar arasındaki temas gerilmesinin daima basınç olmasını sağlamalıdır. Yani

$$\left|\sigma_{1z}(x,0)\right|_{\max} \le 0 \tag{200}$$

İterasyon yönteminde öncelikle a/h_1 , $P_{cr}/(C_{550}h_1)$ için bir başlangıç değeri verilerek (195) denklem sisteminden $G(r_i)$ hesaplanır. (196) ve (197) şartları kontrol edilir. İterasyon (196) ve (197)'da istenen yaklaşıklık sağlanana kadar devam ettirilir. (196) şartını sağlayan $P_{cr}/(C_{550}h_1)$ değeri ilk ayrılma yükü $P_{cr}/(C_{550}h_1)$ ve ilgili x/h_1 değeri ilk ayrılma noktasıdır (x_{cr}/h_1). Bu problemde hassaslık 10^{-10} olarak seçilmiş ve Newton-Raphson yöntemine dayalı bir iterasyon uygulanmıştır.

2.3.2. Süreksiz Temas Hali

Süreksiz temas durumunun çözümü için elde edilen katsayılarda geçen bilinmeyen gerilme değerleri daha önce kullanılmayan (125) – (133) no'lu sınır şartlarından elde

edilecektir. 1. integral denklem için $\frac{\partial}{\partial x}\left[w_1(x,h_1)\right]$ teşkil edilir ve (145)-(152) ifadelerinden elde edilen katsayılar bu ifadelerde yerlerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t_1)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}dt_1\left[\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\gamma(t_1-x_1)}d\alpha\right]+\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\frac{\psi(t_2)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}dt_2\left[\frac{N_{20}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\gamma(t_2-x_1)}d\alpha\right]+$$

$$\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_{2C}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x_1}d\alpha+\frac{g\rho_2}{\mu_2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_{2M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x_1}d\alpha=\frac{x}{R} \qquad (201)$$

elde edilir. $\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ifadesinin değişimi incelendiğinde

$$\mathrm{Re}\left[\frac{N_{10}(-\alpha)}{\Delta_2(-\alpha)}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right] \qquad (202)$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]=0 \qquad (203)$$

olduğu görülmektedir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\alpha(t_1-x_1)}d\alpha=-2\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{N_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]\sin\alpha(t_1-x_1)\,d\alpha \qquad (204)$$

ifadesi elde edilebilir. $\frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ve $\frac{w_{2M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ifadelerinin değişimi incelendiğinde

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{w_{2c}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}=0 \qquad (205)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{w_{2M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}=0 \qquad (206)$$

olduğu görülmektedir. Buradan (201) ifadesi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{p(t_1)}{C_{550}}dt_1\left[\int_0^\infty \frac{N_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\sin\alpha(t_1-x_1)\,d\alpha\right]+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_b^c \frac{\psi(t_2)}{C_{550}}dt_2\left[\int_0^\infty \frac{N_2(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\sin\alpha(t_2-x_1)\,d\alpha\right]=\frac{x}{R} \qquad (207)$$

şeklini alır.

Burada

$$N_1(\alpha)=iN_{10}(\alpha)\frac{1}{e^{\gamma h_1}} \qquad (208)$$

$$N_2(\alpha)=iN_{20}(\alpha)\frac{1}{e^{\gamma h_1}} \qquad (209)$$

şeklindedir.

$\frac{N_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ifadesi $x\to\infty$'da sıfırdan farklı bir değere yakınsamaktadır. Bu nedenle bu fonksiyonun sayısal integrasyonu mümkün olmamaktadır ve bu çekirdeğin yakınsamasını bozan değer tespit edilmelidir. Bu değere singüler terim adı verilmektedir. Elde edilen süngüler terim çekirdek fonksiyonundan çıkarılacak daha sonra integral denkleme eklenecektir.

$$\text{Singüler terim}=\lim_{x\to\infty}\frac{N_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}=\varphi_2 \qquad (210)$$

şeklinde elde edilmiştir ve (207) ifadesi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p(t_1)dt_1\left[\frac{\varphi_2}{t_1-x_1}+k_3(x_1,t_1)\right]+\frac{1}{\pi}\int_b^c \psi_2(t_2)\,dt_2 k_4(x_1,t_2)=C_{550}\frac{x}{R} \qquad (211)$$

halini alır. Burada

$$k_3(x_1,t_1)=\int_0^{\infty}k_{3cek}(\alpha)\sin\alpha(t_1-x_1)\,d\alpha \tag{212}$$

$$k_{3cek}(\alpha)=\frac{N_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}-\varphi_2 \tag{213}$$

$$k_4(x_1,t_2)=\int_0^{\infty}\frac{N_2(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\sin\alpha(t_2-x_1)d\alpha \tag{214}$$

$$\varphi_2=\left(2\sqrt{2}e^{-h_1\gamma}Z_1Z_3{}^2\sqrt{\left(Z_2{}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)/$$
$$\left(\left(-Z_2{}^2+Z_1Z_3\right)\sqrt{-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left(Z_2{}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}\right.$$
$$\sqrt{Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left(Z_2{}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}$$
$$\left(\sqrt{-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left(Z_2{}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}-\right.$$
$$\left.\sqrt{Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left(Z_2{}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)}\right) \tag{215}$$

şeklindedir.

İkinci integral denklemi elde etmek için (134) no'lu sınır şartında (145)-(152) ifadelerinden elde edilen A_i ve B_i $(i=1,...,3)$ değerleri yerlerine yazılırsa (216) no'lu denklem elde edilir.

$$\sigma_{z1}(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t_1)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}dt_1\left[\int_{-\infty}^{\infty}C_{550}\frac{L_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\alpha(t_1-x_2)}d\alpha\right]+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c\frac{\psi(t_2)}{C_{550}e^{\gamma h_1}}\int_{-\infty}^{\infty}C_{550}\frac{L_{20}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\alpha(t_1-x_2)}d\alpha+\frac{\rho_{10}g}{C_{550}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_{3C}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x_2}d\alpha$$
$$+\frac{\rho_2 g}{\mu_2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_{3M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\delta(\alpha)e^{-i\alpha x_2}d\alpha \tag{216}$$

(216) no'lu integral denklemde çekirdek fonksiyonlarının değişimleri incelendiğinde;

$$\mathrm{Re}\left[\frac{L_{10}(-\alpha)}{\Delta_2(-\alpha)}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{L_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]\qquad \mathrm{Im}\left[\frac{L_{10}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]=0 \tag{217.a-b}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{L_{20}(-\alpha)}{\Delta_2(-\alpha)}\right]=-\mathrm{Re}\left[\frac{L_{20}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]\quad \mathrm{Im}\left[\frac{L_{20}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]=0 \tag{218.a-b}$$

olduğu görülmektedir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L_{21}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\alpha(t-x)}d\alpha=2\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{L_{21}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]\cos(t-x)\,d\alpha \tag{219}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L_{22}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}e^{i\alpha(t-x)}d\alpha=2\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{L_{22}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]\sin(t-x)\,d\alpha \tag{220}$$

elde edilebilirler. $\dfrac{\omega_{3C}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ve $\dfrac{\omega_{3M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}$ ifadelerinin değişimi incelendiğinde;

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{Re}\left[\frac{\omega_{3C}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right]=\frac{e^{\beta h_1}-1}{\beta}C_{550}\qquad \mathrm{Im}\left[\frac{\omega_{3C}(-\alpha)}{\Delta_2(-\alpha)}\right]=\mathrm{Im}\left[\frac{\omega_{3C}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\right] \tag{221.a-b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\omega_{3M}(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}=0 \tag{222}$$

olduğu görülmektedir. Böylelikle

$$\sigma_{z1}(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}p(t_1)dt_1\int_{0}^{\infty}\frac{L_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\cos\left(\alpha(t_1-x)\right)d\alpha$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{b}^{c}\psi(t_2)dt_2\int_{0}^{\infty}\frac{L_2(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)}\sin(\alpha x)\cos(\alpha t_2)\,d\alpha-\rho_1 g\frac{e^{\beta h_1}-1}{\beta} \tag{223}$$

olarak elde edilir.

(224) no'lu denklemde geçen L_1 ve L_2 aşağıda verildiği gibidir.

$$L_1(\alpha) = \mathrm{Re}\left[e^{-\gamma h_1} L_{21}(\alpha) \right] \tag{224}$$

$$L_2(\alpha) = \mathrm{Re}\left[e^{-\gamma h_1} L_{22}(\alpha) \right] \tag{225}$$

(223) no'lu integral denklemin L_1 ve L_2 çekirdek fonksiyonları $x \to \infty$ yaklaştığında;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{L_2(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} = \varphi_2 \tag{226.a-b}$$

dır. L_2 çekirdeğinin φ_2 ifadesine yakınsadığı görülmektedir. İntegral denklemin sayısal çözümünün yapılabilmesi için bu terim çekirdek fonksiyonundan çıkarılmalı ve kapalı hali integral denkleme eklenmelidir. (224)-(226) no'lu ifadelerden faydalanılarak (223) no'lu integral denklem (227) no'lu ifadeye dönüşür.

$$\sigma_{z1}(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p(t_2) k_5(x,t_1)\, dt_1 + \frac{1}{\pi}\int_{b}^{c} \psi(t_2) k_6(x,t_2)\, dt_2 - \rho_1 g \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \tag{227}$$

Burada

$$k_5(x,t_1) = \int_0^{\infty} \frac{L_1(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} \cos\left(\alpha(t_1 - x)\right) d\alpha \tag{228}$$

$$k_6(x,t_2) = \int_0^{\infty} \left(\frac{L_2(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} - \varphi_3 \right) \sin(\alpha x) \cos(\alpha t)\, d\alpha \tag{229}$$

şeklindedir.

$$\varphi_3=\left(8mmZ_3\left(-{Z_2}^2+Z_1Z_3\right)\right)/\left(\sqrt{2}\,mm\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right.$$
$$\left(\sqrt{\left(-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}-\right.$$
$$\left.\sqrt{\left(Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}\right)-$$
$$2\sqrt{2}mmZ_2\left(\sqrt{\left(-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}+\right.$$
$$\left.\sqrt{\left(Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}\right)-$$
$${Z_2}^2\left(\sqrt{2}\,mm\left(\sqrt{\left(-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sqrt{\left(Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}+Z_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+\right.$$
$$Z_1Z_3\left(\sqrt{2}\,mm\sqrt{\left(-Z_3\left(Z_2\left(2+Z_2\right)-Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}+\right.$$
$$\left.\left.\sqrt{\left(Z_3\left(-Z_2\left(2+Z_2\right)+Z_1Z_3+\sqrt{\left({Z_2}^2-Z_1Z_3\right)\left(\left(2+Z_2\right)^2-Z_1Z_3\right)}\right)\right)}+Z_3\left(1+\kappa_2\right)\right)\right)\qquad(230)$$

dir. Problemin sayısal çözümü için aşağıdaki normalizasyonlar yapılacaktır.

$$\alpha=z/h_1\qquad(231)$$

$$x_1=as_1\qquad t_1=ar_1\qquad(232.a\text{-}b)$$

$$x_2=\frac{c-b}{2}s_2+\frac{c+b}{2}\qquad t_2=\frac{c-b}{2}r_2+\frac{c+b}{2}\qquad(233.a\text{-}b)$$

$$p\left(t_1\right)=\frac{\phi_2\left(ar_1\right)}{C_{550}}\qquad\psi\left(t_2\right)=\frac{\phi_3\left(\frac{c-b}{2}r_2+\frac{c+b}{2}\right)}{C_{550}}\qquad(234.a\text{-}b)$$

Normalizasyon işlemi sonucunda integral denklemler, denge ve tek değerlilik şartları aşağıdaki hali alır.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_2(r_1)\,dr_1\left[\frac{\varphi_2}{r_1-s_1}+\frac{a}{h_1}k_3(s_1,r_1)\right]+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_3(r_2)\,dr_2\,\frac{c-b}{h_1}k_4(s_2,r_2)=\frac{a/h_1}{R/h_1}s_1 \qquad (235)$$

$$\frac{\sigma_z(x,0)}{C_{550}}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_2(r_1)\frac{a}{h_1}k_5(s_1,r_1)\,dr_1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_3(r_3)\left[\frac{\psi_3}{2}\left(\frac{1}{r_2-s_2}+\frac{1}{r_2+s_2+2\dfrac{c+b}{c-b}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{c-b}{2}k_6(s_2,r_2)\right]dr_2=\rho_1 g\,\frac{e^{\beta h_1}-1}{\beta} \qquad (236)$$

$$\frac{a}{h_1}\int_{-1}^{1}\phi_2(r_1)dr_1=\frac{1}{\pi}\frac{P}{C_{550}h_1} \qquad \frac{c-b}{h_1}\int_{-1}^{1}\phi_3(r_2)dr_2=0 \qquad (237.a\text{-}b)$$

Panç altındaki temas gerilmeleri temasın her iki ucunda sıfırken, eğim fonksiyonunda ayrılma bölgesinin her iki ucunda sıfırdır. Bu nedenle, $g(\pm1)=0$ olur. Bu durumda integral denklemlerin indisi (-1)'dir. Buna göre tekil integral denklem sisteminin sayısal çözümü aşağıda verildiği gibi aranacaktır. (Erdoğan ve Gupta,1972)

$$\phi(r)=G(r)\left(1-r^2\right)^{1/2} \qquad (-1\le r\le 1) \qquad (238)$$

Burada $G(r)$ $(-1\le r\le 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak integral denklemler, denge şartları ve uygunluk şartı aşağıdaki hale indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^{N+1}G_1(r_{1i})W_{1i}\left[\frac{\varphi_2}{r_{1i}-s_{1k}}+\frac{a}{h_1}k_3(s_{1k},r_{1i})\right]+\sum_{i=1}^{N+1}G_2(r_{2i})W_{2i}\,\frac{c-b}{2h_1}k_4(s_{1k},r_{2i})=\frac{a/h_1}{R/h_1}s_{1k}$$

(239)

$$\sum_{i=1}^{N+1} G_1(r_{1i}) W_{1i} \frac{a}{h_1} k_3(s_{2k}, r_{1i}) +$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} G_2(r_{2i}) W_{2i} \left[\frac{\varphi_3}{2} \left(\frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + \frac{1}{r_{2i} + s_{2k} + 2\dfrac{c+b}{c-b}} \right) \frac{c+b}{2} k_4(s_{1k}, r_{2i}) \right] = \frac{\rho_1 g}{C_{550}} \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \qquad (240)$$

$$\sum_{i=1}^{N} G_1(r_{1i}) W_{1i} \frac{a}{h_1} k_3(s_{2(N/2+1)}, r_{1i}) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} G_2(r_{2i}) W_{2i} \left[\frac{\varphi_3}{2} \left(\frac{1}{r_{2i} - s_{2(N/2+1)}} + \frac{1}{r_{2i} + s_{2(N/2+1)} + 2\dfrac{c+b}{c-b}} \right) + \frac{c+b}{2} k_4(s_{1(N/2+1)}, r_{2i}) \right]$$

$$= \frac{\rho_1 g}{C_{550}} \frac{e^{\beta h_1} - 1}{\beta} \qquad (241)$$

$$\frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^{N} G_1(r_{1i}) W_1(i) = \frac{1}{\pi} \frac{P}{C_{550} h_1} \qquad (242)$$

$$\frac{c-b}{h_1} \sum_{i=1}^{N} G_2(r_{2i}) W_2(i) = 0 \qquad (243)$$

Bu ifadelerde geçen $r_{1i}, r_{2i}, s_{1i}, s_{2i}, W_{1i}$ ve W_{2i} ifadeleri aşağıda verildiği gibidir.

$$r_{1i} = r_{2i} = \cos\left(i \frac{\pi}{N+1} \right) \qquad i = 1, ..., N \qquad (244.a)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{2k-1}{N+1} \frac{\pi}{2} \right) \qquad i = 1, ..., N+1 \qquad (244.b)$$

$$W_{1i} = W_{2i} = \frac{1 - r_{1i}^{\,2}}{N+1} \qquad i = 1, ..., N \qquad (244.c)$$

(239) ve (240) no'lu ifadelerde $(N/2+1)$. denklemler uygunluk şartıdır ve denklem sisteminin dışına alınmıştır. Bilinmeyen gerilme değerleri N tane $G(r_{1i})$, N tane $G(r_{2i})$, bilinmeyen temas uzunlukları a/h_1, b/h_1, c/h_1 olmak üzere toplam $2N+3$ bilinmeyene karşılık, (239) ve (240) no'lu ifadelerden $2N$ tane denklem ve (242) no'lu denge şartı, (243) no'lu tek değerlilik şartı ve (241) no'lu uygunluk şartı olmak üzere toplam $2N+3$ tane denklem bulunmaktadır. Bilinmeyen temas uzunlukları a/h_1, b/h_1, c/h_1 nedeniyle denklem sistemi lineer değildir. Çözüm için Newton-Raphson yöntemine dayalı bir iterasyon uygulanmıştır. Bu problemde hassaslık 10^{-9} olarak seçilmiştir.

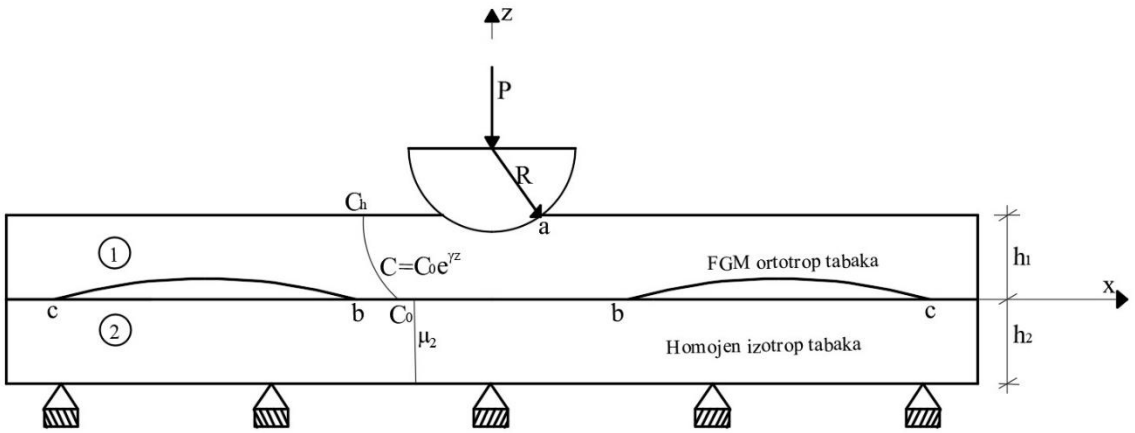
2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Analiz

Bu bölümde daha öncesinde analitik çözümü yapılmış olan rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabaka ve homojen tabakanın sürekli ve süreksiz temas probleminin sonlu elemanlar yöntemine göre çözümü ANSYS paket programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların daha önceden elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmasıyla elde edilen sonuçların teyit edilmesi amaçlanmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin modellenmesi için yaygın olarak kullanılan üç ana yöntem bulunmaktadır [98]. İlk yöntem olan homojen sonlu eleman yaklaşımında fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri her bir eleman için ayrı ayrı tanımlanır ve atanır. Sonlu eleman modelinde optimum eleman boyutları ve ağ yapısının kullanılmasıyla, derecelendirilmiş sonlu eleman yaklaşımıyla aynı sayısal sonuçları vermektedir [42, 43, 97]. İkinci olan derecelendirilmiş sonlu eleman yaklaşımında malzeme parametrelerinin eleman içinde sabit olduğu geleneksel homojen elemandan farklı olarak derecelendirilmiş elemanda malzeme parametreleri eleman içinde konuma bağlı olarak değişmektedir. Sayısal integrasyon yardımıyla eleman içinde farklı malzeme özelliklerinin gerçek değişimi sağlanmıştır [16,83]. Üçüncü olan termal derecelendirilmiş sonlu eleman yaklaşımında ise elastisite modülünün sıcaklıkla olan değişimini sağlayacak sıcaklık değişim fonksiyonu bulunmaktadır [1].

Sonlu elemanlar yöntemini esas alan sayısal yaklaşımda eleman özellikleri eleman içinde sabit değerlere sahiptir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliği uygun ve yeterli ağ yapısı ve eleman özelliklerinin konuma bağlı olarak elemanlara atanması ile

gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda amaç, çeşitli geometrik özellikler, malzeme özellikleri ve yükleme durumları için temas uzunluklarını, temas gerilmelerini, sürekli temas durumu için ilk ayrılma yükleri, ilk ayrılma uzaklıklarını, süreksiz temas durumu için tabakalar arasındaki açılma miktarlarını elde etmektir. Problem z eksenine göre simetrik modellenmiştir ve kütle kuvvetinin etkisi dikkate alınmıştır. (Şekil 5). Sonlu eleman modelinde kullanılacak malzeme özellikleri ve yükleme durumu analitik çözüme ait sonuçlardaki oranlar kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 3. Analiz geometrisi

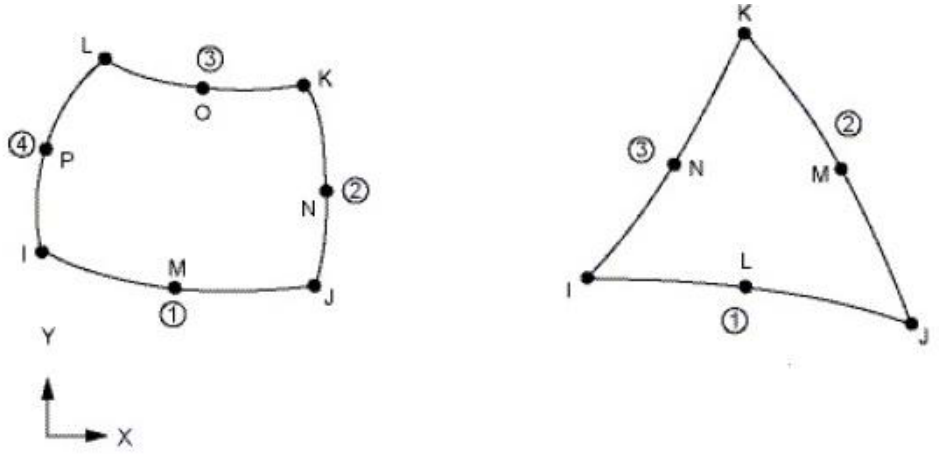
Problemin sonlu eleman modelindeki en uygun eleman sıklığını belirlemek için bir çalışma yapılmıştır (Tablo 1). Belirli bir eleman sıklığından sonra sonuçların belirli bir değere yakınsadığı görülmektedir. Bu eleman boyutu problemin sonlu eleman çözümlerinde kullanılacaktır. Modelde tabakalar x yönünde (-0, ∞) aralığında uzandığından, sınır şartlarının sağlatılabilmesi amacıyla tabakalar yeterince uzun seçilmiştir.

Eleman seçimi, analizde kullanılacak olan matematiksel modelin belirlenmesi açısından son derece önemlidir. Elemanlar yapılacak analizin çeşidine göre seçilir. Yani statik, termal, akışkan veya elektromanyetik analizler için farklı elemanlar kullanılır. Benzer şekilde analiz edilecek olan modelin 2 veya 3 boyutlu olması eleman seçimindeki etkenlerden biridir. Seçilen elemanın düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin tipi ve sayısı analizin doğru yapılması açısından çok önemlidir. Sonlu eleman analizinde ANSYS paket programı kütüphanesinde bulunan PLANE183 tipi yapısal eleman kullanılmıştır. PLANE183 tipi eleman, sekiz düğüm noktası ile tanımlanır ve her düğüm noktasının iki

serbestlik derecesi bulunmakta olup dönme serbestliği bulunmamaktadır (Şekil 4). Dolayısıyla *x* ve *y* doğrultularında yer ve şekil değiştirebilir. Elemanın plastiklik, büyük esnemelere dayanma ve oldukça fazla şekil değiştirme özellikleri vardır. PLANE183 elemanı, karmaşık geometrilerin ağ yapısının oluşturulmasında dört bağlantı noktasına sahip iki boyutlu diğer elemanlara göre daha iyi sonuç vermektedir.

