

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PERİYODİK KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE FLOQUET TEORİ
VE KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine TÜZENLİ

HAZİRAN 2025

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PERİYODİK KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE FLOQUET
TEORİ VE KARARLILIK

Emine TÜZENLİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 / 05 /2025

Tezin Savunma Tarihi : 03 / 06 /2025

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2025

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın başlangıcından itibaren engin bilgi ve tecrübesiyle yoluma ışık tutan, karşılaştığım her sorunda cesaretlendirip rehberlik eden, eğitim anlayışı ile örnek aldığım kıymetli hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN'a her aşamada beni destekleyip yardımını esirgemediği için teşekkür ederim.

Ayrıca tüm yüksek lisans serüvenim sırasında beni tez sürecine hazırlayan ve katkılarını esirgemeyen, başta Prof. Dr. Erhan COŞKUN olmak üzere derslerini aldığım tüm değerli hocalarıma minnettarlığımı sunarım.

Son olarak eğitim hayatım boyunca aldığım tüm kararlarda beni cesaretlendirerek desteklerini her daim hissettiren aileme teşekkür ederim.

Emine TÜZENLİ

Trabzon 2025

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Periyodik Katsayılı Diferansiyel Denklemlerde Floquet Teori Ve Kararlılık” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 03/06/2025

Emine TÜZENLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Lineer Denklem Sistemleri.....	3
1.3. Kararlılık Teorisi	12
1.4. Otonom ve Non-Otonom Sistemler	14
1.5. İkinci Mertebe Periyodik Katsayılı Denklemler.....	20
1.5.1. Floquet Teori Ve Kuadratik Denklem	20
1.5.2. Hill Denklemleri	26
1.5.3. Çözümlerin Periyodikliği ve Sınırlılık.....	34
1.6. Periyodik Katsayılı Lineer Sistemler	35
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	41
2.1. Bazı Değişken Katsayılı Denklemlere Floquet Teorisinin Uygulanması	41
2.2. Sarkaç Problemi ve Kararlılık	63
2.3. Floquet Teorinin Uygulanması.....	69
3. SONUÇLAR.....	74
4. ÖNERİLER	75
5. KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

PERİYODİK KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE FLOQUET TEORİ VE KARARLILIK

Emine TÜZENLİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2025, 76 Sayfa

Bu tez çalışması esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diferansiyel denklemlerle ilgili bazı temel kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde ise ikinci mertebeden periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin Floquet teorisiyle ilgili bazı sonuçlarına yer verilmiştir. Sistemler için benzer sonuçlar üçüncü bölümde yer almaktadır. Son bölümde ise değişken katsayılı bazı diferansiyel denklemlere Floquet teorisinin bazı sonuçları uygulanmıştır. Aynı zamanda, Floquet teoreminin bir uygulaması olarak sarkaç probleminin kararlılığı araştırılmıştır. Son olarak ikinci mertebeden periyodik katsayılı bir diferansiyel denklemin kararlılığı analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Periyodik çözümler, Kararlılık, Floquet teorisi

Master Thesis

SUMMARY

FLOQUET THEORY AND STABILITY FOR THE PERIODIC COEFFICIENT DIFERRENTIAL EQUATION

Emine TÜZENLİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2025, 76 Pages

This thesis mainly consists of four sections. In the first section, we review some basic notions and theorems related to ordinary differential equations. In section 2, we give some results of Floquet theory for a second order periodic differential equation. In section 3, similar results are given for the periodic coefficient systems. In the last section We apply some results of Floquet theory to some variable coefficient differential equations and systems. As an application of Floquet theorem, We also investigate the stability of the pendulum problem. Finally we analyze the stability of a second order differential equation.