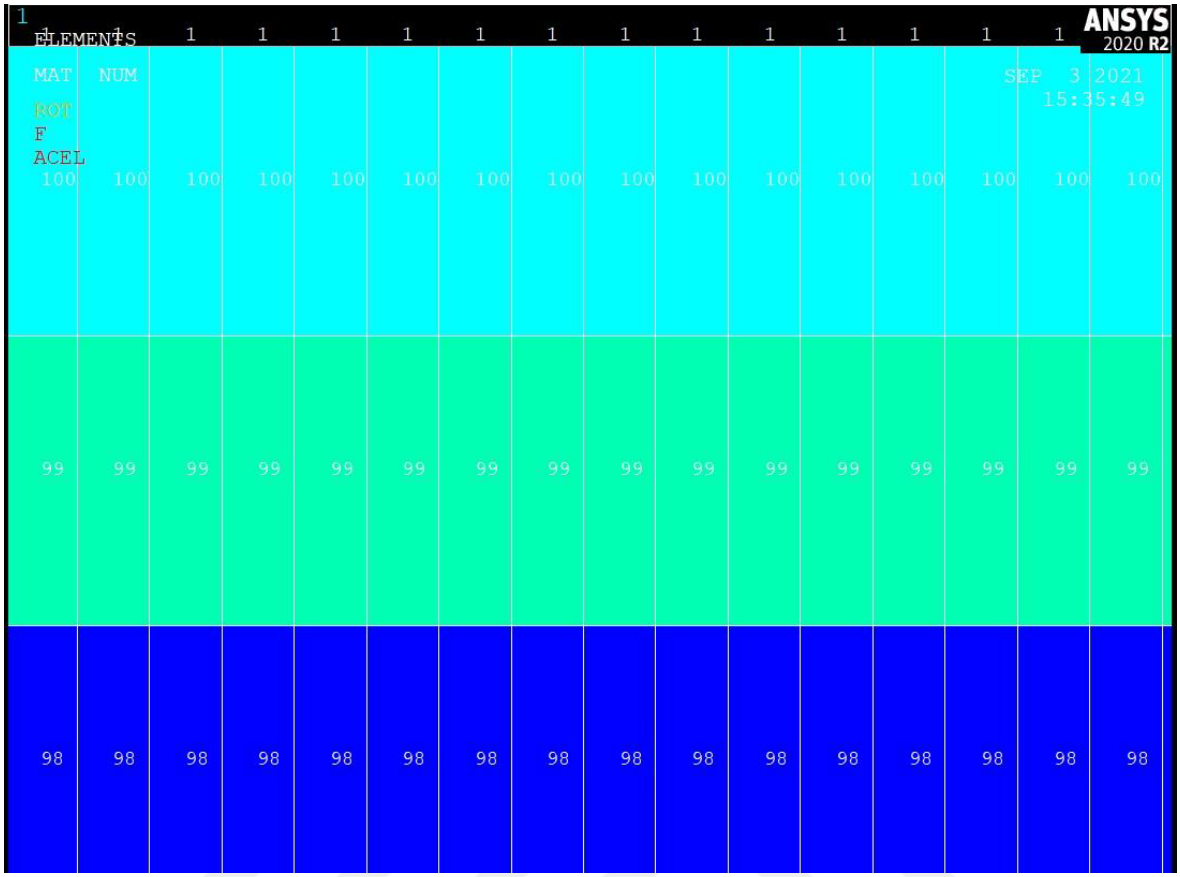
Tablo 1. Sonlu eleman çözümü için uygun eleman sayısının belirlenmesi ($E_{xx} = 5.183xG_{130}$, $E_{yy} = 1.420xG_{130}$, $E_{zz} = 1.420xG_{130}$, $v_{12} = 0.27$, $v_{13} = 0.27$, $v_{23} = 0.55$, $R/h_1 = 10$, $h_2/h_1 = 2$, $\rho_2/\rho_{10} = 1.25$, $\Gamma_1 = 2$ $\mu_2/C_{550} = 2$, $\Gamma_2 = 1.5$, $\rho_{10}gh_1/C_{550} = 2x10^{-6}$, $P^* = 0.4x10^{-3}$, C Malzemesi)

Eleman Sayısı	**Nod Sayısı**	a^*	b^*	c^*
2303	6447	0.1	3.44	6.22
26503	77107	0.04	3.34	6.2
507503	1510407	0.036	3.34	6.2
1015003	3020407	0.036	3.32	6.2
1265003	3770507	0.036	3.24	6.32
1515003	4520607	0.034	3.24	6.32
1765003	5270707	0.034	3.24	6.32
2015003	6020807	0.034	3.24	6.32
Analitik Çözüm Sonucu		0.033021229	3.1944651	6.3950679



Şekil 4. PLANE183 elemanın geometrisi (üçgen ve dörtgen)

Modelin elemanlara bölünmesi işlemi sırasında geometrideki parçalara ait malzeme özellikleri ve eleman tipleri atanmakta olup kullanılan ağ yapısı ve sıklığı belirlenmektedir. Yapılan analizlerde dikdörtgen (QUADRITERAL) ağ yapısı kullanılmıştır ve dikdörtgen eleman, çözüm bölgesini aslına uygun olarak temsil etmesi bakımından kullanışlı eleman tipidir. Oluşturulan dikdörtgen ağ yapısının bir bölümü Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 5. ANSYS programında oluşturulan dikdörtgen ağ yapısının bir bölümü

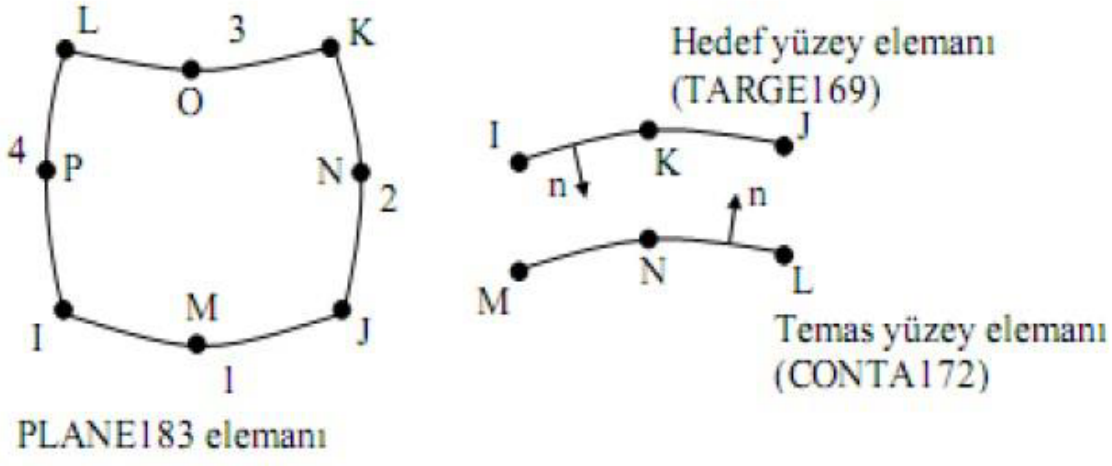
Geçtiğimiz yıllar içerisinde yapısal sonlu eleman analizindeki en önemli değişiklerden biri temas problemlerini çözebilecek elemanların ve çözüm yöntemlerinin analiz programlarına girmiş olmasıdır. Modeldeki parçalar arasında teması sağlamak için özel temas elemanları kullanılır. Bu elemanların seçilmesinde problemin iki ya da üç boyutlu olması ve kullanılan eleman tipi önemli bir unsurdur. İki boyutlu problemlerde temas çizgisel olurken, üç boyutlu problemlerde temas yüzeyseldir. Temas analizlerinde çeşitli temas uygulama yöntemleri mevcut olup bunlar;

- Node-to-Node
- Node-to-Surface
- Surface-to-Surface

şeklindedir [93].

Surface-to-Surface temas modeli, düğüm noktalarının üst üste gelmemesi halinde de çözüme olanak sağlaması, sürtünme etkisi altında dahi büyük deformasyonları desteklemesi,

yarı-otomatik temas rijitlik kontrolü, rijit yüzeylerdeki pilot node kontrolü, kullanım kolaylığı ve zor problemlerindeki sayısız avantajları nedeniyle diğer temas elemanlarından üstün gelmektedir ve sağladığı avantajlar nedeniyle en yaygın olarak kullanılan yöntemdir. Surface-to-Surface temas modelinde yük eleman şekil fonksiyonları kullanılarak aktarılır. Surface-to-Surface eleman modeline uygun olarak temas çiftini oluşturmak için CONTA172 ve TARGE169 eleman çifti kullanılmıştır. TARGE169 ve CONTA172 elemanları üç düğüm noktası içeren elemanlardır ve bu düğüm noktaları Şekil 8'da görülebileceği gibi PLANE183 elemanının yüzeyindeki düğümlerle örtüşmektedir.



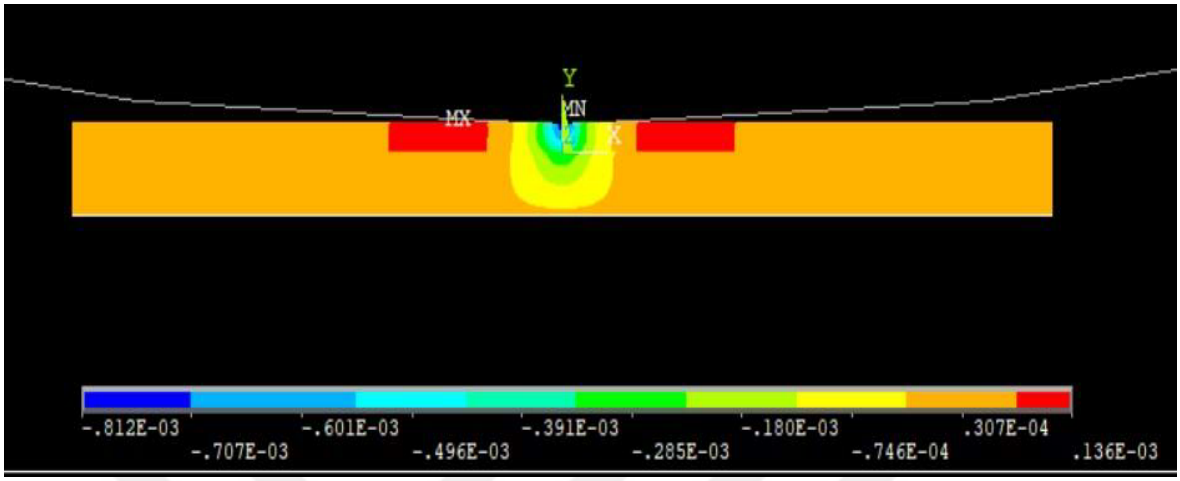
Şekil 6. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları

ANSYS paket programı temas yüzeylerindeki davranışa yönelik farklı temas algoritmaları seçenekleri sunmaktadır. Bu algoritmalar şu şekilde sıralanabilir,

- Ceza (Penalty) metodu
- Artırılmış Lagrange (Augtmented Lagrangian) Metodu
- MPC algoritması
- Lagrange metodu (Lagrange Multipler)

Problemin çözümünde Augmented Lagrange Methodu kullanılmıştır. Augmented Lagrange Methodu, Lagrange Methodunun genelleştirilmiş bir halidir ve normal kuvvetler ve sürtünme kuvvetlerinde kademeli artış altında çözüm arayan iteratif bir yöntemdir. Sahip olduğu özellikler nedeniyle büyük deformasyonlara sahip sürtünmeli ve sürtünmesiz temas

problemlerinin hesaplanmasında en uygun yöntemdir [105,106,107]. Analiz modeli Şekil 9'de verilmektedir.



Şekil 7. Analiz sonrası şekil değiştirmiş hal ve düşey yer değiştirmeler (100x)

3. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde, alt tarafından rijit düzleme bağlı dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabaka ile homojen izotrop tabakanın sürekli ve süreksiz temasına ait bulgular irdelenmiştir. Problemin çözümünde çeşitli değişkenlerin panç altındaki temas uzunluklarına, tabakalar arası ilk ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıklarına, tabakalar arasındaki açılma miktarına etkisi incelenmiştir.

Tablo 2. Ortotropik malzeme özellikleri

Parametre İsmi	**Malzeme İsmi**				
	A GI/EP	B Gr/Ep (T300/934)	C Gr/Ep (P75/934)	D B/Al	E Gr/Al
Exx (GPa)	243.000	144.800	42.70	402.600	227.500
Eyy (GPa)	7.200	10.300	11.70	24.100	137.900
Ezz (GPa)	7.200	10.300	11.70	24.100	137.900
μ_{xy} (GPa)	3.929	5.515	8.238	16.750	55.150
μ_{xz} (GPa)	3.929	5.515	8.238	16.750	55.150
μ_{yz} (GPa)	2.406	3.447	3.778	8.340	49.240
υ_{xy}	0.33	0.30	0.27	0.29	0.24
υ_{xz}	0.33	0.30	0.27	0.29	0.24
υ_{yz}	0.49	0.50	0.55	0.45	0.40

Kaynak: [16]

A : Glass/Epoxy (GI/Ep)

B : Graphite/Epoxy (Gr/Ep T300/934)

C : Graphite/Epoxy (Gr/Ep P75/934)

D : Boron Aliminium (B/Al)

E : Graphite/Aliminium (Gr/Al)

Sonuçlarda kullanılacak referans değerler:

$$E_{xx} = 5.183 x G_{130}, E_{yy} = 1.420 x G_{130}, E_{zz} = 1.420 x G_{130}, v_{12} = 0.27, v_{13} = 0.27, \quad v_{23} = 0.55,$$

$$\frac{R}{h_1} = 10, \quad \frac{h_2}{h_1} = 2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 1.25, \quad \Gamma_1 = 2, \quad \frac{\mu_2}{C_{550}} = 2, \quad \Gamma_2 = 1.5, \rho_{10} g h_1 / C_{550} = 2x10^{-6},$$

$$\gamma h_1 = Log(\Gamma_1), \Gamma_1 = \frac{C_h}{C_0}, \beta h_1 = Log(\Gamma_2), \Gamma_2 = \frac{\rho_h}{\rho_0}, \quad a^* = a / h_1, \quad P_{cr}{}^* = \frac{P_{cr}}{C_{550} h_1}, \quad x_{cr}{}^* = x / h_1$$

(C Malzemesi)

Tablo 3'te Problemin analitik çözümünde Gauss-Chebyshev formülasyonunda optimum N parametresinin belirlenmesi için bir çalışma yapılmıştır. Tablodan görülebileceği üzere N parametresinin artmasının bir süre sonra sonuçlar üzerine bir etkisi bulunmamaktadır. Bu çalışma ile analitik çözümde kullanılacak optimum N değeri belirlenmiştir.

Tablo 3. Problemin analitik çözümünde Gauss-Chebyshev formülasyonunda optimum N parametresinin belirlenmesi

N	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
10	0.025504	0.239062565251426	3.21
20	0.025504	0.239049153097711	3.210125
40	0.025504	0.239049153097692	3.210125
60	0.025504	0.239049153097692	3.210125
80	0.025504	0.239049153097690	3.210125

3.1. Sürekli Temas Durumu

Tablo 4'te Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametrelerinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. Γ_1, ortotrop tabakanın üst yüzeyinin rijitliğinin alt yüzeyinin rijitliğine oranını temsil etmektedir. Γ_1 inhomojenite parametresinin artmasıyla panç altında oluşan yarı değme uzunlukları ve ilk ayrılma için gerekli kritik yük azalmaktadır. Fakat tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları ise artmaktadır. Γ_2, ortotrop tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğunun alt yüzeyine olan oranını temsil etmektedir. Γ_2, inhomojenite parametresinin artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük artmaktadır. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları ise Γ_2 yoğunluk oranının değişiminden etkilenmemektedir.

Tablo 4. Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametrelerinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi

$\Gamma_2 = 1.5$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
-2.3026	0.1	0.16353	0.63221	2.6315
-1.6094	0.2	0.10384	0.452193	2.67625
-0.6931	0.5	0.058471	0.328401	2.82875
-0.2877	0.75	0.045666	0.294316	2.92438
0.001	1	0.038383	0.274714	2.9985
0.6931	2	0.025504	0.239049	3.201
1.3863	4	0.017118	0.214902	3.435

$\Gamma_2 = 3$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
-2.3026	0.1	0.195112	0.942654	2.6355
-1.6094	0.2	0.124893	0.668577	2.678
-0.6931	0.5	0.0708444	0.485059	2.831
-0.2877	0.75	0.0554373	0.434637	2.925
0.001	1	0.0466457	0.405656	2.9975
0.6931	2	0.0310455	0.352951	3.20125
1.3863	4	0.0208588	0.317282	3.435

Tablo 4.'ün devamı.

$\Gamma_2 = 6$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
-2.3026	0.1	0.236282	1.452454	2.6425
-1.6094	0.2	0.152657	1.02701	2.68
-0.6931	0.5	0.0873537	0.743994	2.8325
-0.2877	0.75	0.0685323	0.666482	2.925
0.001	1	0.0577591	0.621969	3
0.6931	2	0.0385204	0.541081	3.2015
1.3863	4	0.0259142	0.486371	3.435

Tablo 5'te E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme mesafeleri, tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzunlukları artmaktadır.

Tablo 5. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

E_{xx}	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
$0.25x\overline{E_{xx}}$	0.016247	0.0945874	2.1375
$0.5x\overline{E_{xx}}$	0.02936	0.156984	2.619
$\overline{E_{xx}}$	0.025504	0.239049	3.201
$2x\overline{E_{xx}}$	0.030322	0.349019	3.825

Tablo 6'da E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzunlukları artmakta, tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük ise azalmaktadır.

Tablo 6. E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

E_{yy}	a^*	$P_{cr}^* \ (x10^3)$	x_{cr}^*
0.5x $\overline{E}_{yy}$	0.0230002	0.272129	3.1275
1x $\overline{E}_{yy}$	0.025504	0.239049	3.201
2x $\overline{E}_{yy}$	0.02651	0.229719	3.26
4x $\overline{E}_{yy}$	0.027083	0.228692	3.318

Tablo 7'de E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzunlukları azalmakta, tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük ise artmaktadır.

Tablo 7. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

E_{zz}	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
$0.125x\overline{E_{zz}}$	0.0485713	0.186064	4.66
$0.25x\overline{E_{zz}}$	0.0377939	0.183746	3.995
$0.5x\overline{E_{zz}}$	0.0305375	0.197961	3.495
$\overline{E_{zz}}$	0.0255034	0.239067	3.2025
$2x\overline{E_{zz}}$	0.0200373	0.308092	3.1000

Tablo 8'de ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranının değişimi panç altındaki değme uzaklığını, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığını etkilememektedir. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının artmasıyla ise panç altındaki yarı değme uzunlukları, ilk ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmaktadır.

Tablo 8. ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 0.25$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
0.25	0.0269506	0.258243	5.075
0.5	0.0261645	0.251164	4.335
1	0.0260655	0.249297	3.7215
2	0.0255034	0.239067	3.2015
4	0.0240179	0.212253	2.7975
∞	0.0199021	0.145886	2.3025

Tablo 8'in devamı

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 1.25$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	$P_{cr}{}^* \left(x10^3\right)$	$x_{cr}{}^*$
0.25	0.0269506	0.258243	5.075
0.5	0.0261645	0.251163	4.33375
1	0.0260655	0.249297	3.72125
2	0.0255034	0.239067	3.2025
4	0.0240179	0.212253	2.7975
∞	0.0199022	0.145887	2.3025

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 5$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	$P_{cr}{}^* \left(x10^3\right)$	$x_{cr}{}^*$
0.25	0.0269506	0.258243	5.075
0.5	0.0261645	0.251163	4.33375
1	0.0260655	0.249297	3.72125
2	0.0255034	0.239067	3.2025
4	0.0240179	0.212253	2.7975
∞	0.0199022	0.145887	2.3025

Tablo 9'da h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. h_2 / h_1 yükseklik oranının artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. R / h_1 panç yarıçapının artmasıyla ise panç altındaki yarı değme uzunlukları artmakta, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıkları ise bu değişimden etkilenmemektedir.

Tablo 9. h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

$\frac{R}{h_1}=10$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
0.25	0.0202563	0.151144	2.445
0.5	0.0206	0.156324	2.573
1	0.0216209	0.172184	2.82
2	0.0255034	0.239067	3.2025
4	0.0311373	0.355083	3.32

$\frac{R}{h_1}=100$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
0.25	0.064823	0.151347	2.445
0.5	0.0659591	0.156522	2.574
1	0.0692949	0.172385	2.82125
2	0.0819472	0.239343	3.2025
4	0.100415	0.355673	3.3225

Tablo 9'un devamı

$\frac{R}{h_1}=250$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	$P_{cr}^{*}\left(x10^3\right)$	x_{cr}^{*}
0.25	0.103539	0.151698	2.4475
0.5	0.105387	0.156864	2.575
1	0.110821	0.172733	2.82375
2	0.131302	0.239824	3.205
4	0.1614	0.356711	3.3275

Tablo 10'da E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzunlukları artmakta, tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük ise azalmaktadır.

Tablo 10. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

$E_{yy}=0.5x\overline{E_{yy}}$			
E_{xx}	a^*	$P_{cr}^{*}\left(x10^3\right)$	x_{cr}^{*}
$0.25x\overline{E_{xx}}$	0.0139241	0.101797	1.99
$0.5x\overline{E_{xx}}$	0.0186948	0.178517	2.515
$\overline{E_{xx}}$	0.0230002	0.272129	3.1275
$2x\overline{E_{xx}}$	0.0272965	0.390809	3.7500

Tablo 10'un devamı.

$E_{yy} = 1x\overline{E_{yy}}$			
E_{xx}	a^*	$P_{cr}^{*}\left(x10^3\right)$	x_{cr}^{*}
$0.25x\overline{E_{xx}}$	0.016247	0.0945874	2.1375
$0.5x\overline{E_{xx}}$	0.02936	0.156984	2.619
$\overline{E_{xx}}$	0.025504	0.239049	3.201
$2x\overline{E_{xx}}$	0.030322	0.349019	3.825

$E_{yy} = 2x\overline{E_{yy}}$			
E_{xx}	a^*	$P_{cr}^{*}\left(x10^3\right)$	x_{cr}^{*}
$0.25x\overline{E_{xx}}$	0.0172984	0.0948479	2.25
$0.5x\overline{E_{xx}}$	0.0219187	0.152606	2.69875
$\overline{E_{xx}}$	0.0265019	0.22972	3.25875
$2x\overline{E_{xx}}$	0.0314435	0.335338	3.8800

Tablo 11'de E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve $\rho_{10}g / C_{550}$ oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzunlukları azalmakta, tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük ise artmaktadır. $\rho_{10}g / C_{550}$ oranının artmasıyla ise panç altındaki yarı değme uzunlukları ve tabakalar arasındaki ayrılma için gerekli kritik yük artmakta ilk ayrılma uzaklıkları ise değişmemektedir.

Tablo 11. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün değişiminin ve $\frac{\rho_{10} g}{C_{550}}$ oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi.

$\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} = 1x10^{-6}$			
E_{zz}	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
$0.125x\overline{E_{zz}}$	0.0108226	0.00930097	4.65875
$0.25x\overline{E_{zz}}$	0.00847756	0.00918557	3.995
$0.5x\overline{E_{zz}}$	0.0067932	0.00989654	3.495
$\overline{E_{zz}}$	0.00567453	0.0119511	3.2
$2x\overline{E_{zz}}$	0.00447064	0.0154027	3.1

$\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} = 2x10^{-6}$			
E_{zz}	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
$0.125x\overline{E_{zz}}$	0.0485713	0.186064	4.66
$0.25x\overline{E_{zz}}$	0.0377939	0.183746	3.995
$0.5x\overline{E_{zz}}$	0.0305375	0.197961	3.495
$\overline{E_{zz}}$	0.0255034	0.239067	3.2025
$2x\overline{E_{zz}}$	0.0200373	0.308092	3.1000

Tablo 11’in devamı.

$\frac{\rho_{10} g}{C_{550}} = 8x10^{-6}$			
E_{zz}	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
$0.125x\overline{E_{zz}}$	0.0976928	0.744828	4.6625
$0.25x\overline{E_{zz}}$	0.0760253	0.735434	3.995
$0.5x\overline{E_{zz}}$	0.0614462	0.792233	3.5
$\overline{E_{zz}}$	0.0513877	0.956561	3.2
$2x\overline{E_{zz}}$	0.0405018	1.23285	3.1

Tablo 12’de farklı ortotropik malzeme türlerinin (A, B, C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. C malzemesi en düşük elastisite modülü değerlerine sahip olduğundan, ilk ayrılma için gerekli en küçük kritik yükü gerektirmektedir. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların yaklaşım oranlarının literatürde kabul edilebilir düzeyde ve oldukça yakın olduğu sonucu elde edilmiştir.

Tablo 12. Farklı ortotrop malzeme türlerinde (A,B,C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması $P = P_{cr}^{*} = P_{cr} / \left(\mu_{xy}\right)_A$, $\left(\mu_{xy}\right)_A = 3.929x10^{9}$

Malzeme	SONUÇLAR	a^{*}	$P_{cr}^{*}\left(x10^{3}\right)$	x_{cr}^{*}
A	Analitik	0.04838198	1.04186053	5.3825
	SEY	**0.05**	**1.03**	**5.40**
	Fark (%)	3	1	0.3
B	Analitik	0.037115400	0.85638191	4.635
	SEY	**0.036667**	**0.842199**	**4.64**
	Fark (%)	1	1.6	0.1
C	Analitik	0.025504	0.50121803	3.201
	SEY	**0.025**	**0.49895567**	**3.21**
	Fark (%)	1.9	0.4	0.2
D	Analitik	0.03853547	2.33292	4.635
	SEY	**0.04**	**2.3191652**	**4.64**
	Fark (%)	3	0.5	0.1
E	Analitik	0.02323763	3.42498175	2.975
	SEY	**0.023333**	**3.410906**	**2.98**
	Fark (%)	0.4	1.8	0.1

Tablo 13'de μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır ve her iki yöntemden elde edilen sonuçların yaklaşım oranlarının literatürde kabul edilebilir düzeyde olduğu sonucu elde edilmiştir.

Tablo 13. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması

$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	SONUÇLAR	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
0.5	Analitik	0.0261645	0.251163	4.33375
	SEY	**0.025**	**0.2495**	**4.335**
	Fark (%)	4.4	0.6	0.2
1	Analitik	0.0260655	0.249297	3.72125
	SEY	**0.025**	**0.2477**	**3.73**
	Fark (%)	3.9	1.8	0.2
2	Analitik	0.025504	0.239049	3.201
	SEY	**0.025**	**0.23797**	**3.21**
	Fark (%)	2	0.4	0.2
4	Analitik	0.0240179	0.212253	2.7975
	SEY	**0.025**	**0.21175**	**2.81**
	Fark (%)	4	0.2	0.4
∞	Analitik	0.0199022	0.145887	2.3025
	SEY	**0.02**	**0.14693**	**2.325**
	Fark (%)	0.4	0.7	0.9

Tablo 14'de Γ_1 inhomojenite parametresinin değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçların yaklaşım oranları kabul edilebilir düzeyde olduğu sonucu elde edilmiştir.

Tablo 14. Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması

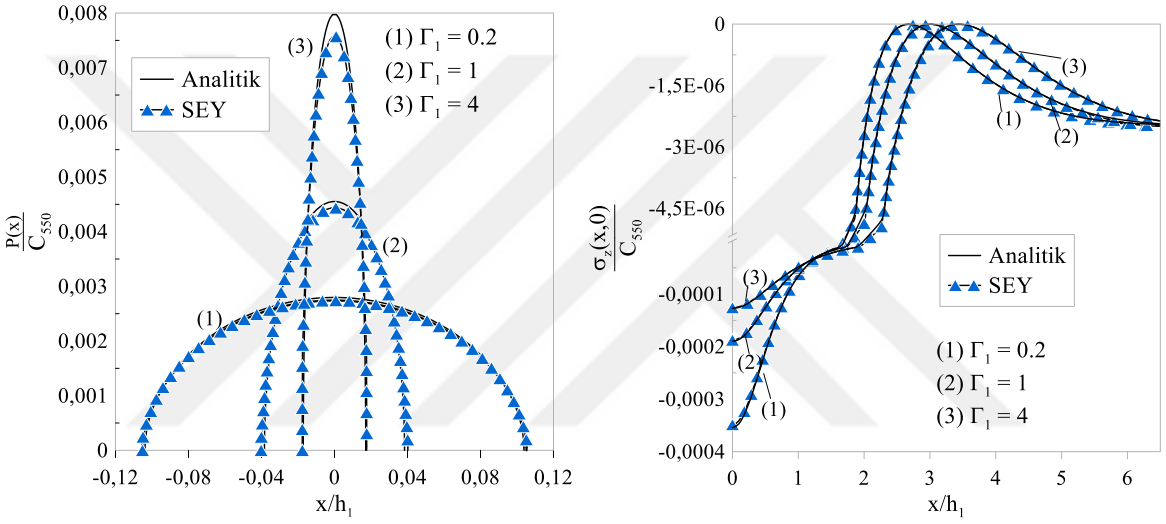
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	SONUÇLAR	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
-2.3026	0.1	Analitik	0.16353	0.636221	2.6315
		SEY	**0.17**	**0.62733**	**2.63**
		Fark (%)	3.9	1.4	0.057
-1.6094	0.2	Analitik	0.10384	0.452193	2.67625
		SEY	**0.1080**	**0.4476**	**2.676**
		Fark (%)	4	1	3
-0.6931	0.5	Analitik	0.058471	0.328401	2.82875
		SEY	**0.06**	**0.32568**	**2.84**
		Fark (%)	2.6	0.8	0.4
-0.2877	0.75	Analitik	0.045666	0.294316	2.92438
		SEY	**0.048**	**0.2925**	**2.928**
		Fark (%)	5	0.6	1
0.001	1	Analitik	0.038383	0.274714	2.9985
		SEY	**0.04**	**0.2727**	**3.01**
		Fark (%)	4	0.7	0.3
0.6931	2	Analitik	0.025504	0.239049	3.201
		SEY	**0.025**	**0.23797**	**3.21**
		Fark (%)	1.9	0.4	0.2
1.3863	4	Analitik	0.017118	0.214902	3.435
		SEY	**0.018**	**0.21405**	**3.45**
		Fark (%)	5	3	1

Tablo 15'de h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arası ayrılma için gerekli kritik yüke ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların yaklaşım oranları kabul edilebilir düzeyde olduğu sonucu elde edilmiştir.

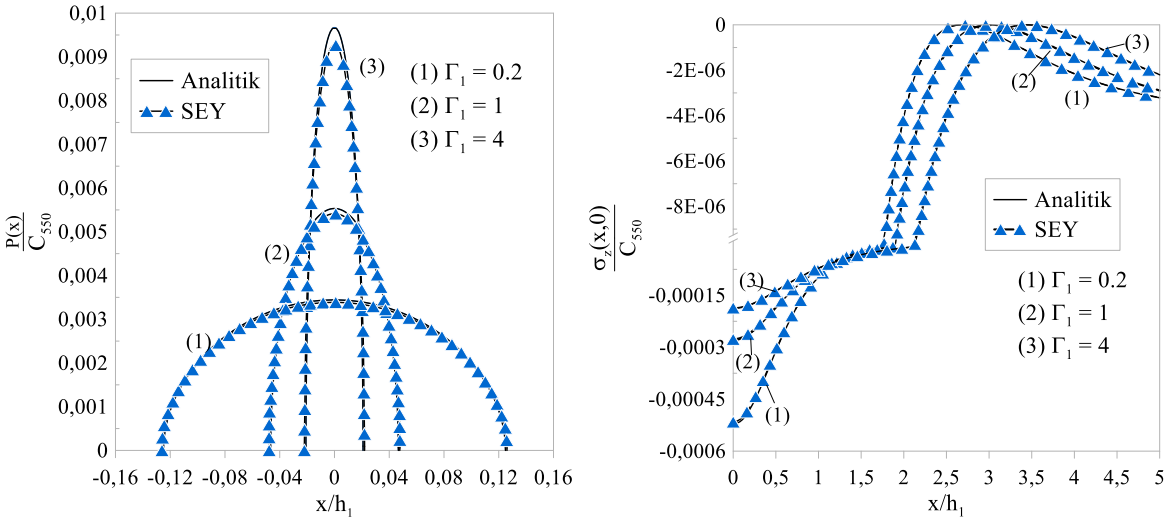
Tablo 15. h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması.

$\frac{h_2}{h_1}$	SONUÇLAR	a^*	$P_{cr}^* \left(x10^3\right)$	x_{cr}^*
0.25	Analitik	0.064823	0.151347	2.445
	SEY	**0.068**	**0.1522**	**2.46**
	Fark (%)	4.9	0.5	0.6
0.5	Analitik	0.0659591	0.156522	2.574
	SEY	**0.07**	**0.1568**	**2.588**
	Fark (%)	6	1.7	0.5
1	Analitik	0.0692949	0.172385	2.82125
	SEY	**0.07333**	**0.17285**	**2.83**
	Fark (%)	1.4	0.2	0.3
2	Analitik	0.0819472	0.239343	3.2025
	SEY	**0.085**	**0.23856**	**3.2117**
	Fark (%)	3	0.3	0.2
4	Analitik	0.100415	0.355673	3.3225
	SEY	**0.1050**	**0.35809**	**3.3167**
	Fark (%)	4	0.6	0.17

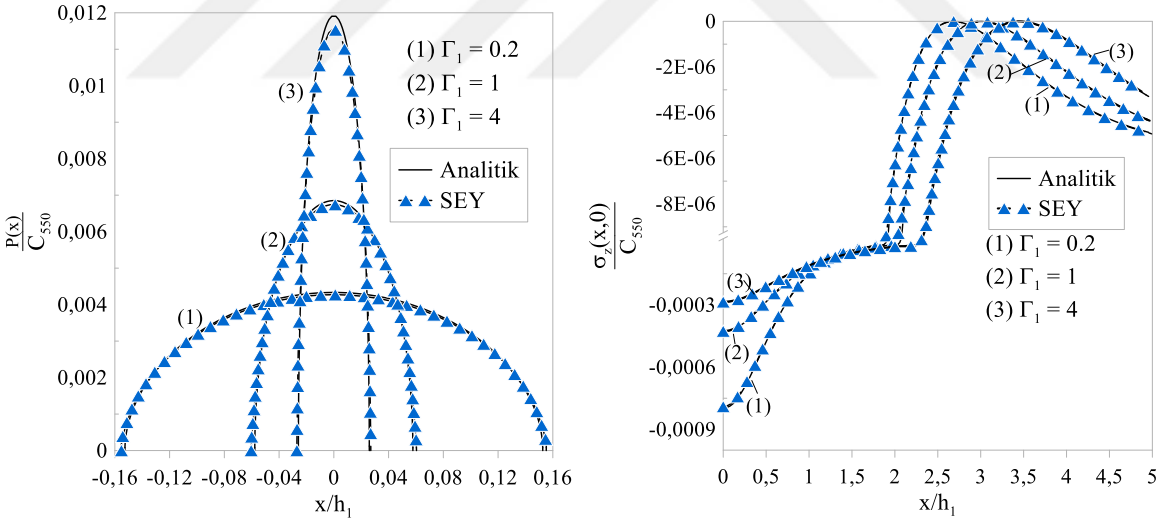
Şekil 8. ‘de sürekli temasta sınır durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki değme gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi Γ_2 inhomojenite parametresinin farklı değerleri için sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. Γ_1 inhomojenite parametresinin artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri artmakta boyutsuz temas uzunlukları ise azalmaktadır. σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki maksimum değeri azalmakta tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları ise artmaktadır.



Şekil 8.a. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 1.5$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

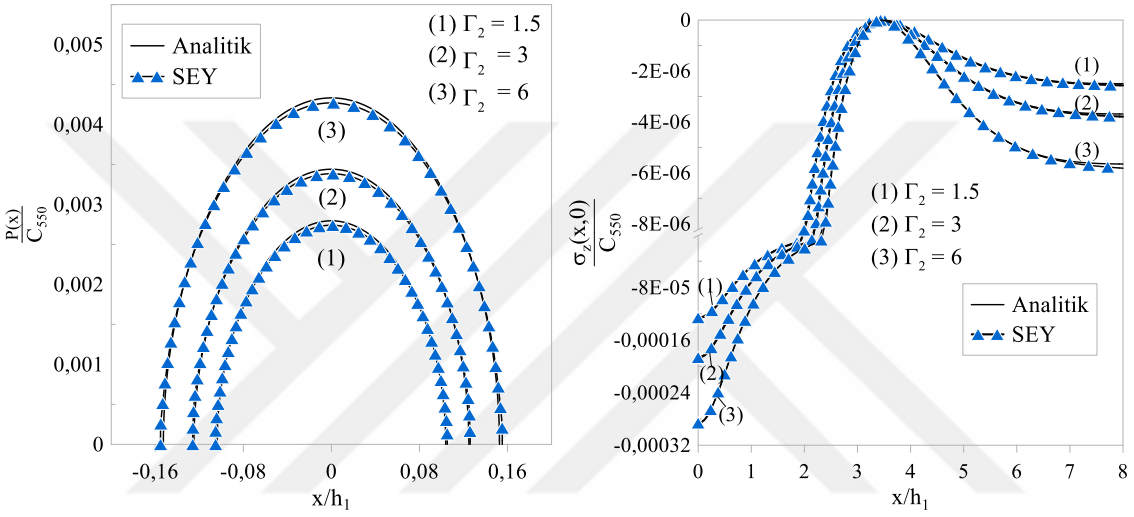


Şekil 8.b. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 3$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)



Şekil 8.c. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_2 = 6$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

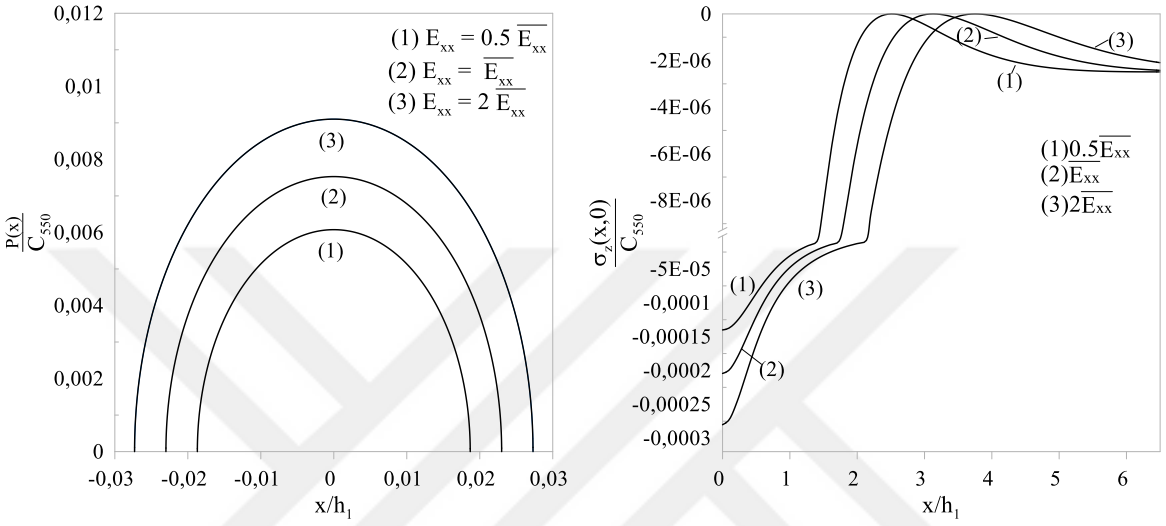
Şekil 9'da sürekli temasta sınır durumu için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. Γ_2 inhomojenite parametresinin artmasıyla panç altındaki temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının değeri artmaktadır. σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin değerleri artmakta tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzunlukları ise değişmemektedir.



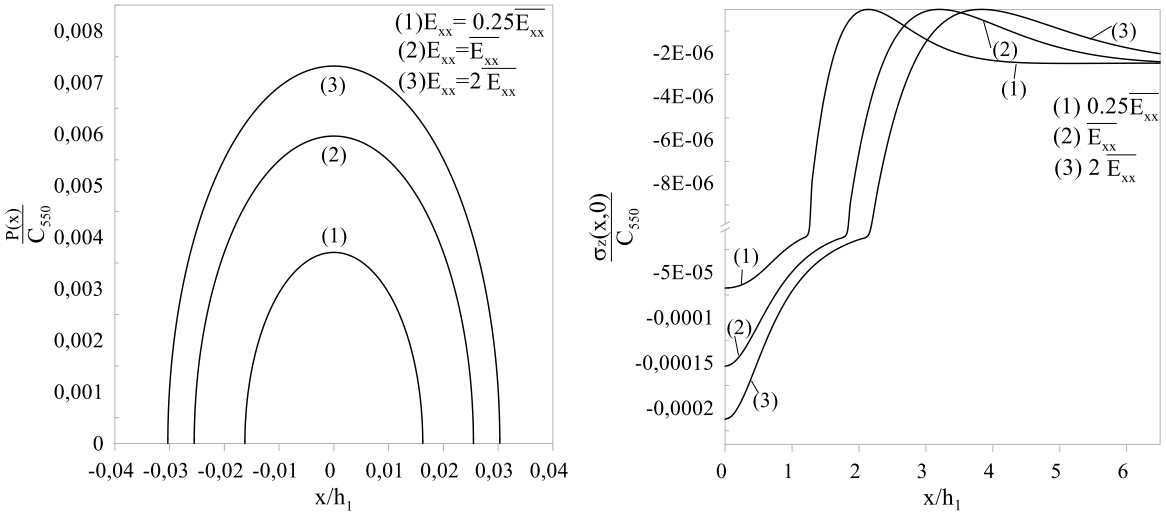
Şekil 9. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\Gamma_1 = 4$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

Şekil 10'de sürekli temasta sınır durumu için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisinin E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün farklı değerleri için sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri ve boyutsuz temas uzunlukları ve tabakalar arası ilk ayrılma uzunlukları artmaktadır, tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları ve σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki

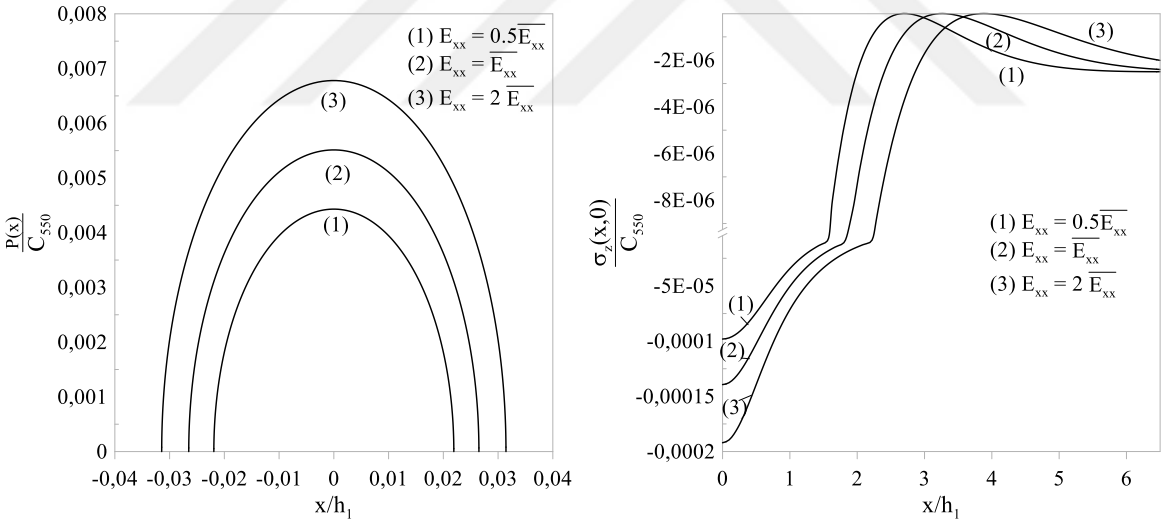
değeri artmaktadır. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün artan değerleri için ise panç altındaki temas gerilmelerinin maksimum değeri azalmaktadır, panç altındaki yarı temas uzunlukları ise artmaktadır, tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları artmakta, σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değeri azalmaktadır.



Şekil 10.a. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 0.5x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem)

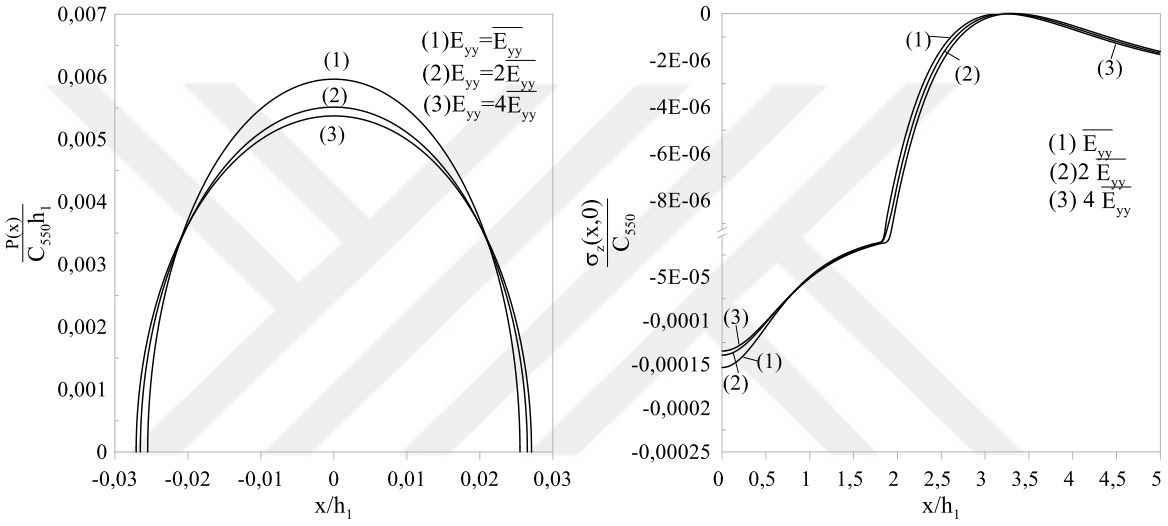


Şekil 10.b. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 1x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem)



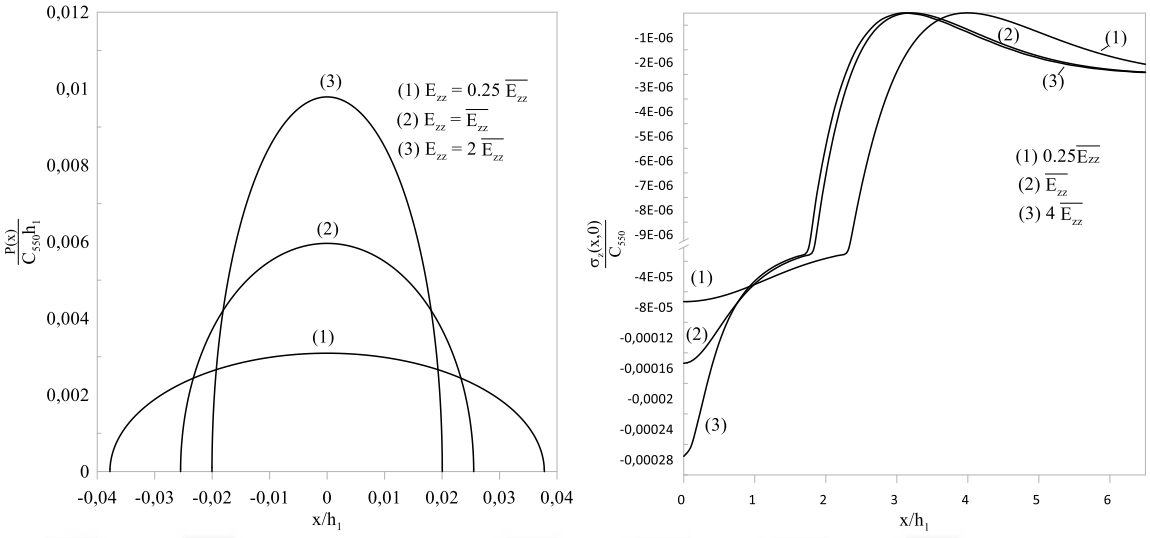
Şekil 10.c. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $E_{yy} = 2x\bar{E}_{yy}$ (Analitik Yöntem)

Şekil 11'de sürekli temasta sınır durumu için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün artan değerleri için ise panç altındaki temas gerilmelerinin maksimum değeri azalmaktadır, panç altındaki yarı temas uzunlukları ise artmaktadır. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıkları artmakta, σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değeri azalmaktadır.



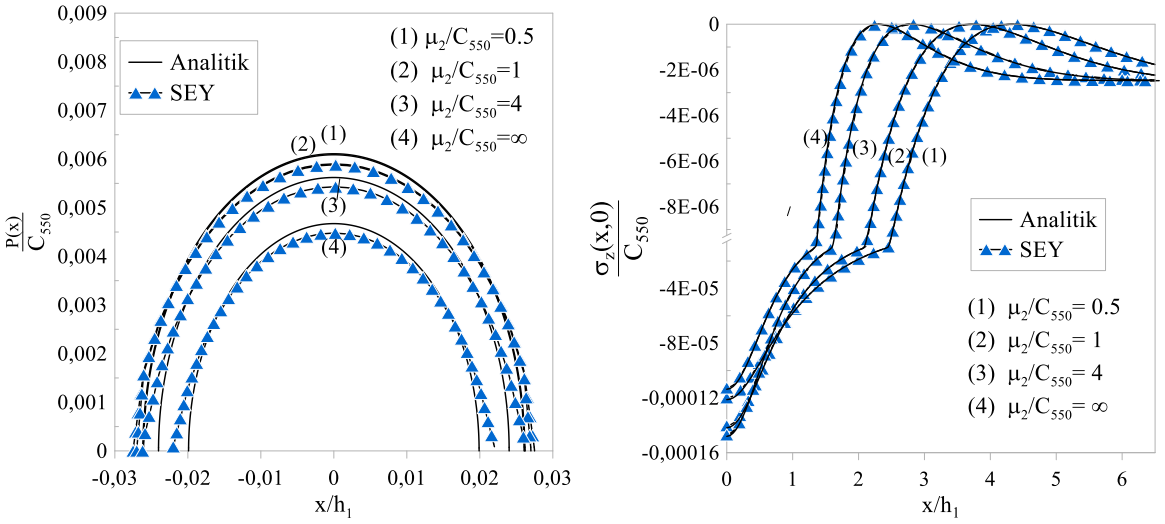
Şekil 11. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi (Analitik Yöntem)

Şekil 12'de sürekli temasta sınır durumu için E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün artan değerleri için panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri artmakta, boyutsuz temas uzunlukları ise azalmaktadır. Tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin maksimum değeri artmakta, ilk ayrılma uzaklıkları ise artmaktadır.



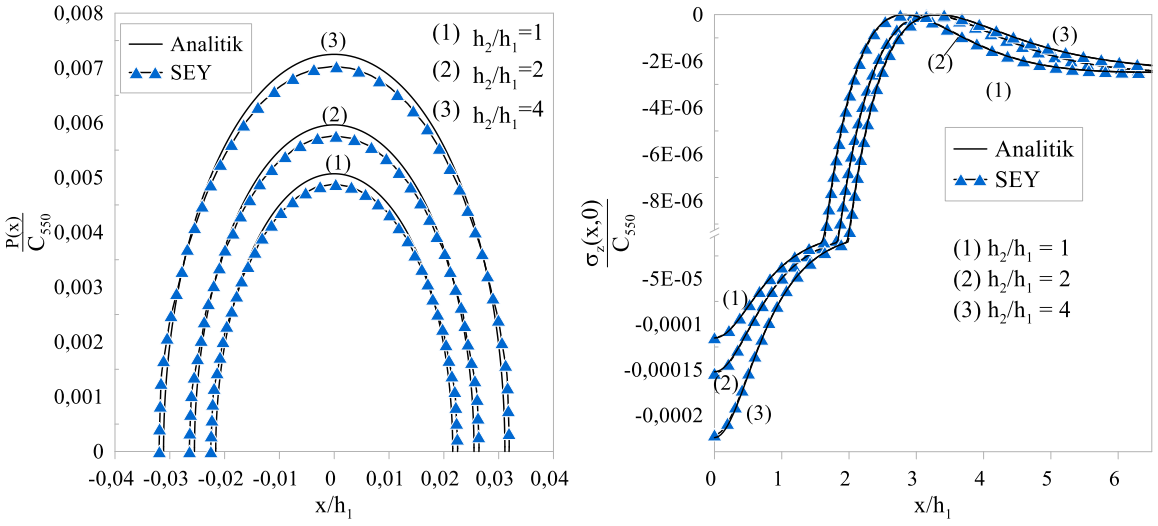
Şekil 12. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi (Analitik Yöntem)

Şekil 13'de sürekli temasta sınır durumu için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının artan değerleri için panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri azalmakta boyutsuz temas uzunlukları ise artmaktadır. Tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değeri ve ilk ayrılma uzaklıkları azalmaktadır. $\mu_2 / C_{550} \to \infty$ durumu rijit düzleme oturan ortotrop tek tabaka özel haline karşılık gelmektedir.

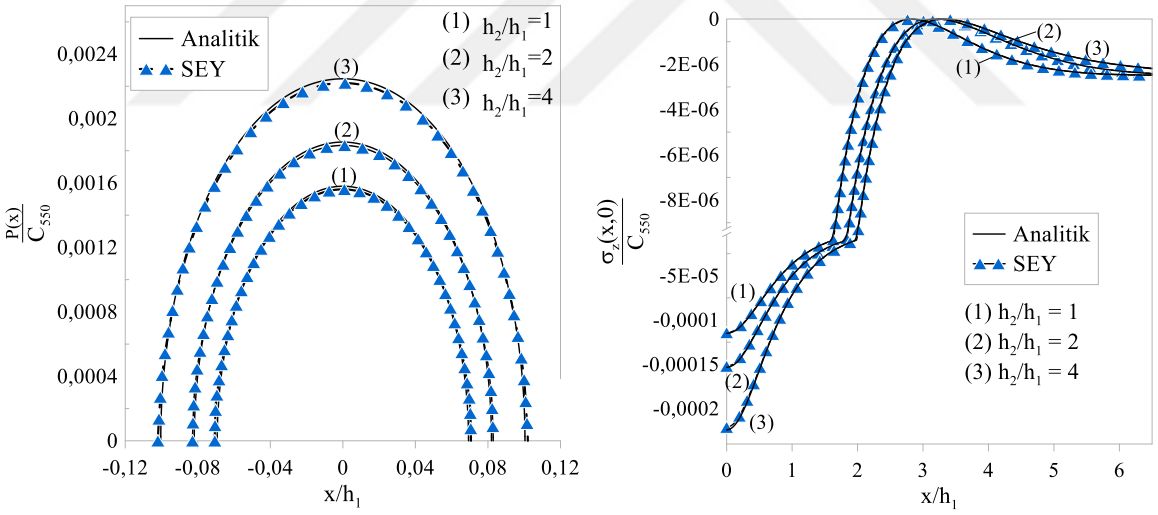


Şekil 13. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilme dağılımına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $\rho_2 / \rho_{10} = 1.25$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) etkisi.

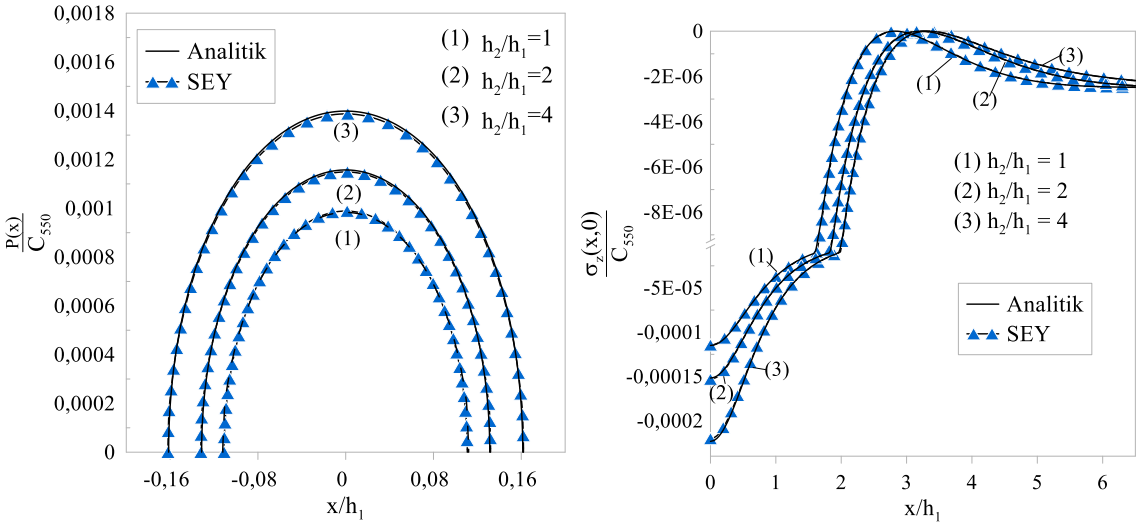
Şekil 14'de sürekli temasta sınır durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin farklı R / h_1 değerleri için panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. h_2 / h_1 yükseklik oranının artan değerleri için panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri ve panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları artmaktadır, tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin maksimum değeri ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır.



Şekil 14.a. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilme dağılımına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 10$. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

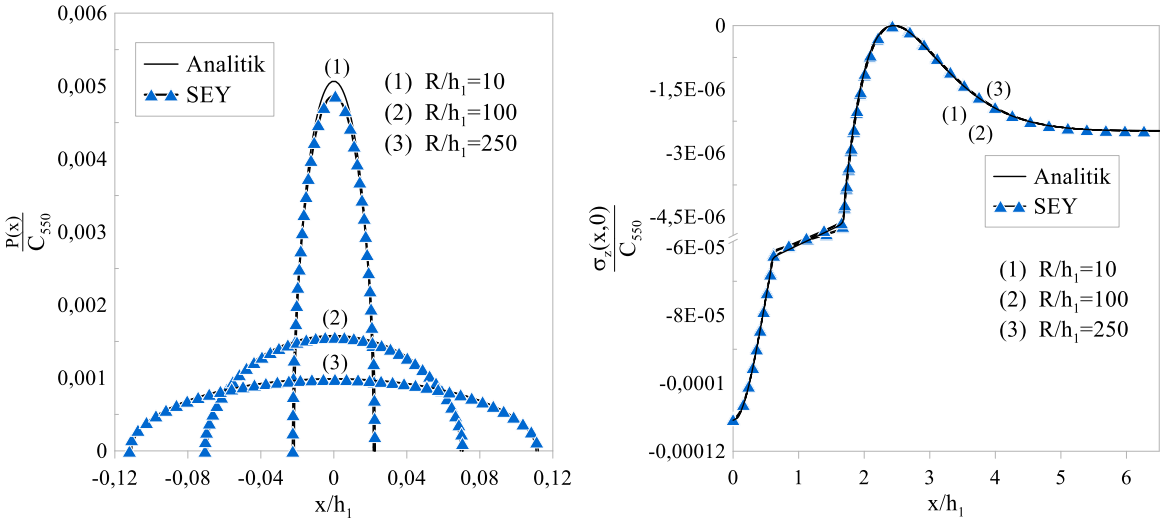


Şekil 14.b. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilme dağılımına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 100$. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)



Şekil 14.c. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için h_2 / h_1 yükseklik oranının panç altındaki temas gerilme dağılımına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi $R/h = 250$. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

Şekil 15'de sürekli temasta sınır durumu için R / h_1 boyutsuz panç yarıçapı uzunluklarının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. R / h_1 boyutsuz panç yarıçapı uzunluklarının artan değerleri için panç altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değeri azalmaktadır, boyutsuz temas uzunlukları ise artmaktadır, tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin maksimum değeri ve ilk ayrılma uzaklıkları ise pek değişmemektedir.



Şekil 15. Sürekli temasta sınır durumu $(P = P_{cr})$ için R/h panç yarıçapının panç altındaki temas gerilme dağılımına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. $h_2 / h_1 = 1$ (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması)

3.2. Süreksiz Temas Durumu

Tablo 16'da Γ_1 inhomojenite parametresinin farklı Γ_2 inhomojenite parametre değerleri için panç altındaki temas uzunluğu, ve tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. Γ_1 inhomojenite parametresinin artmasıyla panç altındaki boyutsuz yarı temas uzunlukları azalmakta ve tabakalar arasındaki ayrılma bölgesinin büyüklüğü ise artmaktadır.

Tablo 16. Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametrelerinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi.

$\Gamma_2 = 1.5 \ \left(P^* = 0.8x10^{-3}\right)$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	b^*	c^*
-2.3026	0.1	0.181402248	2.11568777	3.52258731
-1.6094	0.2	0.13593244	1.90321614	4.486400333
-0.6931	0.5	0.090554576	1.8516204	5.5667459
-0.2877	0.75	0.075043601	1.86689070	6.01748658
0.001	1	0.06552037	1.88868877	6.32068448
0.6931	2	0.04690236	1.97178371	7.044526223
1.3863	4	0.03327156	2.08823760	7.75867366

$\Gamma_2 = 3 \ \left(P^* = 1x10^{-3}\right)$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	b^*	c^*
-2.3026	0.1	0.200424134	2.34095794	3.00987347
-1.6094	0.2	0.15086728	1.99941490	4.059361590
-0.6931	0.5	0.10097384	1.91849267	5.11957357
-0.2877	0.75	0.08381929	1.92979158	5.550113263
0.001	1	0.073248989	1.94900453	5.84804996
0.6931	2	0.052532439	2.02729956	6.5433562
1.3863	4	0.037307709	2.14704115	7.19918047

Tablo 16'nın devamı.

$\Gamma_2 = 6 \quad \left(P^* = 1.5x10^{-3}\right)$				
γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	a^*	b^*	c^*
-2.3026	0.1	0.23975496	2.42846422	2.9049758
-1.6094	0.2	0.18198836	2.02067776	3.99649482
-0.6931	0.5	0.12295544	1.93046433	5.05945733
-0.2877	0.75	0.10243720	1.94035473	5.48947431
0.001	1	0.08969617	1.9586732	5.78611032
0.6931	2	0.0645616	2.0359022	6.4780176
1.3863	4	0.045975	2.155096	7.1296825

Tablo 17'de E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{xx} x yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmaktadır.

Tablo 17. E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$

E_{xx}	a^*	b^*	c^*
$0.5x\overline{E_{xx}}$	0.033504538	1.7117152	5.0739086
$\overline{E_{xx}}$	0.033007072	2.2911058	5.0366099
$2x\overline{E_{xx}}$	0.032422169	3.2079437	4.7003678

Tablo 18'de E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarı artmaktadır.

Tablo 18. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^{*}=0.5x10^{-3}\right)$

E_{yy}	a^{*}	b^{*}	c^{*}
$\overline{E_{yy}}$	0.0369539	2.1586453	5.6612598
$2x\overline{E_{yy}}$	0.039182707	2.1913874	5.843241
$4x\overline{E_{yy}}$	0.040121511	2.2329746	5.9431451

Tablo 19'da E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{zz} z yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki yarı temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmaktadır.

Tablo 19. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi $\left(P^{*}=0.4x10^{-3}\right)$

E_{zz}	a^{*}	b^{*}	c^{*}
$0.125x\overline{E_{zz}}$	0.071377885	3.2687949	7.7542652
$0.25x\overline{E_{zz}}$	0.055896019	2.7738517	6.7902707
$0.5x\overline{E_{zz}}$	0.043481653	2.4355465	5.8907889
$\overline{E_{zz}}$	0.033007073	2.2911044	5.0366182
$2x\overline{E_{zz}}$	0.022783227	2.4133278	4.2585597

Tablo 20'de ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının artmasıyla panç altındaki yarı temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmaktadır. ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranının değişimi panç altındaki boyutsuz yarı temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarını etkilememektedir.

Tablo 20. ρ_2 / ρ_1 yoğunluk oranı ve μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 0.25$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.033031118	3.8027607	7.2966927
0.5	0.033021229	3.1944651	6.3950679
1	0.033013103	2.71115839	5.60846991
2	0.033007073	2.2911044	5.0366182
4	0.033003098	1.9556161	4.738782
∞	0.032998064	1.5302808	4.5701023

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 1.25$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.033031118	3.8027607	7.2966927
0.5	0.033021229	3.1944651	6.3950679
1	0.033013103	2.71115839	5.60846991
2	0.033007073	2.2911044	5.0366182
4	0.033003098	1.9556161	4.738782
∞	0.032998064	1.5302808	4.5701023

Tablo 20'nin devamı.

$\frac{\rho_2}{\rho_{10}} = 5$			
$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.033031118	3.8027607	7.2966927
0.5	0.033021229	3.1944651	6.3950679
1	0.033013103	2.71115839	5.60846991
2	0.033007073	2.2911044	5.0366182
4	0.033003098	1.9556161	4.738782
∞	0.032998064	1.5302808	4.5701023

Tablo 21'de h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. h_2 / h_1 yükseklik oranının artmasıyla panç altındaki yarı temas uzunlukları pek değişmemektedir, tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmaktadır. R / h_1 panç yarıçapının artan değerleri için panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları artmakta, tabakalar arasındaki açılma miktarı değişmemektedir.

Tablo 21. h_2 / h_1 yükseklik oranı ve R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi. $\left(P^* = 0.4x10^{-3}\right)$

$\frac{R}{h_1} = 10$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.033000308	1.6457018	4.7218393
0.5	0.033002141	1.7380431	4.8639716
1	0.033004693	1.91813	5.0646024
2	0.033007073	2.2911044	5.0366182
4	0.033008405	2.8254315	4.0260233

Tablo 21'in devamı.

$\frac{R}{h_1}=100$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.10635515	1.6504937	4.7175124
0.5	0.10641439	1.7426242	4.8598737
1	0.10649727	1.9223668	5.0611463
2	0.10657496	2.2953405	5.0338287
4	0.10661863	2.8319666	4.0220597

$\frac{R}{h_1}=250$			
$\frac{h_2}{h_1}$	a^*	b^*	c^*
0.25	0.17023197	1.6587945	4.7100788
0.5	0.17046626	1.7505776	4.8527962
1	0.17079654	1.9297581	5.0551047
2	0.17110897	2.3027658	5.0289585
4	0.17128582	2.8434881	4.0150674

Tablo 22'de farklı ortotropik malzeme türlerinin (A,B,C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki en küçük elastisite modülü değerlerine sahip olduğundan aynı yük altında panç altındaki en büyük boyutsuz temas mesafeleri ve tabakalar arasındaki en büyük açılma miktarı A malzemesinde meydana gelmektedir. Ayrıca her iki yöntemin yaklaşım oranları kabul edilebilir düzeydedir.

Tablo 22. Farklı ortotropik malzeme türlerinin (A,B,C,D,E) panç altındaki temas uzunluğu , tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması $P^* = P/\left(\mu_{xy}\right)_A = 3.5x10^{-3}$, $\left(\mu_{xy}\right)_A = 3.929x10^{9}$

Malzeme	a^*	b^*	c^*
A	0.08945862	3.4434012	12.9459427
B	0.0758041	2.818524	11.5709201
C	0.06817377	1.7950719	9.61273753
D	0.046438373	3.454304	6.824856
E	0.02345581	2.7615707	3.2190584

Tablo 23'de uygulanan yük miktarının panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Uygulanan yük miktarının artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları ve tabakalar arasındaki açılma miktarı artmaktadır. Ayrıca her iki yöntemin yaklaşım oranları kabul edilebilir düzeydedir.

Tablo 23. Uygulanan yük miktarının panç altındaki temas uzunluğu , tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması ($P^* = P/\left(C_{550}h_1\right)$, $\Gamma_1 = 0.2$, $\Gamma_2 = 3$, C malzemesi)

P^*	SONUÇLAR	a^*	b^*	c^*
$0.75x10^{-3}$	Analitik	0.13188201	2.2753805	3.2603323
	SEY	**0.134**	**2.28**	**3.27**
	Fark (%)	1.6	0.2	0.3
$1x10^{-3}$	Analitik	0.15086728	1.99941490	4.05936159
	SEY	**0.156**	**2.001**	**4.062**
	Fark (%)	3	0.079	0.065
$1.5x10^{-3}$	Analitik	0.18198906	1.8070424	5.1192751
	SEY	**0.186**	**1.83**	**4.99**
	Fark (%)	**2**	**1.2**	**2.5**

Tablo 24'de Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisine ait sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 24. Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması.

γh_1	Γ_1 $(C_{üst} / C_{alt})$	SONUÇLAR	a^*	b^*	c^*
-2.3026	0.1	Analitik	0.200424134	2.35095794	3.00987437
		SEY	**0.2050**	**2.3350**	**3.03**
		Fark (%)	2	0.6	0.6
-1.6094	0.2	Analitik	0.15086728	1.99941490	4.05936159
		SEY	**0.156**	**2.001**	**4.062**
		Fark (%)	3	0.079	0.065
-0.6931	0.5	Analitik	0.10097384	1.91849267	5.11957357
		SEY	**0.105**	**1.926**	**5.127**
		Fark (%)	3.9	0.39	0.14
-0.2877	0.75	Analitik	0.08381929	1.9297958	5.55011326
		SEY	**0.087**	**1.938**	**5.565**
		Fark (%)	3.7	0.4	0.26
0.001	1	Analitik	0.073248989	1.94900453	5.84804996
		SEY	**0.075**	**1.955**	**5.565**
		Fark (%)	2	0.3	0.5
0.6931	2	Analitik	0.052532439	2.0272956	6.5433562
		SEY	**0.057**	**2.031**	**6.636**
		Fark (%)	2	0.17	1.4
1.3863	4	Analitik	0.037307709	2.14704115	7.19918047
		SEY	**0.039**	**2.142**	**7.119**
		Fark (%)	4.5	0.2	1

Tablo 25'de μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisine ait sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçların yaklaşım oranlarının kabul edilebilir düzeyde olduğu görülmektedir.

Tablo 25. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması.

$\frac{\mu_2}{C_{550}}$	SONUÇLAR	a^*	b^*	c^*
0.25	Analitik	0.03303118	3.8027607	7.29066927
	SEY	**0.03375**	**3.805**	**7.36**
	Fark (%)	2	0.05	0.86
0.5	Analitik	0.033021229	3.1944651	6.3950679
	SEY	**0.035**	**3.2050**	**6.42**
	Fark (%)	5.9	0.3	0.3
1	Analitik	0.033021229	2.8868437	5.5010059
	SEY	**0.035**	**2.72**	**5.62**
	Fark (%)	5.9	5.7	2
2	Analitik	0.033007073	2.2911044	5.0366182
	SEY	**0.035**	**2.3050**	**5.05**
	Fark (%)	6	0.6	0.26
4	Analitik	0.033003098	1.9556161	4.738782
	SEY	**0.035**	**1.971**	**4.755**
	Fark (%)	6	0.78	0.03
∞	Analitik	0.32998064	1.5302808	4.5701023
	SEY	**0.035**	**1.5525**	**4.5825**
	Fark (%)	6	1	0.27

Tablo 26'da h_2 / h_1 yükseklik oranı değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisine ait sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 26. h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas uzunluğu, tabakalar arasındaki ayrılma uzaklıklarına olan etkisinin, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması

$\frac{h_2}{h_1}$	SONUÇLAR	a^*	b^*	c^*
0.25	Analitik	0.10635515	1.6504937	4.7175124
	SEY	**0.11**	**1.67**	**4.73**
	Fark (%)	3	1	0.2
0.5	Analitik	0.10641439	1.7426242	4.8598737
	SEY	**0.11**	**1.76**	**4.87**
	Fark (%)	3	0.9	0.2
1	Analitik	0.10649727	1.9223668	5.0611463
	SEY	**0.11**	**1.94**	**5.07**
	Fark (%)	3	0.9	0.1
2	Analitik	0.10657496	2.295	5.0338287
	SEY	**0.11**	**2.3075**	**5.0475**
	Fark (%)	3	0.5	0.2
4	Analitik	0.10661863	2.8319666	4.0220597
	SEY	**0.11**	**2.835**	**4.0525**
	Fark (%)	3	0.1	0.7

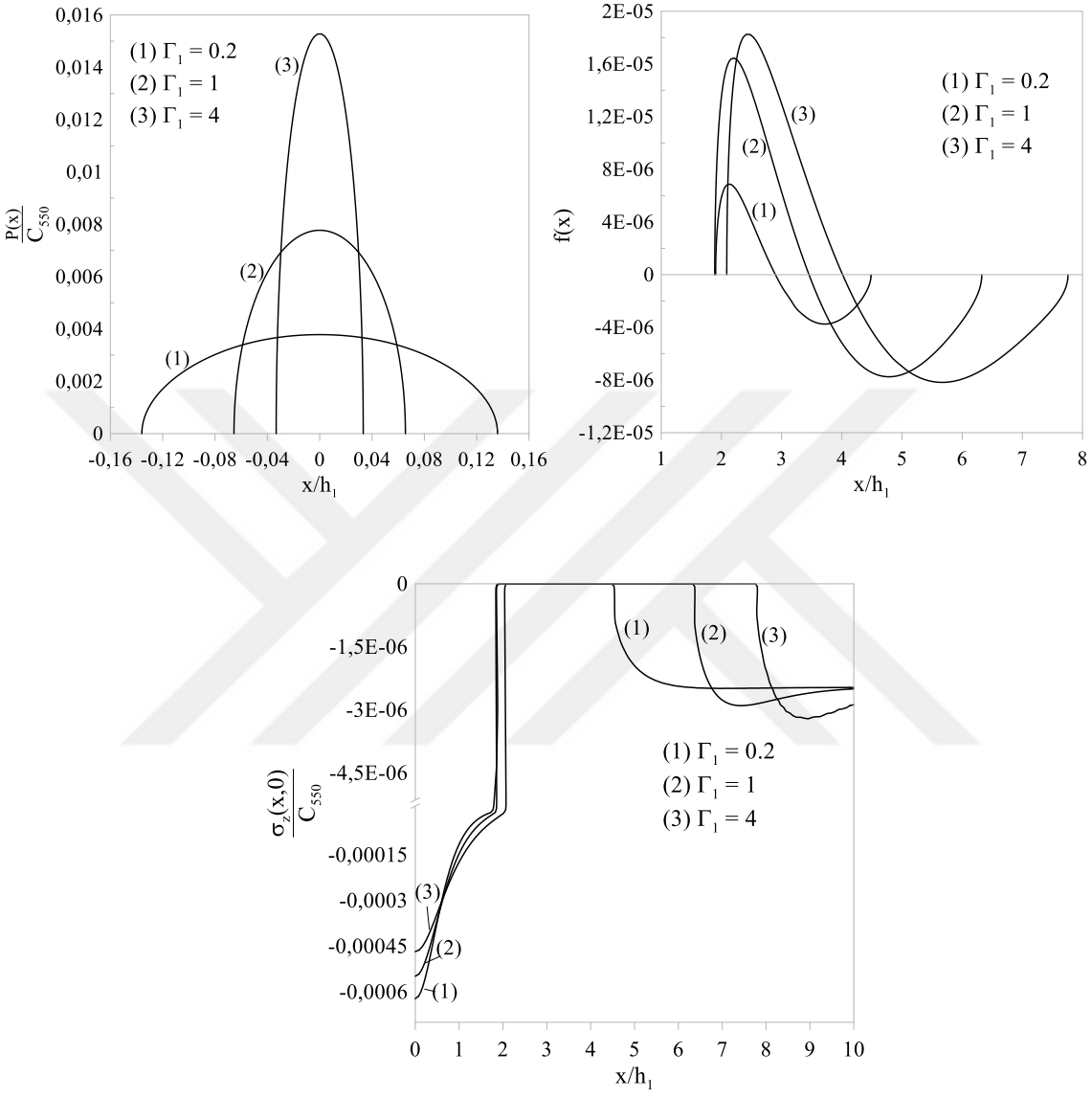
Tablo 27'de, $\mu_2 / C_{550} \to \infty$ problem rijit düzleme oturan tek tabaka haline karşılık gelmektedir. İzotrop malzemeler ortotrop malzemelerin özel halidir ve her üç eksende aynı malzeme özelliklerine sahiptirler. Bu nedenle problemin özel hali Çömez (2019) 'e karşılık gelmektedir. Her iki çalışmadan elde edilen sonuçlar Tablo 25'de karşılaştırılmıştır ve birbirlerine oldukça yakın oldukları görülmektedir.

Tablo 27. Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas uzunluğu, kritik yük ve ilk ayrılma uzaklığına etkisine ait elde edilen sonuçlarının Çömez (2019) ile karşılaştırılması ($R / h_1 = 5$, $\mu_2 / C_{550} = \infty$, $\rho_{10} g h_1 / C_{550} = 1x10^{-6}$, $P / (C_{550} h_1) = 0.2x10^{-3}$, $\Gamma_1 = 1$, $E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ (izotropik özel hal)

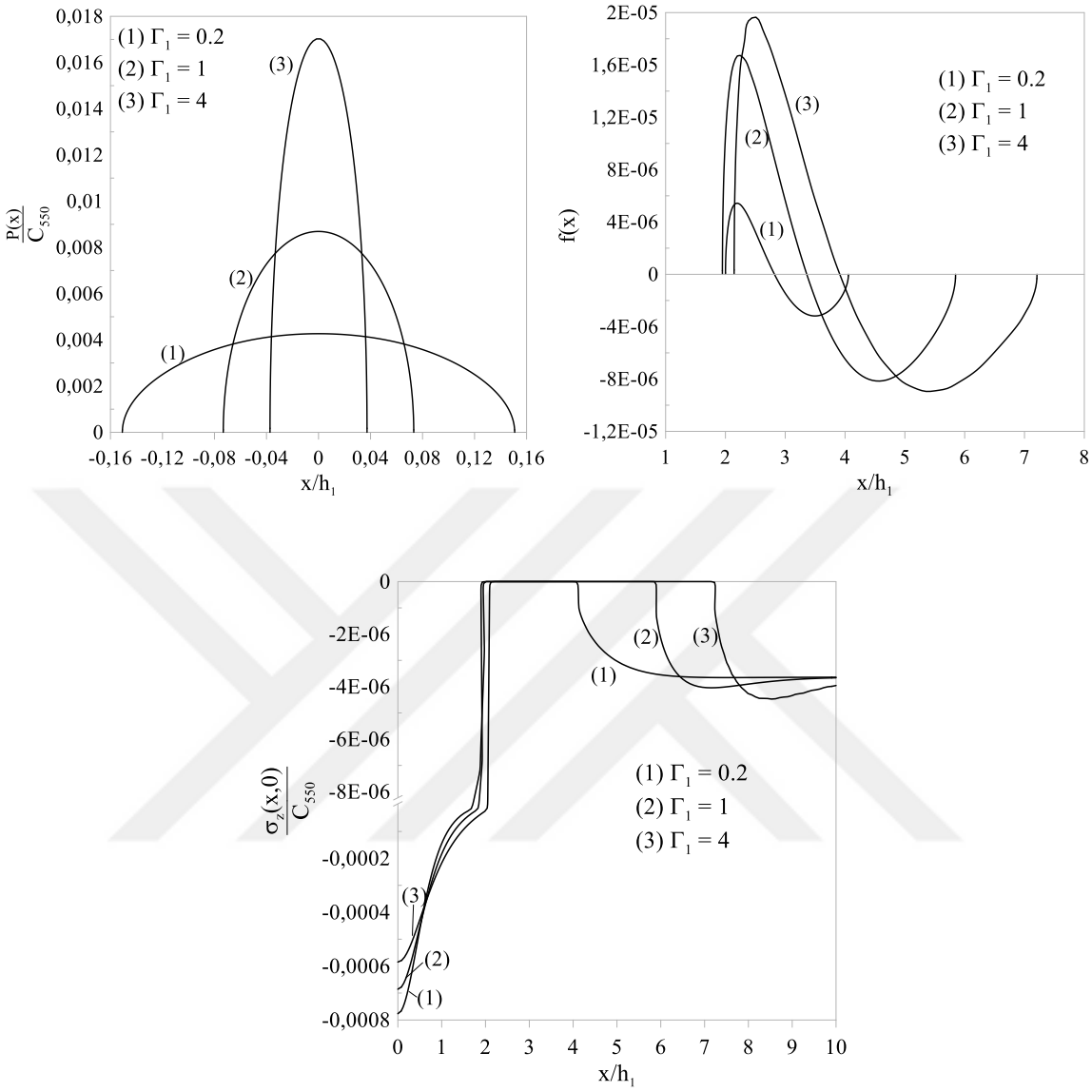
Γ_2 $(\rho_{üst} / \rho_{alt})$	SONUÇLAR	a^*	b^*	c^*
0.5	Analitik	0.0218483103	1.0724299176	4.9488136349
	Çömez [39]	**0.021837444**	**1.072372959**	**4.949668001**
	Fark (%)	0.05	0.005	0.017
1.001	Analitik	0.0218482903	1.1099786385	4.30509874813
	Çömez [39]	**0.021837314**	**1.109928544**	**4.306071110**
	Fark (%)	0.05	0.0045	0.022
2	Analitik	0.0218482706	1.1641121070	3.65840850468
	Çömez [39]	**0.021837393**	**1.164019911**	**3.658855223**
	Fark (%)	0.049	0.0079	0.0122

Şekil 16'da süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. Γ_1 inhomojenite parametresinin değerinin artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları azalmakta ve bununla bağlantılı olarak oluşan boyutsuz temas gerilmelerinin değerleri artmaktadır. Γ_1 inhomojenite parametresinin artan değerleri için tabakalar arasındaki açılma miktarı artmakta boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değeri

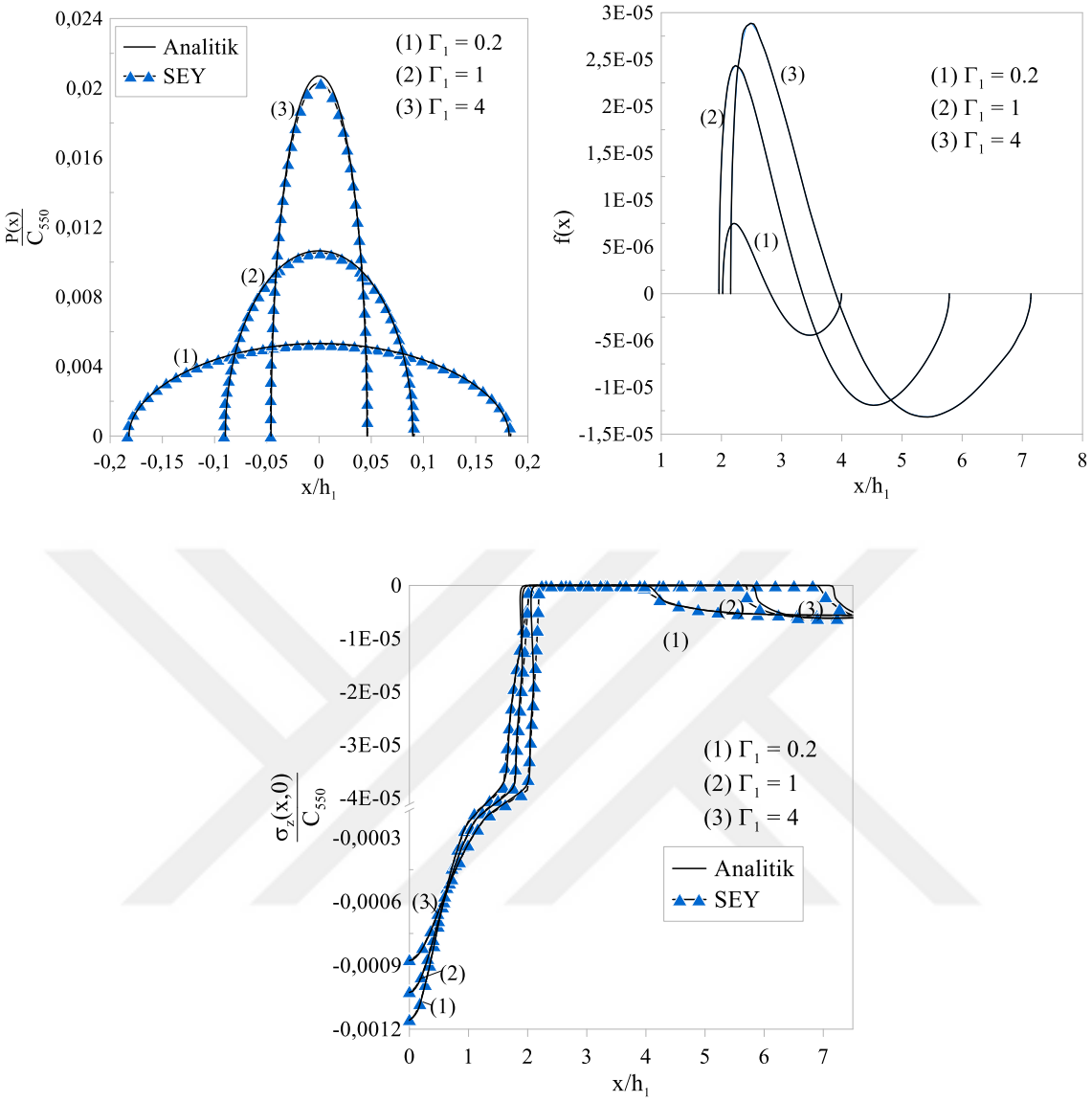
azalmaktadır. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.



Şekil 16.a Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi (Analitik yöntem) ($P^* = 0.8x10^{-3}$, $\Gamma_2 = 1.5$)



Şekil 16.b Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 1x10^{-3}$, $\Gamma_2 = 3$)



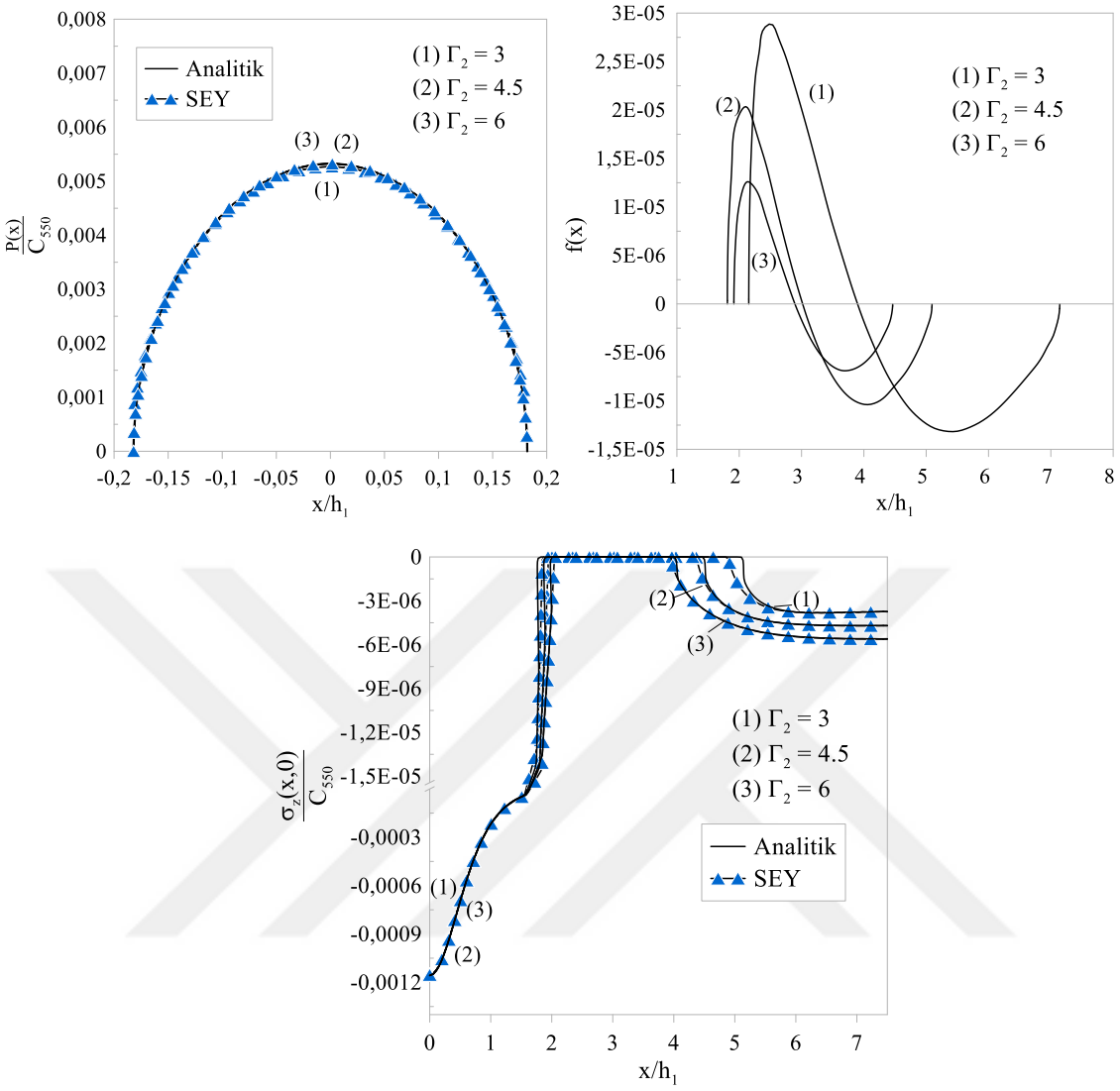
Şekil 16.c Süreksiz temas durumu için Γ_1 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 1.5x10^{-3}$ $\Gamma_2 = 6$)

Şekil 17'de süreksiz temas durumu için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine, tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Γ_2 inhomojenite parametresinin değerinin artmasıyla tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmakta, panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve boyutsuz

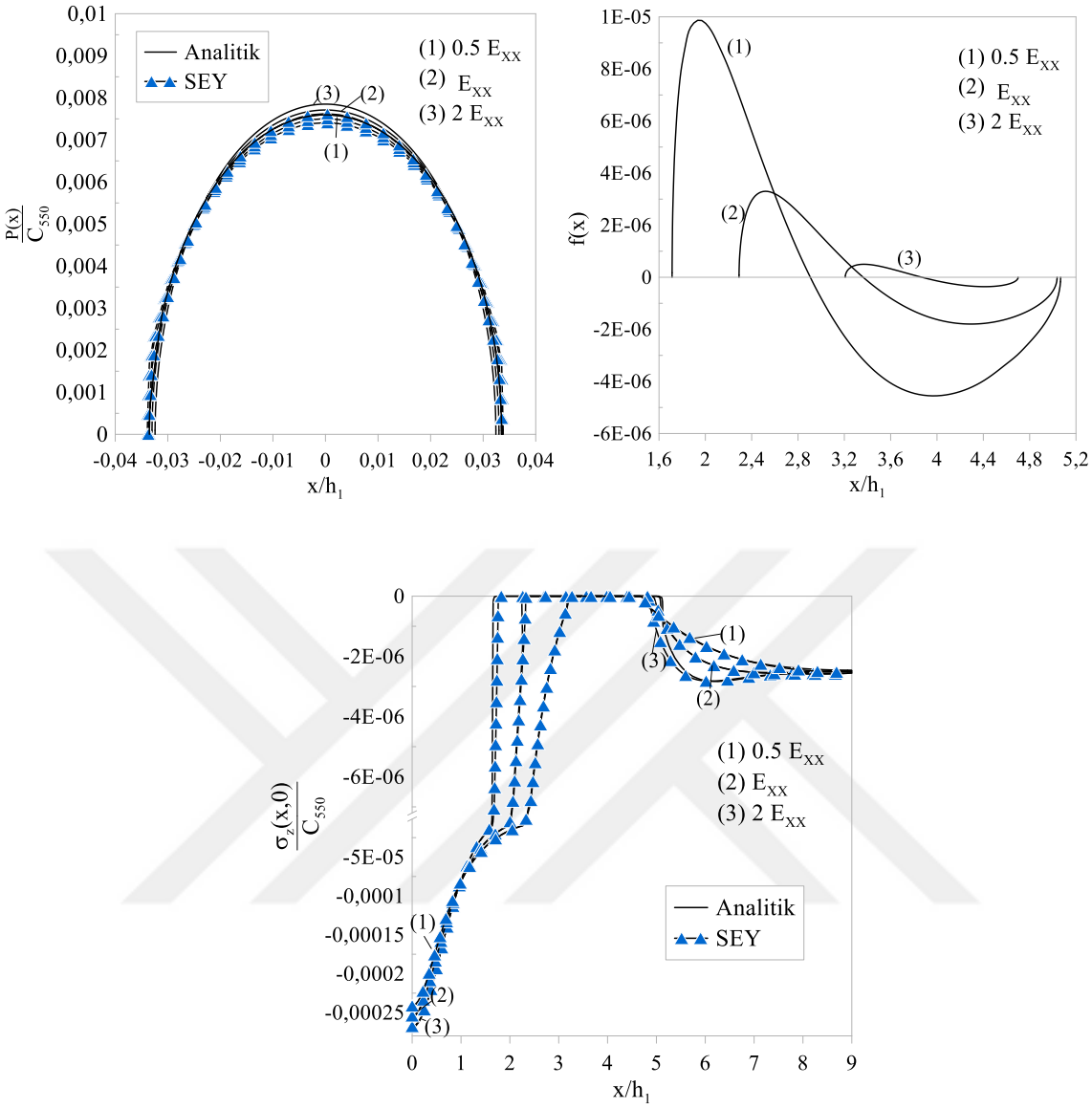
temas uzunlukları, tabakalar arasındaki σ_z normal gerilmelerinin simetri eksenindeki değeri pek değişmemektedir. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.

Şekil 18'de süreksiz temas durumu için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün artmasıyla tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmaktadır. Panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları pek değişmemekle beraber bir miktar azalmaktadır. Bununla orantılı olarak panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değerleri bir miktar artmaktadır. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.

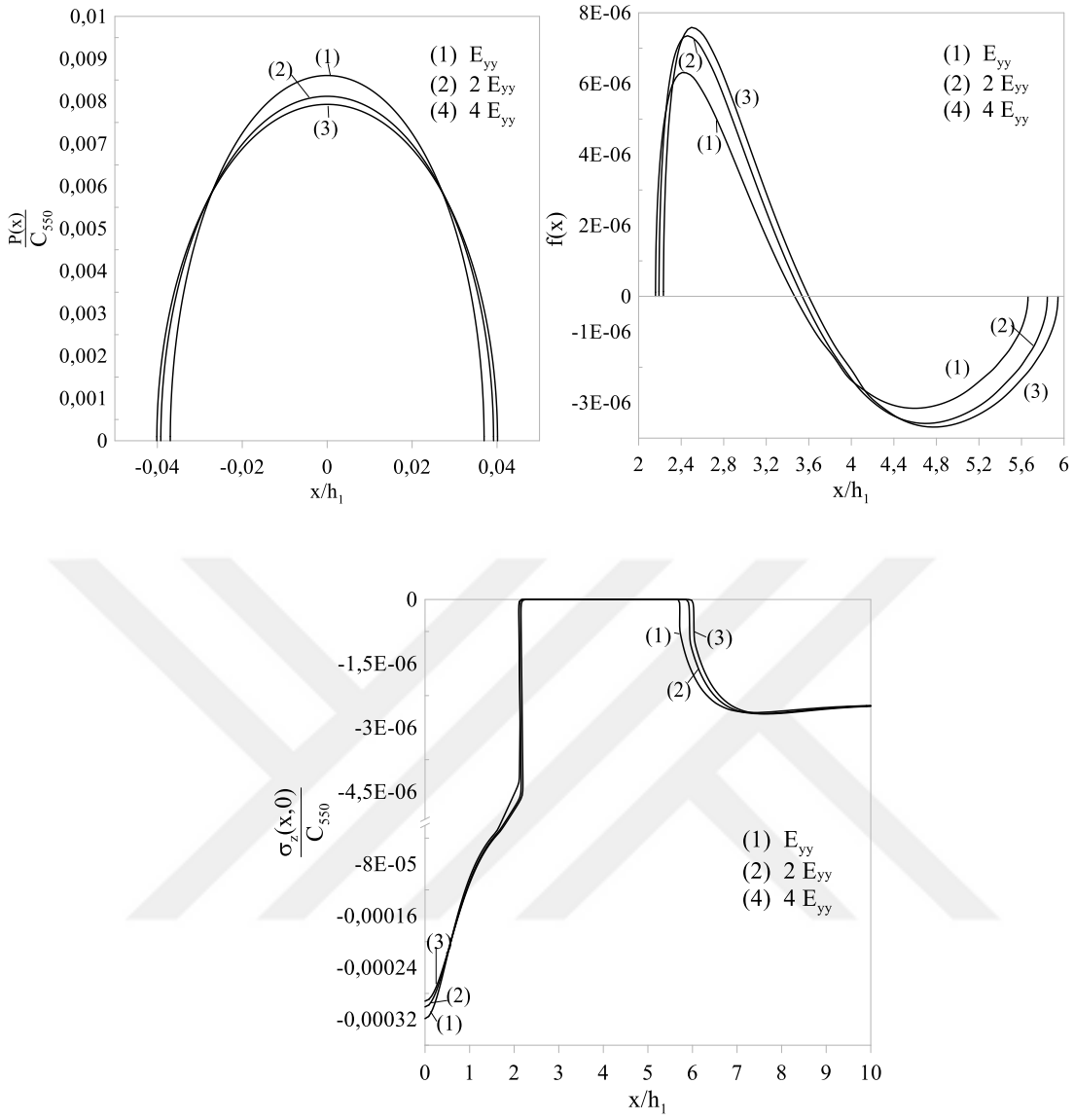
Şekil 19'da süreksiz temas durumu için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değerinin artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları bir miktar artmaktadır. Bununla orantılı olarak panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değerleri azalmaktadır. E_{yy} y yönündeki elastisite modülünün artan değerleri için tabakalar arasındaki açılmanın miktarı artmaktadır.



Şekil 17. Süreksiz temas durumu için Γ_2 inhomojenite parametresinin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 1.5x10^{-3}, \Gamma_1 = 4$)



Şekil 18. Süreksiz temas durumu için E_{xx} ortotrop tabakanın x yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi .(Analitik yöntem) ($P^* = 0.4x10^{-3}$)

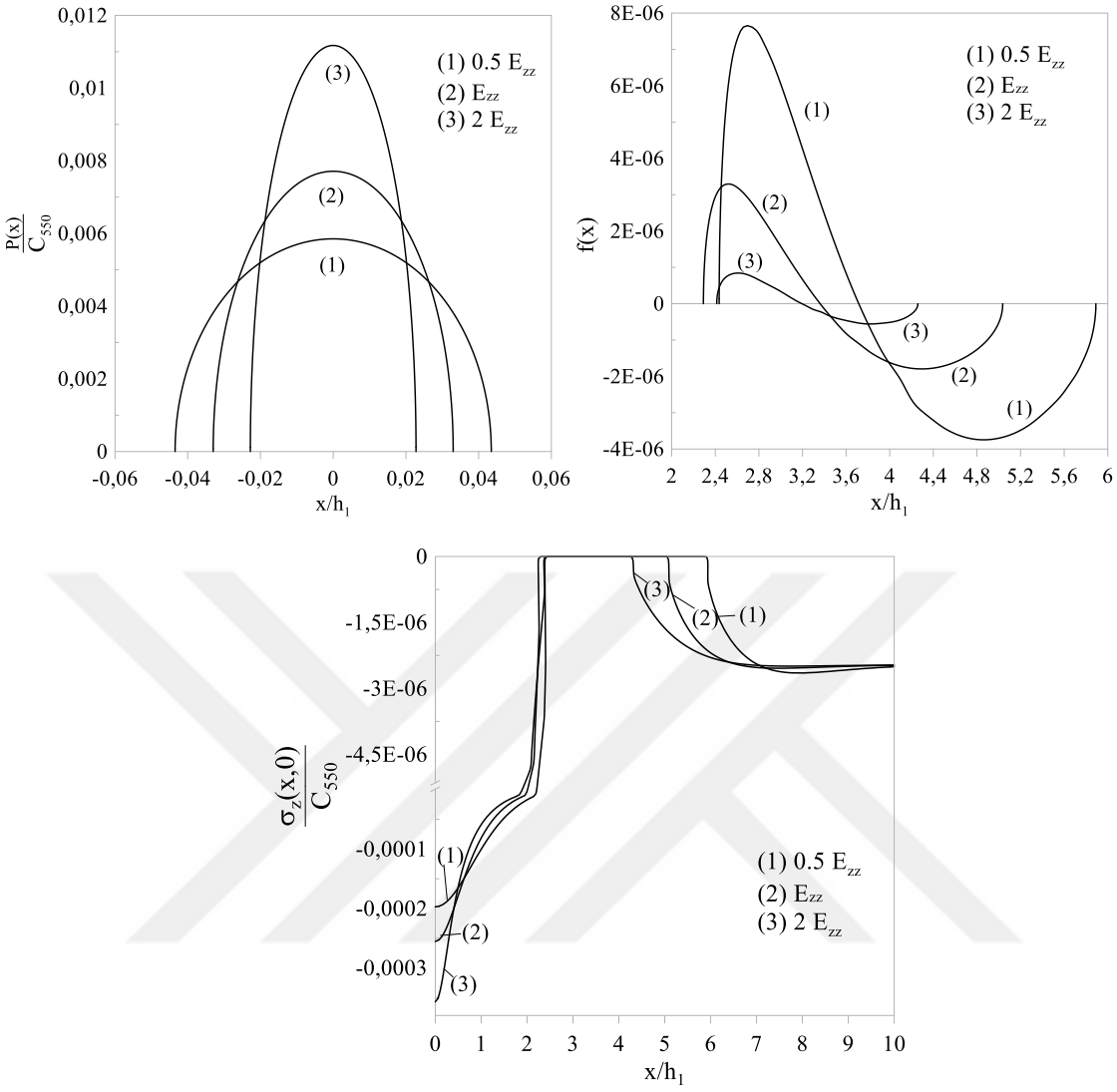


Şekil 19. Süreksiz temas durumu için E_{yy} ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.5x10^{-3}$)

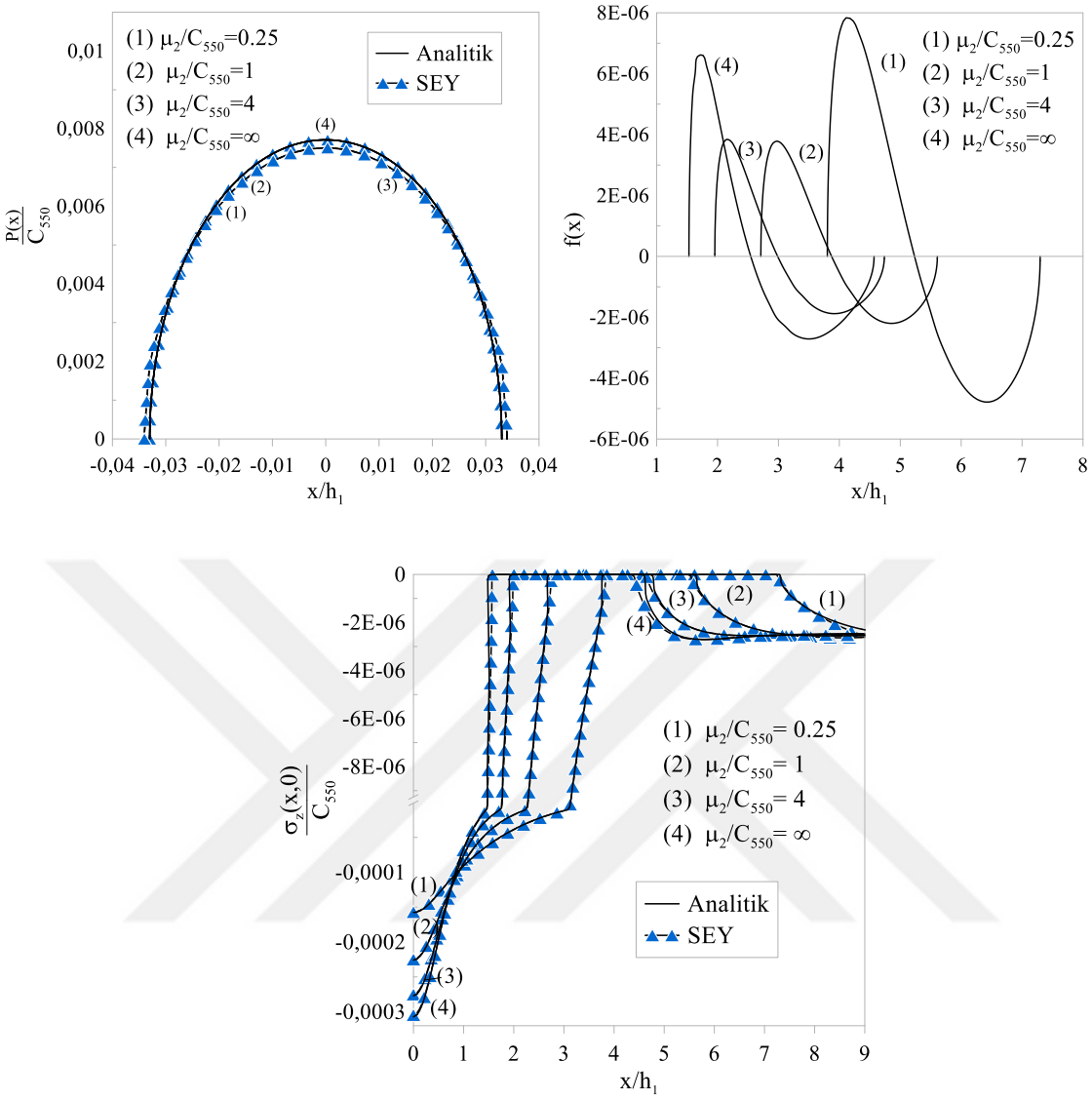
Şekil 20'de süreksiz temas durumu için E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem kullanılarak incelenmiştir. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları azalmakta bununla orantılı olarak boyutsuz temas gerilmelerinin değerleri artmaktadır. E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün artan değerleri için tabakalar arası açılma miktarı azalmaktadır. Ayrıca boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değerleri artmaktadır.

Şekil 21'de süreksiz temas durumu için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değerlerinin artmasıyla tabakalar arasındaki açılma miktarı azalmakta, tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değerleri artmaktadır. Panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve boyutsuz temas uzunlukları μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminden pek etkilenmemektedir. μ_2 / C_{550} değerinin sonsuz olması durumu yaklaşık olarak rijit düzlem üzerine oturan ortotrop tek tabaka durumuna karşılık gelmektedir. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.

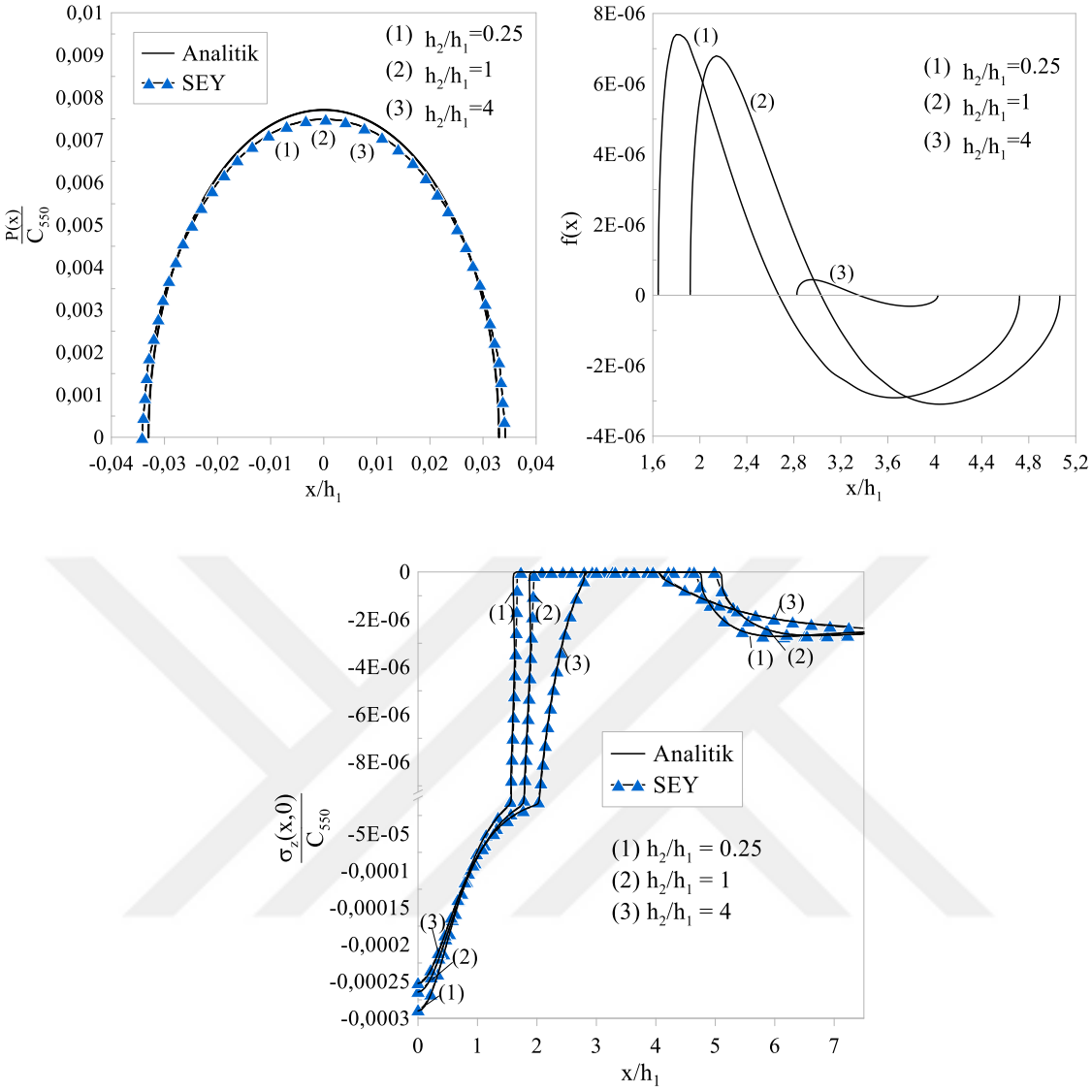
Şekil 22'de süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranı değişiminin değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. h_2 / h_1 yükseklik oranının artan değeri için tabakalar arasındaki açılma miktarı ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin simetri ekseni üzerindeki değerleri azalmaktadır. Panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri ve boyutsuz temas uzunlukları pek değişmemektedir. Ayrıca her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.



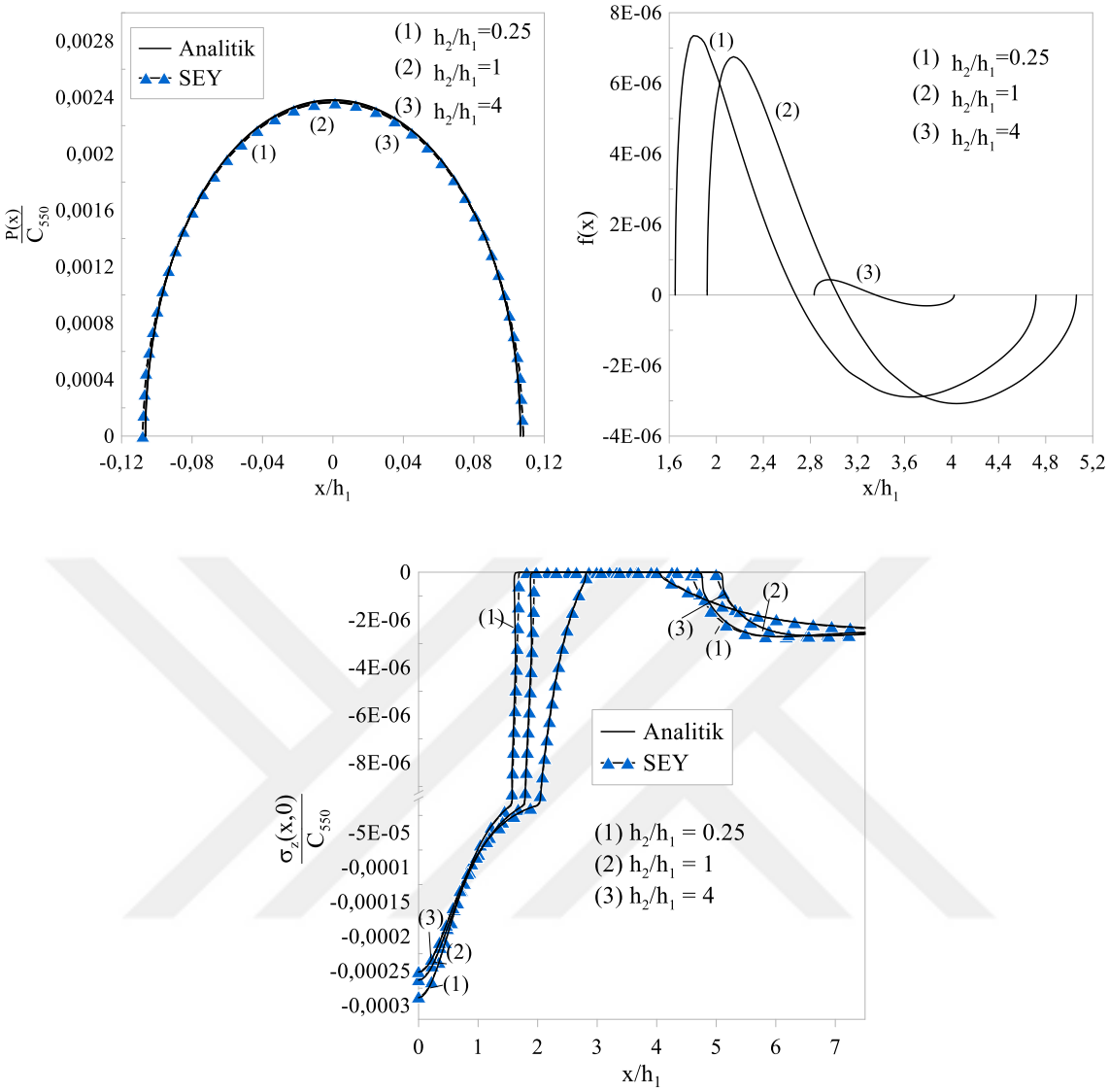
Şekil 20. Süreksiz temas durumu için E_{zz} ortotrop tabakanın z yönündeki elastisite modülünün değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem) ($P^* = 0.4x10^{-3}$)



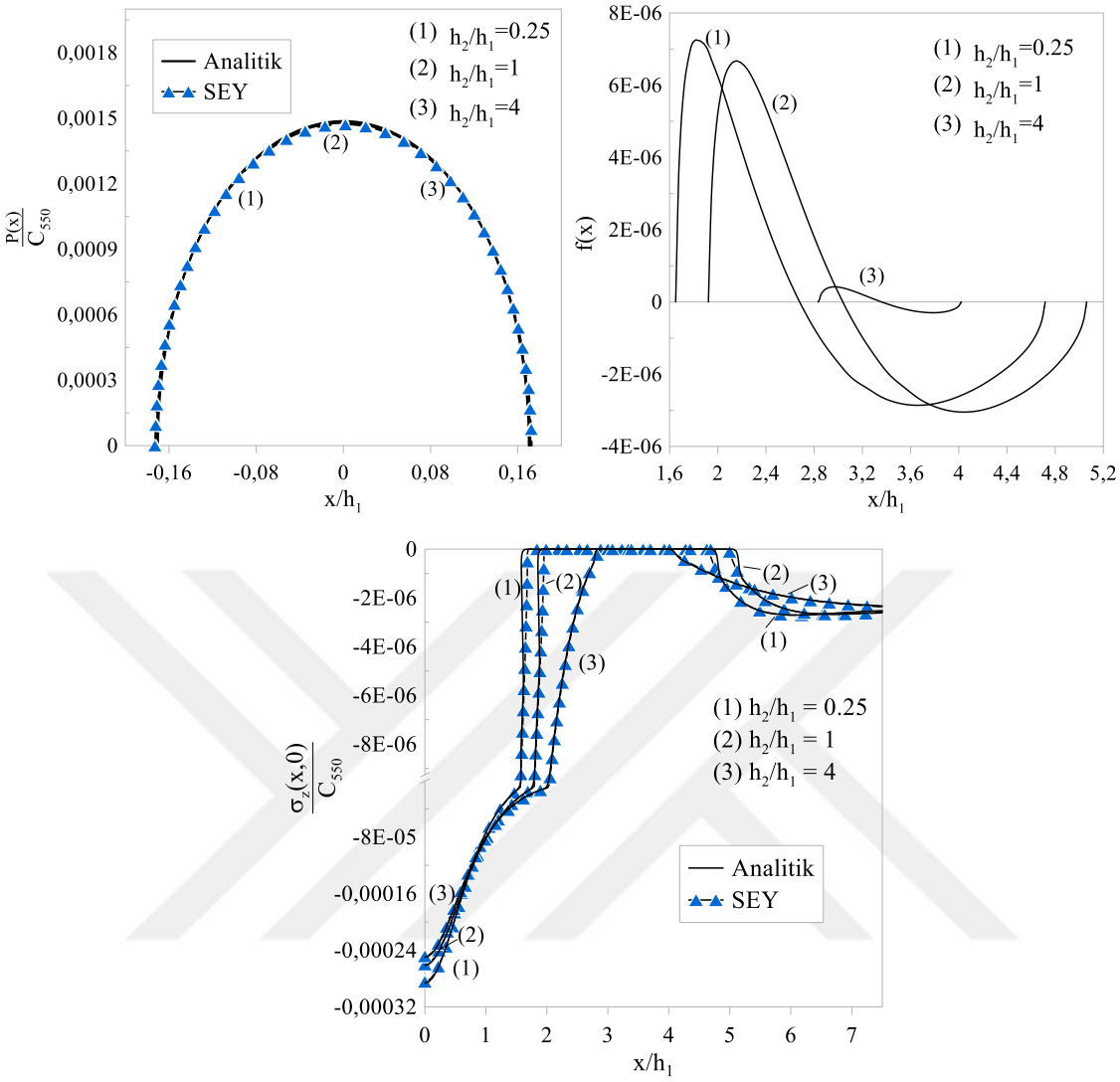
Şekil 21. Süreksiz temas durumu için μ_2 / C_{550} rijitlik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$)



Şekil 22.a Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$, $R/h = 10$)



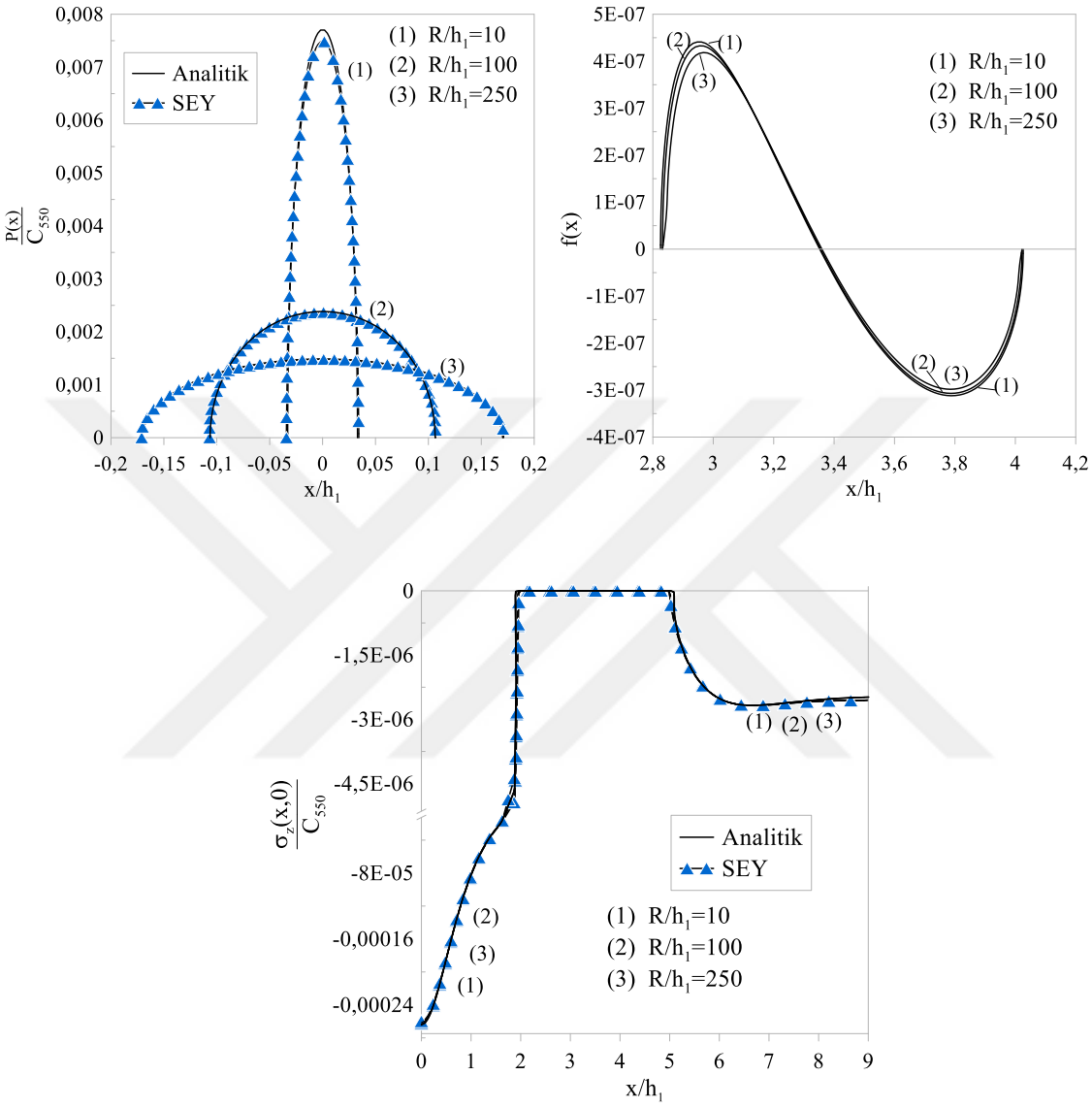
Şekil 22.b Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$, $R/h = 100$)



Şekil 22.c Süreksiz temas durumu için h_2 / h_1 yükseklik oranının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$, $R/h = 250$)

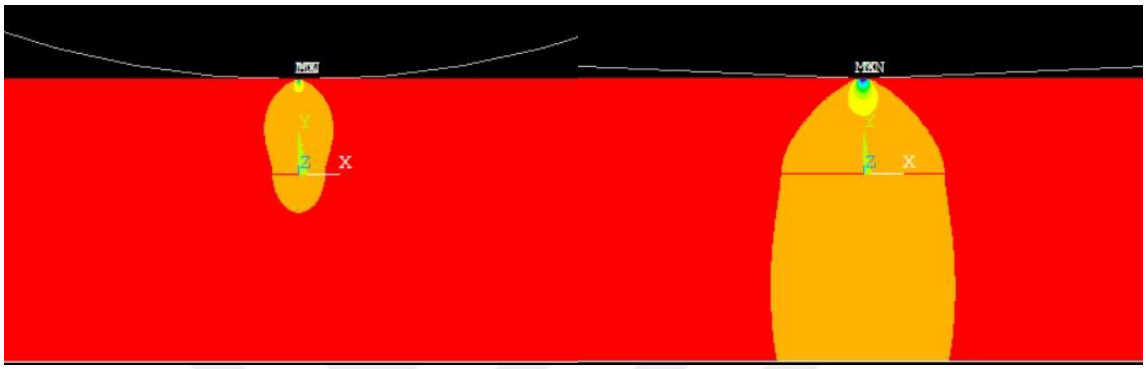
Şekil 23'de süreksiz temas durumu için boyutsuz R / h_1 panç yarıçapının değişiminin panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. R / h_1 değerlerinin artmasıyla panç altındaki boyutsuz temas uzunlukları artmakta, boyutsuz temas gerilmelerinin değerleri azalmaktadır. Tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerinin değerleri ve tabakalar arasındaki açılma miktarı R / h_1 değerlerinin değişiminden etkilenmemektedir. Ayrıca her iki

yöntemden elde edilen sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir oranda olduğu görülmektedir.

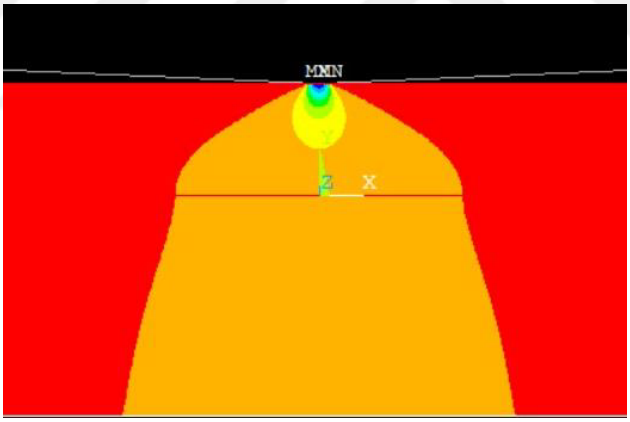


Şekil 23. Süreksiz temas durumu için boyutsuz R/h panç yarıçapının panç altındaki temas gerilmelerine tabakalar arasındaki açılma miktarına ve tabakalar arasındaki boyutsuz σ_z normal gerilmelerine olan etkisi. (Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçların karşılaştırılması) ($P^* = 0.4x10^{-3}$ $h_2 / h_1 = 0.25$)

Şekil 24'te R/h_1 panç yarıçapı oranın değişimin σ_z boyutsuz normal gerilmelerine olan etkisi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. R/h_1 panç yarıçapı oranının artmasıyla gerilmeler daha büyük bir alana yayılırken, σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin maksimum değeri azalmaktadır.



a) $R/h_1 = 10$ b) $R/h_1 = 100$



c) $R/h_1 = 200$



Şekil 24. R/h_1 panç yarıçapı oranın değişimin σ_z boyutsuz normal gerilmelerine olan etkisi. (Sonlu Elemanlar Yöntemi) ($P^* = 0.4x10^{-3}, \Gamma_1 = 4,\ \Gamma_2 = 1.5$)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada; rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş, rijit düzleme bağlı elastik tabaka ve ortotrop fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemi analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak ayrı ayrı incelenmiş ve her iki yöntemden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Problemin çözümünde bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiş olup, kütle kuvvetlerinin etkisi dikkate alınmıştır. İlk olarak problemin sürekli haline ilişkin çözüm gerçekleştirilmiştir. Söz konusu hale ilişkin çözüm sonucunda sürekli temasta sınır durum için kritik yük ve ilk ayrılma uzaklıkları ve bu durumda panç altında oluşan boyutsuz temas gerilmeleri ve tabakalar arasında oluşan σ_z boyutsuz gerilmelerine ait sonuçlar elde edilmiştir. Problemin sürekli temasına ilişkin çözümün ardından süreksiz temas haline ilişkin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu hale ilişkin çözümün sonucunda ise; panç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri, tabakalar arasındaki σ_z boyutsuz gerilmeleri, tabakalar arasındaki açılma mesafelerine ait sonuçlar elde edilmiştir. Sürekli ve süreksiz temas hallerine ilişkin çözüm sonucunda elde edilen gerilme, ilk ayrılma yükü, ilk ayrılma uzaklığı, açılma mesafelerinin; Γ_1, Γ_2 inhomojenite parametreleri, E_{xx}, E_{yy}, E_{zz} elastisite modülü değişimleri, ρ_2/ρ_{10}, $\rho_{10}g/C_{550}$ yoğunluk oranları, h_2/h_1 tabaka yükseklik oranı, R/h_1 panç yarıçapı değişimi, yük faktörü ve ortotrop malzeme cinsi değişiminin irdelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Sürekli temas halinde tabakalar arasındaki temas bölgesinde iki bölge ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi dış yükün etkisinin büyük olduğu $(x < x_{cr})$, diğeri ise dış yükün etkisinin azalarak kaybolduğu $(x > x_{cr})$ temas bölgesidir. Dış yükün etkisinin görüldüğü temas bölgesinde $(x < x_{cr})$, temas gerilmeleri maksimum değerini y simetri ekseninde almaktadır, dış yükün etkisinin kaybolduğu temas bölgesinde ise temas gerilmelerinde kütle kuvvetlerinin etkisi görülmektedir.
- Problemin süreksiz temasına ilişkin durumda dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesi, ayrılma bölgesi ve dış yükün etkisinin giderek azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesi olmak üzere üç bölge oluşmaktadır. Dış yükün etkisinin büyük olduğu sürekli temas bölgesinde temas gerilmeleri maksimum değerini z simetri ekseni üzerinde almaktadır. Ayrılma bölgesinde temas gerilmeleri sıfır olmakta ve dış yükün etkisinin

giderek azalarak kaybolduğu sürekli temas bölgesinde yalnızca kütle kuvvetlerinin etkisi görülmektedir.

- Yük artıkça gerilme değerleri, panç altındaki yarı temas uzunlukları ve tabakalar arası ayrılma bölgesinin büyüklüğü artmaktadır.
- Tabakalar arası ayrılma bölgesinin büyüklüğü üzerine fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın inhomojenite parametrelerinin ve elastisite modülü değerlerinin değişimi, tabakalarının yükseklik ve rijitlik oranları etkili olmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın rijitlik ve yoğunluk değerlerinin değişim fonksiyonu tabakanın alt yüzeyinden itibaren eksponansiyel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametreleri sırasıyla ortotrop tabakanın üst yüzeyinin rijitlik ve yoğunluk değerlerinin, alt yüzeyinin rijitlik ve yoğunluk değerlerine oranlarını temsil etmektedir. Γ_1 inhomojenite parametresinin artmasıyla, tabakalar arası ayrılma bölgesinin büyüklüğü artmaktadır. Γ_2 inhomojenite parametresinin artmasıyla ise tabakalar arası ayrılma bölgesinin büyüklüğü azalmaktadır. E_{xx} ve E_{zz} fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sırasıyla x ve z yönündeki elastisite modülü değerleri arttıkça tabakalar arasındaki ayrılma bölgesinin büyüklüğü azalmaktadır. E_{yy}, fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın y yönündeki elastisite modülünün değişimi ise tabakalar arası ayrılma bölgesinin büyüklüğünü etkilememektedir. Homojen izotrop tabakanın kalınlığının ve rijitliğinin, fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakaya oranla artması tabakalar arası ayrılma bölgesinin küçülmesine neden olmaktadır.
- Tabakalar arasındaki ilk ayrılma için gerekli kritik yük üzerine Γ_1 ve Γ_2 inhomojenite parametreleri, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın elastisite modülleri, homojen izotrop tabakanın kalınlığının ve rijitliğinin fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakaya oranla değişimleri, fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın alt yüzeyinin ağırlık/rijitlik oranının değişimi etkili olmaktadır. Ortotrop tabakanın üst yüzeyinin rijitliğinin alt yüzeyine oranının ve homojen izotrop tabakanın rijitliğinin fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın alt yüzeyine oranının artışları ilk ayrılma için gerekli kritik yükün artmasına neden olmaktadır. Ortotrop tabakanın üst

yüzeyinin ağırlığının alt yüzeyine oranının, E_{xx} ve E_{zz} fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın x ve z yönündeki elastisite modülü değerlerinin, homojen izotrop tabakanın kalınlığının fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın kalınlığına oranının ve fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın alt yüzeyinin ağırlık/rijitlik oranının artması tabakalar arası ilk ayrılma için gerekli kritik yük artmasına neden olmaktadır.

- Sürekli temas durumu için kritik yükleme durumunda tabakalar arasında ($x=0$)'da σ_z boyutsuz normal gerilmelerinin sıfır olduğu şartı sağlayan x değerine ilk ayrılma uzaklığı denir. Uygulanan yükün artmasıyla açılmalar bu noktadan itibaren başlamaktadır. Γ_1, inhomojenite parametresinin, ortotrop tabakanın E_{xx} x yönündeki elastisite modülü, homojen izotrop tabakanın kalınlığının fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın kalınlığına oranının artmasıyla; tabakalar arası ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. Ortotrop tabakanın E_{zz} z yönündeki elastisite modülü ve homojen izotrop tabakanın rijitliğinin ortotrop tabakanın alt yüzeyine oranla rijitliğinin artışı tabakalar arası ilk ayrılma uzaklıklarında artışa neden olurken; panç yarıçapının değişimi ve Γ_2 inhomojenite parametrenin değişiminin ilk ayrılma uzaklıkları üzerine herhangi bir etkisinin olmadığı sonucu elde edilmiştir.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın tasarımında beş gerçek ortotrop malzeme kullanılmış ve malzeme türünün sonuçlar üzerine olan etkisi irdelenmiştir. İlk ayrılma için gerekli kritik yükün malzeme rijitliğiyle beraber artmış ve en büyük değeri E malzemesinde almıştır. Panç altındaki yarı değme uzunlukları yükün uygulandığı eksen olan z yönündeki ortotrop tabakanın elastisite modülünün (E_{zz}) artmasıyla azalmaktadır. Tabakalar arası açılma miktarları en büyük değeri A malzemesinde almakta ve panç altındaki yer değiştirme ve malzeme rijitliklerine bağlı olarak değişmektedir.
- Analitik yöntemden elde edilen sonuçlar Çömez (2019) [39] ile karşılaştırıldığında sonuçların oldukça yakın ve kabul edilebilir düzeyde olduğu görülmektedir.
- Bu çalışmada ayrıca problemin sonlu elemanlar çözümü analitik çözümde kullanılan oranlar esas alınarak yapılmıştır. Birbirinden çok ayrı iki yöntemden elde edilen sonuçların karşılaştırılmasıyla sonuçların doğruluğunun teyit edilmesi amaçlanmıştır.

ANSYS programında fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin tanımlanması için hazır makrolar bulunmamaktadır. Bu nedenle fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop malzeme özelliklerinin tanımlanması ve doğru şekilde elemanlara atanması için, APDL kodları kullanılarak alt programlar tanımlanmıştır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Böylece matematiksel çözümün uzun ve karmaşık matematiksel terimlerinin yerine çok daha kısa sürede çözüm alınabilen, çeşitli geometrilere rahatlıkla uygulanabilen sonlu elemanlar yönteminin alternatif bir çözüm olarak kullanılabileceği görülmüştür.

- Literatürde ortotrop tabakaların kütle kuvvetlerinin etkisi altında sürekli ve süreksiz temasına ilişkin herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma ile fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sürekli ve süreksiz temas durumu ele alınarak ortotropik malzeme özelliklerinin yanı sıra fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri değişiminin etkisini gösteren birçok sonuç elde edilmiştir. Kütle kuvvetlerinin etkisi altında, fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop malzeme özelliklerinin değişiminin malzemenin mekanik davranışına olan etkisinin simülasyonu yapılması; farklı kullanım alanlarında avantaj ve dezavantajlarının belirlenmesine ve daha iyi tasarım ve modellerin geliştirilmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sürekli ve süreksiz temasına ait mevcut bir çalışma olmadığından bu konuda literatüre katkı sağlanmaktadır.

5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlardan gelecekte yapılacak çalışmalara ışık tutması amacıyla aşağıdaki önerilerin dikkate alınması tavsiye edilmektedir.

- Problem fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop çift tabaka problemi olarak geliştirilebilir.
- Rijit blok profilinin dikdörtgen ve parabolik olması durumları incelenebilir.
- Ortotrop malzeme özelliklerinin anizotrop olması durumu incelenebilir.
- Rijit pançın hareketli olması durumu incelenebilir.
- Problem sürtünme etkilerinin dikkate alındığı hal durumu için incelenebilir.
- Problem yükü ileten bloğun elastik olması durumu için incelenebilir.
- Problem eksenel simetrik temas problemi olarak ele alınıp, problemin çözümü kutupsal koordinatlarda gerçekleştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abhilash, M. N. ve Murthy, H., Finite Element Analysis of 2D Elastic Contacts Involving FGMs, International Journal For Computational Methods In Engineering Science And Mechanics, 15,3 (2014) 253-257.

2. Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E. ve Yaylacı, A., A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and Two Homogeneous Quarter Planes, Acta Mechanica, 227 (2016) 1753-1766.

3. Adıyaman, G., Öner, E. ve Birinci, A., Continuous and Discontinuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on a Rigid Foundation, Acta Mechanica, 228 (2017) 3003-3017.

4. Adıyaman, G., Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerinin Genel Çözümü ve Bu Çözüme İlişkin Bir Bilgisayar Programı Geliştirilmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2019.

5. Arslan, O. ve Dağ, S., Contact Mechanics Problem Between an Orthotropic Graded Coating and a Rigid Punch of an Arbitrary Profile, International Journal of Mechanical Sciences, 135 (2018) 541-554.

6. Alinia, Y., Zakerhaghighi, H., Adibnazari, S. ve Güler, M. A., Rolling Contact Problem for an Orthotropic Medium, Acta Mechanica, 228 (2017) 447-464.

7. Alinia, Y., Hosseini-nasab, M. ve Güler, M. A., The Sliding Contact Problem for an Orthotropic Coating Bonded to an Isotropic Substrate, European Journal of Mechanics/A Solids, 70 (2018) 156-171.

8. Balcı, M. N., Yıldırım, B. ve Dağ, S., Analysis of Frictional Contacts with Heat Generation Considering Temperature Dependent Properties, International Journal of Mechanical Sciences, 101-102 (2015) 59-69.

9. Balcı, M. N., Dağ, S. ve Yıldırım, B., Subsurface Stresses in Graded Coatings Subjected to Frictional Contact with Heat Generation, Journal of Thermal Stresses, 40,4 (2016) 517-534.

10. Balcı, M. N. ve Dağ, S., Dynamic Frictional Contact Problems Involving Elastic Coatings, Tribology International, 124 (2018) 70-92.

11. Balcı, M. N. ve Dağ, S., Solution of the Dynamic Frictional Contact Problem Between a Functionally Graded Coating and a Moving Cylindrical Punch, International Journal of Solids and Structures, 161 (2019) 267-281.

12. Barber J. R. ve Ciavarella M., Contact mechanics, International Journal of Solids and Structures, 37 (2000) 29-43.

13. Batra, R. C. and Jiang, W., Analytical solution of the contact problem of a rigid intender and an anisotropic linear elastic layer, International Journal of Solids and Structures, 45, 22 (2008).

14. Benaissa, H., Benkhira, E-H., Fackar, R. ve Hachlaf, A., Quastatic Frictional Thermo-Piezoelectric Contact Problem, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42,4 (2020) 1292-1311.

15. Barik, S. P., Kanoria, M. ve Chaudhuri, P. K., Steady State Thermoelastic Contact Problem in a Functionally Graded Material, International Journal of Engineering Science, 46 (2008) 775-789.

16. Binienda, W. ve Pindera, M., Frictionless Contact of Layered Metal-matrix and Polymer-matrix Composite Half-planes, Composite Science and Technology, 50,1 (1994) 119-128.

17. Burlayenko, V. N., Altenbach, H., Sadowski, T., Dimitrova, S. D. ve Bhaskar, A., Modeling Functionally Graded Materials in Heat Transfer and Thermal Stress Analysis by Means of Graded Finite Elemants, Applied Mathematical Modeling, 45 (2017) 422-438.

18. Çakıroğlu, A. O., Çakıroğlu F. L., Continuous and Discontinuous Contact Problems For Strips on an Elastic Semi-İnfinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29,1 (1991) 99-111.

19. Çakıroğlu, F. L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127,2 (2001) 113-118.

20. Chaudhuri, P. K. ve Ray, S., Receding Contact Between an Orthotropic Layer and an Orthotropic Half-Space, Fifty Years of the Archives of Mechanics, 50, 4 (1998) 743-755.

21. Chen, P. ve Chen, S., Contact Behaviors of a Rigid Punch and a Homogeneous Half Space Coated with a Graded Layer, Acta Mechanica, 223 (2012) 563-577.

22. Chen, P., Chen, S. ve Peng, Z., Thermo-contact Mechanics of a Rigid Cylindrical Punch Sliding on a Finite Graded Layer, Acta Mechanica, 223 (2012) 2647-2665.

23. Chen, P. ve Chen, S., Thermo-mechanical Contact Behavior of a Finite Graded Layer Under a Sliding with Heat Generation, International Journal of Solids and Structures, 50 (2013) 1108-1119.

24. Chen, P., Chen, S. ve Peng, J., Frictioanal Contact of a Rigid Punch on an Arbitrarily Oriented Gradient Half-Plane, Acta Mechanica, 226 (2015) 4207-4221.

25. Choi, H. J. ve Paulino, G. H., Thermoelastic Contact Mechanics for a Flat Punch Sliding Over a Garaded Coating/Substrate System With Frictional Heat Generation, Journal of Mechanics and Pysics of Solids, 56 (2008) 1673-1692.

26. Choi, H. J., On the Plane Contact Problem of a Functionally Graded Elastic Layer Loaded by a Frictional Sliding Flat Punch, Journal of Mechanical Science and Technology, 23 (2009) 2703-2713.

27. Chidlow, S. J. ve Teodorescu, M., Sliding Contact Problems Involving Inhomogeneous Materials Comprising a Coating-Transition Layer-Substrate and a Rigid Punch, International Journal of Solids and Structures, 51 (2014) 1931-1945.

28. Civelek, M. B. ve Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, Journal of Applied Mechanics, 42, 1 (1975) 136-140.

29. Civelek, M.B., Erdoğan, F. ve Çakıroğlu, A.O., Interface Seperation for an Elastic Layer Loaded by a Rigid Stamp, International Journal of Engineering Science, 16 (1978) 669-679.

30. Çömez, İ., Rijit Dairesel Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2003.

31. Çömez, İ., Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

32. Çömez, İ. ve Erdöl, R., Frictional Contact Problem of a Rigid Stamp and an Elastic Layer Bonded to Homogeneous Substrate, Archive of Applied Mechanics, 83 (2013) 15-24.

33. Çömez, İ. (2015), Contact Problem For a Functionally Graded Layer Intended by a Moving Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 100 (2015) 339-344.

34. Çömez, İ., El-Borgi, S., Kahya, V. ve Erdöl, R., Receding Contact Problem for Two-Layer Functionally Graded Media Intended by a Rigid Punch, Acta Mechanica, 227 (2016) 2493-2504.

35. Çömez, İ. (2017), Frictional Moving Contact Problem for a Layer Intended by a Rigid Cylindrical Punch, Archive of Applied Mechanics, 87, 12 (2017) 1993-2002.

36. Çömez, İ. ve Güler, M. A., The Contact Problem of a Rigid Punch Sliding Over Functionally Graded Bilayer, Acta Mechanica, 228 (2017) 2237-2249.

37. Çömez, İ., Kahya, V. ve Erdöl, R., Plane Receding Contact Problem for a Functionally Graded Layer Supported by a Two Quarter Planes, Archives of Mechanics, 70 (2018) 485-504.

38. Çömez, İ. ve Yılmaz, K. B., Mechanics of Frictional Contact for an Arbitrary Oriented Orthotropic Material, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 99, 3 (2018) 18 syf.

39. Çömez, İ., Continuous and Discontinuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Pressed by a Rigid Cylindrical Punch, European Journal of Mechanics /A Solids, 73 (2019) 437-448.

40. Çömez, İ., On the Contact Problem of a Moving Rigid Cylindrical Punch Sliding Over an Orthotropic Layer Bonded to an Isotropic Half-Plane, Mathematics and Mechanics of Solids, 25, 10 (2020) 1924-1942.

41. Çömez, İ., Thermoelastic Receding Contact Problem of a Layer Resting on a Half Plane with Frictional Heat Generation, Journal of Thermal Stresses, 44, 5 (2021) 566-581.

42. Dağ, S., Yıldırım, B. ve Sarıkaya, D., Mixed-Mode Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Under Mechanical and Thermal Loads, International Journal of Solids and Structures, 44, 24 (2007) 7816-7840.

43. Dağ, S. ve İlhan, K. A., Mixed-Mode Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Material Coatings Using Analytical and Computational Methods, Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 75, 5 (2008) 9 syf.

44. El-Borgi, S., Abdelmaoula, R. ve Keer, L., A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006) 658-674.

45. El-Borgi, S., Usman, S. ve Güler, M. A., A Frictional Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 51 (2014) 4462-4476.

46. El-Borgi, S. Ve Çömez, İ., A receding Frictional Contact Problem Between A Graded Layer And A Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch, Mechanics of Materials, 114 (2017) 201-214.

47. Elloumi, R., El-Borgi, S., Güler, M. A. ve Kallel-Kamoun, I., The Contact Problem of a Rigid Stamp with Friction on a Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Half-Plane, Acta Mechanica, 227 (2016) 1123-1156.

48. Erbaş, B., Yusufoğlu, E. ve Kaplunov, J., A Plane Contact Problem For an Elastic Orthotropic Strip, Journal of Engineering Mathematics, 70 (2011) 399-409.

49. Erdoğan, F., Gupta, G. D. ve Cook, T. S., Numerical Solution of Singular Integral Equations, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, 1 (1973) 368-425.

50. Fischer-Cripps, A. C., Introduction to Contact Mechanics, Link, F. F., Second Edition, Fischer-Cripps Laboratories Pyt. Ltd., New South Wales, Australia, 2007.

51. Goryacheva, I. G., Contact Mechanics in Tribology, Gladwell, G. M. L., 61, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1998.

52. Güler, M. A. ve Erdoğan, F., Contact Mechanics of Graded Coatings, International Journal of Solids and Structures, 41 (2004) 3865-3889.

53. Güler, M. A. ve Erdoğan, F. (2007), The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49 (2007) 161-182.

54. Güler, M. A., Küçüksucu, A., Yılmaz, K. B. Ve Yıldırım, B., On the Analytical and Finite Element Solution of Plane Contact Problem of a Rigid Cylindrical Punch Sliding Over a Functionally Graded Orthotropic Medium, International Journal of Mechanical Sciences, 120 (2017) 12-29.

55. Hou, P. F., Zhang, W. H. ve Chen, Y.-J, Three Dimentional Exact Solutions Transversely Isotropic Coated Structures Under Spherical Contact, International Journal of Solids and Structures, 161 (2019) 136-173.

56. Jean, M. ve Moreau, J. J., Contact Mechanics, Raous, M., Springer Science+Business Media, New York, 1995.

57. Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., Frictionless Contact Problem Between Two Ortotropic Elastic Layers, International Journal of Civil, Enviromental, Structural, Construction and Architectural Engineering, 1, 1 (2007).

58. Kahya, V., Özşahin, T. Ş., Birinci, A. ve Erdöl, R., A receding Contact Problem For An Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44 (2007) 5695-5710.

59. Kaya, Y., Polat, A. ve Özşahin, T. Ş., Analytical and Finite Element Solutions of Continuous Contact Problem in Functionally Graded Layer, The European Pysical Journal Plus, 135,89 (2020).

60. Ke, L.-L. ve Wang, Y.-S., Two Dimentional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials, European Journal of Mechanics/A Solids, 26 (2007) 171-188.

61. Ke, L.-L., Yang, J., Kitipornchai, S. ve Wang, Y-S., Frictionless Contact Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Layered Half-Plane, Smart Materials and Structures, 17 (2008).

62. Ke, L-L., Wang, Y-S., Yang, J. ve Kitipornchai, S., Sliding Frictional Contact Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Layered Half-Plane, Acta Mechanica, 209 (2010) 249-268.

63. Kuo, C. H. ve Keer, L. M., Contact Stress Analysis of a Layered Transversely Isotrpic Half-Space, Journal of Tribology, 114 (1992) 253-261.

64. Küçüksucu, A., Güler, M. A. ve Avcı, A., Mechanics of Sliding Frictional Contact for a Graded Orthotropic Half Plane, Acta Mechanica, 226 (2015) 3333-3374.

65. Küçüksucu, A. ve Güler, M. A., Analytical Solution of The Frictional Contact Problem of A Semi-Circular Punch Sliding Over A Homogeneous Orthotropic Half-Plane, Hittite Journal of Science and Engineering, 3, 1 (2016) 61-72.

66. Lopes, J. P. ve Hills, D. A., The Axisymmetric Frictional Receding Contact of a Layer Pressed Against a Half-Space by a Point Force, International Journal of Solids and Structures, 171 (2019) 47-53.

67. Liu, J., Ke, L.-L. ve Wang, Y.-S., Two-Dimentional Thermoelastic Contact Problem of Functionally Graded Materials Involving Frictional Heating, International Journal of Solids and Structures, 48 (2011) 2536-2548.

68. Liu, J., Ke, L. ve Wang, Y., Thermoelastic Contact Analysis of Functionally Graded Materials with Properties Varying Exponentially, Advances Material Research, 189-193 (2011) 988-992.

69. Liu, J., Ke, L. ve Zhang, C., Axisymmetric Thermoelastic Contact of FGM-Coated Half Space Under a Rotating Punch, Acta Mechanica, 2021.

70. Ma, J., Ke, L.-L. ve Wang, Y.-S., Frictionless Contact of A Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Layered Half-Plane Under a Conducting Punch, International Journal of Solids and Structures, 51 (2014) 2791-2806.

71. Mao, J.-J., Ke, L.-L. ve Wang, Y.-S., Thermoelastic Contact Instability of a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Half-Plane, International Journal of Solids and Structures, 51 (2014) 3962-3972.

72. Mao, J.-J., Ke, L.-L. ve Wang, Y.-S., Thermoelastic Instability of a Functionally Graded Layer interacting with a Homogeneous Layer, International Journal of Mechanical Sciences, 99 (2015) 218-227.

73. Patra, R. C. ve Jiang, W., Analytical Solution of The Contact Problem of A Rigid Intender and an Anisotropic Linear Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 45 (2008) 5814-5830.

74. Patra, R., Barik, S. P. ve Chaudhuri, P. K., Frictionless Contact of a Rigid Punch Intending a Transversely Isotropic Elastic Layer, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 3, 3 (2016) 100-111.

75. Patra, R., Barik, S. P. ve Chaudhuri, P. K., Frictionless Contact Between a Rigid Intender and a Transversely Isotropic Functionally Graded Layer, International Journal of Applied Mechanics and Engineering, 23, 3 (2018) 655-671.

76. Polat, A., Kaya, Y. ve Özşahin, T. S., Analytical Solution to Continuous Contact Problem For A Functionally Graded Layer Loaded Through Two Dissimilar Rigid Punches, Meccanica, 53 (2018) 3565-3577.

77. Rhimi, M., El-Borgi, S., Ben Said, W. ve Ben Jemaa, F., A Receding Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 46 (2009) 3633-3642.

78. Rhimi, M., El-Borgi, S. ve Lajnef, N., A Double Receding Contact Axisymmetric Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, Mechanics of Materials, 43 (2011) 787-798.

79. Özsahin, T. S. ve Taskıner, O., Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Three Rigid Flat Punches, Mathematical Problems in Engineering, 2013 (2013) 14 syf.

80. Öner, E., Yaylacı, M. ve Birinci, A., Analytical Solution of a Contact Problem and Comparison with the Results from FEM, Structural Engineering and Mechanics, 54,4 (2015) 607-622.

81. Öner, E., Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2017.

82. Öner, E., Adıyaman, G. ve Birinci, A., Continuous Contact Problem of a Functionally Graded Layer Resting on an Elastic Half-Plane, Archives of Mechanics, 69,1 (2017) 53-73.

83. Santare, M. H. ve Lambros, J., Use od Graded Finite Elements to Model the Behavior of NonHomogeneous Materials, Journal of Applied Mechanics, 67,4 (2000) 819-822.

84. Song, H.-X., Ke, L.-L., Su, J., Yang, J., Kitipornchai, S. ve Wang, Y.-S., Surface Effect on the Contact Problem of a Piezo-electric Half-Plane, International Journal of Solids and Structures, 185-186 (2020) 380-393.

85. Su, J., Ke, L-L. ve Wang, Y-S., Axisymmetric Frictionless Contact of a Functionally Graded Piezoelectric Layered Half-Space Under a Conducting Punch, International Journal of Solids and Structures, 90 (2016) 45-59.

86. Su, J., Ke, L-L., El-Borgi, S., Xiang, Y. ve Wang, Y-S., An Effective Method for the Sliding Frictional Contact of a Conducting Cylindrical Punch on FGPMs, International Journal of Solids and Structures, 141-142 (2018) 127-136.

87. Wang, T., Ma, X., Wang, L., Gu, L., Yin, L., Zhang, J., Zhan, L. ve Sun, D., Three-Dimentional Thermoelastic Contact Model of Coated Solids with Frictional Heat Partition Considered, Coatings, 8, 12 (2018).

88. Wriggers, P., Computational Contact Mechanics, Second Edition, Springer Science+Business Media, Netherlands, 2006.

89. Yan, J. ve Ke, L.-L., Two-Dimentional Contact Problem for a Coating-Graded, Layer-Substrate Structure Under a Rigid Cylindrical Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 50 (2008) 985-994.

90. Yan, J. ve Li, X., Double Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and an Elastic Layer, European Journal of Mechanics/A Solids, 53 (2015) 143-150.

91. Yan, J. ve Mi, C., On the Receding Contact Between an Inhomogeneously Coated Elastic Layer and Homogeneous Half-Plane, Mechanics of Materials, 112 (2017) 18-27.

92. Yan, J., Mi, C. ve Liu, Z., A Semianalytical and Finite-element Solution to Unbonded Contact Between a Frictionless Layer and an FGM-Coated Half-Plane, Mathematics and Mechanics of Solids, 24, 2 (2019) 448-464.

93. Yaylacı, M., Adıyaman, G., Öner, E. ve Birinci, A., Examination of Analytical and Finite Element Solutions Regarding Contact of a Functionally Graded Layer, Structural Engineering and Mechanics, 76, 3 (2020) 325-336.

94. Yaylacı, M., İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Temas Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013.

95. Yaylacı, M., Adıyaman, G., Öner, E. ve Birinci, A., Investigation of Continuous and Discontinuous Contact Cases in the Contact Mechanics of Graded Materials Using Analytical Method and FEM, Computers and Concrete, 27,3 (2021) 199-210.

96. Yaylacı, M., Eyüboğlu, A., Adıyaman, G., Yaylacı, E. U., Öner, E. ve Birinci, A., Assessment of Different Solution Methods for Receding Contact Problems in Functionally Graded Layered Mediums, Mechanics of Materials, 154 (2021).

97. Yıldırım, B., Dağ, S. ve Erdoğan, F., Three Dimesional Fracture Analysis of FGM Coatings Under Thermomechanical Loading, International Journal of Fracture, 132 (2005) 371-397.

98. Yıldırım, B., Yılmaz, K. B., Çömez, İ. ve Güler, M. A., Double Frictional Receding Contact Problem for an Orthotropic Layer Loaded by Normal and Tangential Forces, Meccanica, 54 (2019) 2183-2206.

99. Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Yıldırım, B., Güler, M. A. ve El-Borgi, S., Frictional Receding Contact Problem for a Graded Bilayer System Intended by a Rigid Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 141 (2018) 127-142.

100. Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Güler, M. A. ve Yıldırım, B., Analytical and Finite Element Solution of The Sliding Frictional Contact Problem for a Homogeneous Ortothropic Coating-isotropic Substrate System, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 99, 9 (2019) 17 syf.

101. Yılmaz, K. B., Çömez, İ., Güler, M. A. ve Yıldırım, B., Sliding Frictional Contact Analysis of a Monoclinic Coating/Isotropic Substrate System, Mechanics of Materials, 137 (2019).

102. Zhou, Y.- T. ve Lee, K. Y., Thermo-Electro-Mechanical Contact Behavior of a Finite Piezoelectric Layer Under a Sliding Punch with Frictional Heat Generation, Journal of The Mechanics and Physics of Solids, 59 (2011) 1037-1061.

103. Zhou, Y.- T. ve Lee, K. Y., Contact Problem For Magneto-Electro-Elastic Half-Plane Materials Intended by a Moving Punch. Part I. Closed Form Solutions, International Journal of Solids and Structures, 49 (2012) 3853-3865.

104. Zhou, Y.- T. ve Lee, K. Y., Contact Problem for Magneto-Electro-Elastic Half-Plane Materials Intended by a Moving Punch. Part II. Numerical Results, International Journal of Solids and Structures, 49 (2012) 3866-3882.

105. Zhou, Y.- T. ve Lee, K. Y., Frictional Contact of Anisotropic Piezoelectric Materials Intended By Flat and Semi-Parabolic Stamps, Archives of Applied Mechanics, 83 (2013) 73-95.

106. https://www.academia.edu/7033061/ANSYS_13_0_Introduction_to_contact, Introduction to Contact, 29 Haziran 2021.

107. https://dokumen.tips/documents/contact-update-ansys.html, Contact Update, 29 Haziran 2021.

108. https://www.cae.tntech.edu/~chriswilson/FEA/ANSYS/g_ctec90.pdf, Contact Technology Guide, 29 Haziran 2021.

109. https://web.itu.edu.tr/kimence/bolum1.pdf Malzeme Bilgisi, 27 Haziran 2021.

110. https://www.sciencedirect.com/topics/materials-science/transversely-isotropic-material, Transversely Isotropic Material, 27 Haziran 2021.

7. EK-1

$$M_1(\alpha) = -e^{-h_1\gamma}\alpha\left(-\left(b_2m_1 - b_1m_2\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_3 - b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4b_3\left(1+\kappa_2\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)\right.$$

$$-e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4\right)}\left(b_4m_3 - b_3m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_2m_1 - b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_2b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_3 - b_3m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_2m_1 + b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_2b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_4\right)}\left(b_4m_2 - b_2m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_3m_1 - b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_3b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_2 - b_2m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_3m_1 + b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_3b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$e^{h_1\left(-n_2+n_4\right)}\left(b_4m_1 - b_1m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_3m_2 - b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_3b_2\left(1+\kappa_2\right) - a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{h_1\left(-n_2+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_1 - b_1m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_3m_2 + b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_3b_2\left(1+\kappa_2\right) - a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_3\right)}\left(b_3m_2 - b_2m_3\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_1 - b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_2 - b_2m_3\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_1 + b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{h_1\left(-n_2+n_3\right)}\left(b_3m_1 - b_1m_3\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_2 - b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4b_2\left(1+\kappa_2\right) - a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$e^{h_1\left(-n_2+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_1 - b_1m_3\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_2 + b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4b_2\left(1+\kappa_2\right) - a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right) +$$

$$e^{-4h_2\alpha}\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_3+b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\alpha\left(a_2b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$a_1b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\Big)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_1+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\alpha\left(a_3b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_2+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\alpha\left(a_3b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_1+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\alpha\left(a_4b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_1{}^2hh^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$

$$4e^{h_1\left(-n_2+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\alpha\left(a_4b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)+$$

$$4e^{-2h_2\alpha}\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\alpha\left(a_4b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)\Big)\qquad\text{(EK1.1)}$$

$$\Delta_1\left(\alpha\right)=\left(a_2b_1-a_1b_2\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_2b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_2m_1+b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_2b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_3m_1+b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_3m_2+b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3\right)}\kappa_2\left(4\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_4m_1+b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3\right)}\kappa_2\left(4\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_4m_2+b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_2b_1-a_1b_2\right)e^{-4h_2\alpha}\kappa_2\left(4\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha-a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)+a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$4\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_2b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.a_1b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)+$$

$$4\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_3b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$

$$4\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_3b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$

$$4\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_4b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)+$$

$$4\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_4b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2\right)\right)-$$

$$4\left(a_2b_1-a_1b_2\right)e^{-2h_2\alpha}\alpha\left(a_4b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right) \qquad \text{(EK1.2)}$$

$$M_2\left(\alpha\right)=4e^{-h_1\gamma}\left(b_4e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_4\right)}\left(a_3b_2m_1-a_2b_3m_1-a_3b_1m_2+a_1b_3m_2+a_2b_1m_3-a_1b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2\right.$$

$$+b_4e^{h_1n_4-h_1\left(n_1+n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3b_2m_1-a_2b_3m_1-a_3b_1m_2+a_1b_3m_2+a_2b_1m_3\right.$$

$$\left.-a_1b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-b_3e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_3\right)}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+\right.$$

$$\left.a_1b_4m_2+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-$$

$$b_3e^{h_1n_3-h_1\left(n_1+n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+a_1b_4m_2+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2+$$

$$b_2 e^{-h_1 n_1}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 +$$

$$b_2 e^{-h_1\left(n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 -$$

$$b_4 e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_4+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3 b_2 m_1 - a_2 b_3 m_1 - a_3 b_1 m_2 + a_1 b_3 m_2 + a_2 b_1 m_3 - a_1 b_2 m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2\right.$$

$$\left.+\kappa_2{}^2\right) - b_3 e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_3+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_2 m_1 - a_2 b_4 m_1 -\right.$$

$$\left.a_4 b_1 m_2 + a_1 b_4 m_2 + a_2 b_1 m_4 - a_1 b_2 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)+$$

$$b_2 e^{-h_1\left(n_1+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)$$

$$\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_1{}^2+2\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right) -$$

$$b_1 e^{-h_1\left(n_2+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_2 - a_3 b_4 m_2 - a_4 b_2 m_3 + a_2 b_4 m_3 + a_3 b_2 m_4 - a_2 b_3 m_4\right)$$

$$\left.\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right) \qquad \text{(EK1.3)}$$

$$\Delta_2(\alpha) = \left(a_2 b_1 - a_1 b_2\right)\kappa_2\left(4\left(b_4 m_3 - b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_4 b_3\left(1+\kappa_2\right) - a_3 b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4 b_3 - a_3 b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_2 m_1 - b_1 m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_2 b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1 b_2\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$\left(a_4 b_3 - a_3 b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_2 m_1 + b_1 m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_2 b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1 b_2\left(1+\kappa_2\right)\right) -$$

$$\left(a_4 b_2 - a_2 b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_3 m_1 - b_1 m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha + a_3 b_1\left(1+\kappa_2\right) - a_1 b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_3m_1+b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4\right)}\kappa_2\left(4\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_3m_2+b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3\right)}\kappa_2\left(4\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_4m_1+b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3\right)}\kappa_2\left(4\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\kappa_2\left(4\left(-b_4m_2+b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$\left(a_2b_1-a_1b_2\right)e^{-4h_2\alpha}\kappa_2\left(4\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$4\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\ \left(a_2b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)\right)-a_1b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-$$

$$\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\Big)+$$

$$4\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_3b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$

$$4\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\ \left(a_3b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$

$$4\left(a_3b_2-a_2b_3\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_4b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$
$$\left.\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$
$$4\left(a_3b_1-a_1b_3\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\alpha\left(a_4b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$
$$\left.\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)-$$
$$4\left(a_2b_1-a_1b_2\right)e^{-2h_2\alpha}\alpha\left(a_4b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$
$$\left.\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right) \quad \text{(EK1.4)}$$

$$N_1\left(\alpha\right)=-e^{-h_1\gamma}\alpha\left(-\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\kappa_2\left(\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-\right.$$
$$e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4\right)}\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_2b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$
$$e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_2m_1+b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_2b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_2\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$
$$e^{h_1\left(-n_1+n_4\right)}\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$
$$e^{h_1\left(-n_1+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_3m_1+b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$
$$e^{h_1\left(-n_2+n_4\right)}\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\kappa_2\left(4\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$
$$e^{h_1\left(-n_2+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\kappa_2\left(4\left(-b_3m_2+b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_3b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$e^{h_1(-n_1+n_3)}\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_1+b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_1\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$e^{h_1(-n_2+n_3)}\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\kappa_2\left(4\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)-$$

$$e^{h_1\left(-n_2+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_2+b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$e^{-4h_2\alpha}\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\kappa_2\left(4\left(-b_4m_3+b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha+a_4b_3\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4\left(1+\kappa_2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\alpha\left(a_2\,b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.a_1b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4{h_2}^2\alpha^2+{\kappa_2}^2\right)\right)-$$

$$4e^{h_1\left(-n_1+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\alpha\left(a_3\,b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4{h_2}^2\alpha^2+{\kappa_2}^2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_2+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\alpha\left(a_3\,b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_3m_2-b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4{h_2}^2\alpha^2+{\kappa_2}^2\right)\right)+$$

$$4e^{h_1\left(-n_1+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_1-b_2m_3\right)\alpha\left(a_4\,b_1h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_1b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_1-b_1m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4{h_2}^2\alpha^2+{\kappa_2}^2\right)\right)-$$

$$4e^{h_1\left(-n_2+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(b_3m_1-b_1m_3\right)\alpha\left(a_4\,b_2h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_2b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_2-b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4{h_2}^2\alpha^2+{\kappa_2}^2\right)\right)+$$

$$4e^{2h_2\alpha}\left(b_2m_1-b_1m_2\right)\alpha\left(a_4\,b_3h_2\left(1+\kappa_2\right)-a_3b_4h_2\left(1+\kappa_2\right)-\right.$$

$$\left.\left(b_4m_3-b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\right)\right) \quad \text{(EK1.5)}$$

$$N_2\left(\alpha\right)=8\left(b_4\,e^{h_1n_3}\left(a_3b_2m_1-a_2b_3m_1-a_3b_1m_2+a_1b_3m_2+a_2b_1m_3-a_1b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2+\right.$$

$$b_4e^{h_1\left(n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3b_2m_1-a_2b_3m_1-a_3b_1m_2+a_1b_3m_2+a_2b_1m_3-a_1b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-$$

$$b_3e^{h_1n_4}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+a_1b_4m_2+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-$$

$$b_3e^{h_1\left(n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+a_1b_4m_2+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2+$$

$$b_2e^{h_1\left(-n_2+n_3+n_4\right)}\left(a_4b_3m_1-a_3b_4m_1-a_4b_1m_3+a_1b_4m_3+a_3b_1m_4-a_1b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2+$$

$$b_2e^{h_1\left(-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_3m_1-a_3b_4m_1-a_4b_1m_3+a_1b_4m_3+a_3b_1m_4-a_1b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-$$

$$b_1e^{h_1\left(-n_1+n_3+n_4\right)}\left(a_4b_3m_2-a_3b_4m_2-a_4b_2m_3+a_2b_4m_3+a_3b_2m_4-a_2b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2-$$

$$b_1e^{h_1\left(-n_1+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_3m_2-a_3b_4m_2-a_4b_2m_3+a_2b_4m_3+a_3b_2m_4-a_2b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2+$$

$$b_4e^{h_1\left(n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3b_2m_1-a_2b_3m_1-a_3b_1m_2+a_1b_3m_2+a_2b_1m_3-a_1b_2m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)-$$

$$b_3e^{h_1\left(n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+a_1b_4m_2+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)+$$

$$b_2 e^{h_1\left(-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right) -$$

$$b_1 e^{h_1\left(-n_1+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_2 - a_3 b_4 m_2 - a_4 b_2 m_3 + a_2 b_4 m_3 + a_3 b_2 m_4 - a_2 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\Big) \quad \text{(EK1.6)}$$

$$L_1(\alpha) = 4e^{-h_1\gamma}\Big(b_4 e^{-h_1(n_1+n_2-n_4)}\left(a_3 b_2 m_1 - a_2 b_3 m_1 - a_3 b_1 m_2 + a_1 b_3 m_2 + a_2 b_1 m_3 - a_1 b_2 m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 +$$

$$b_4 e^{h_1 n_4 - h_1\left(n_1+n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3 b_2 m_1 - a_2 b_3 m_1 - a_3 b_1 m_2 + a_1 b_3 m_2 + a_2 b_1 m_3 - a_1 b_2 m_3\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 -$$

$$b_3 e^{-h_1(n_1+n_2-n_3)}\left(a_4 b_2 m_1 - a_2 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_2 + a_1 b_4 m_2 + a_2 b_1 m_4 - a_1 b_2 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 -$$

$$b_3 e^{h_1 n_3 - h_1\left(n_1+n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_2 m_1 - a_2 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_2 + a_1 b_4 m_2 + a_2 b_1 m_4 - a_1 b_2 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 +$$

$$b_2 e^{-h_1 n_1}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 +$$

$$b_2 e^{-h_1\left(n_1+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_1 - a_3 b_4 m_1 - a_4 b_1 m_3 + a_1 b_4 m_3 + a_3 b_1 m_4 - a_1 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 -$$

$$b_1 e^{-h_1 n_2}\left(a_4 b_3 m_2 - a_3 b_4 m_2 - a_4 b_2 m_3 + a_2 b_4 m_3 + a_3 b_2 m_4 - a_2 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 -$$

$$b_1 e^{-h_1\left(n_2+4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4 b_3 m_2 - a_3 b_4 m_2 - a_4 b_2 m_3 + a_2 b_4 m_3 + a_3 b_2 m_4 - a_2 b_3 m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\kappa_2 +$$

$$b_4 e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_4+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_3 b_2 m_1 - a_2 b_3 m_1 - a_3 b_1 m_2 +\right.$$

$$a_1b_3m_2+a_2b_1m_3-a_1b_2m_3)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)$$

$$-b_3e^{-h_1\left(n_1+n_2-n_3+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_2m_1-a_2b_4m_1-a_4b_1m_2+a_1b_4m_2\right.$$

$$\left.+a_2b_1m_4-a_1b_2m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)$$

$$+b_2e^{-h_1\left(n_1+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_3m_1-a_3b_4m_1-a_4b_1m_3+a_1b_4m_3+a_3b_1m_4-a_1b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)$$

$$-b_1e^{-h_1\left(n_2+2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\left(a_4b_3m_2-a_3b_4m_2-a_4b_2m_3+a_2b_4m_3+a_3b_2m_4-a_2b_3m_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\alpha\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\Big)$$

(EK1.7)

$$L_2(\alpha)=8\Big(\left(a_2b_1-a_1b_2\right)\left(a_4b_3-a_3b_4\right)\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+\left(a_3b_2-a_2b_3\right)\left(a_4b_1-a_1b_4\right)$$

$$e^{h_1\left(-n_1+n_3\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2-\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2-$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+\left(a_2b_1-a_1b_2\right)\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{h_1\left(n_1-n_2+n_3+n_4\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+$$

$$\left(a_2b_1-a_1b_2\right)\left(a_4b_3-a_3b_4\right)e^{-4h_2\alpha}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+\left(a_3b_2-a_2b_3\right)\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2-$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_3-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2-$$

$$\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\left(a_4b_2-a_2b_4\right)e^{h_1\left(-n_1+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+$$

$$\left(a_3b_2-a_2b_3\right)\left(a_4b_1-a_1b_4\right)e^{h_1\left(-n_2+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+$$

$$(a_2b_1-a_1b_2)(a_4b_3-a_3b_4)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-4\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\kappa_2+$$

$$(a_2b_1-a_1b_2)(a_4b_3-a_3b_4)e^{-2h_2\alpha}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)+$$

$$(a_3b_2-a_2b_3)(a_4b_1-a_1b_4)e^{h_1\left(-n_1+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)-$$

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_4b_2-a_2b_4)e^{h_1\left(-n_2+n_3-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)-$$

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_4b_2-a_2b_4)e^{h_1\left(-n_1+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)+$$

$$(a_3b_2-a_2b_3)(a_4b_1-a_1b_4)e^{h_1\left(-n_2+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)+$$

$$(a_2b_1-a_1b_2)(a_4b_3-a_3b_4)e^{h_1\left(-n_1-n_2+n_3+n_4-2\frac{h_2}{h_1}\alpha\right)}\frac{\mu_2}{C_{550}}\left(1+4h_2{}^2\alpha^2+\kappa_2{}^2\right)\Bigg) \qquad \text{(EK1.8)}$$

ÖZGEÇMİŞ

İlköğrenimini Ordu Durugöl İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Ordu Fen Lisesi'nde tamamladı. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2017 yılı sonunda kurumdan istifa ederek Ordu ilinde serbest inşaat mühendisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı işi sürdürmekte olup iyi derecede İngilizce bilmektedir.