Keywords: Periodic solutions, Stability, Floquet theory

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

λ	: Özdeğer
V	: Özvektör
D	: Diskriminant
ϕ	: Temel matris çözümü
ψ	: Esas matris çözümü
W	: Wronskian determinanı
ρ_k	: Karakteristik çarpanlar
m_k	: Floquet üsteller
P_k	: Periyodik çözümler
T	: Periyot

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Floquet teorisi, bayağı diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu alandaki ilk çalışmalardan bazıları 1883 de Gaston Floquet tarafından yapılmıştır. Genel olarak katsayıları periyodik olan lineer denklemler veya denklem sistemlerinin çözümlerini incelemektedir. Bazı kullanım alanları; sosyal bilimler, matematiksel biyoloji, fizik (sarkacın dairesel hareketi) gezegenlerin ve uyduların periyodik yörünge hareketi, dinamik sistemler olarak verilebilir. Dinamik sistemlerle ilgili çalışmalarda Mathieu denklemi önemli bir yere sahiptir. Ayrıca George William Hill tarafından çalışılan Hill denklemi periyodik bir kütle çekim alanında ayın hareketini yaklaşık olarak temsil etmektedir ve Hill denkleminin kararlılığı incelenerek önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmamızda periyodik katsayılı diferansiyel denklem ve sistemlerinin çözümleri incelenmiştir.

Öncelikle aşağıdaki temel kavramları ele alalım.

$I \subseteq \mathbb{R}$ ve $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir açık küme ve $F: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektör değerli bir fonksiyon olsun.

$$X' = F(t, X) \quad (1)$$

sistemini göz önüne alalım. Burada $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bir vektör ve

$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektör değerli fonksiyondur. Eğer F fonksiyonu t den bağımsız ise sisteme Otonom Sistem denir. Bu durumda $X' = F(X)$ şeklinde yazılır.

Eğer F fonksiyonu t bağımsız değişkenine bağlı ise sisteme Otonom Olmayan Sistem denir.

Genel olarak $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Başlangıç Değer Problemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.1: Bir vektör değerli fonksiyon $F: G \subseteq R \times R^n \rightarrow R^n$ sürekli olması onun her bir bileşeninin G de sürekli olması olarak tanımlanır.

Tanım 1.2: $F = F(t, X)$ bir vektör değerli fonksiyon olsun. $\forall t \in I \subseteq R$ için bir $K > 0$ sabit ve $\forall (t, X), (t, Y)$ için

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq K\|X - Y\|$$

olacak şekilde mevcutsa F fonksiyonu X 'e göre Lipschitz Özelliğini sağlar denir. K sabitine Lipschitz sabiti adı verilir.

Sonuç 1.1: $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ olmak üzere $\frac{df_i}{dx_j}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) $G \subseteq R \times R^n$ de mevcut ve sürekli ise F fonksiyonu Lipschitz özelliğini sağlar.

Örnek 1.1:

$$f(t, x) = t - x$$

olmak üzere;

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |t - x - (t - y)| \leq |y - x| = |x - y| \leq 1|x - y|. \quad (K = 1)$$

Teorem 1.1: F vektör değerli fonksiyonu $U = \{(t, x): |t - t_0| \leq q \text{ ve } \|x - x_0\| = r\}$ üzerinde tanımlı ve Lipschitz özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$X' = F(t, X)$$

$$X(t_0) = X_0$$

başlangıç değer problemi tek türlü çözüme sahiptir (Eastham, 1970).

Önerme 1.1: ϕ fonksiyonu $X' = F(t, X)$, $X(t_0) = X_0$ başlangıç değer probleminin

$I \subseteq R$ de bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds \quad (3)$$

integral denkleminin bir çözümü olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki ϕ başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. ϕ, I üzerinde türevlenebilirdir ve

$$\phi' = F(t, \phi(t))$$

sağlanır. $[t_0, t]$ üzerinde integral alınırsa

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds$$

dir. $\phi(t_0) = X_0$ olduğundan

$$\phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds.$$

Tersine olarak eğer ϕ , (3) un bir sürekli çözümü ise F sürekli olduğundan ϕ türevlenebilirdir.

Yani;

$$\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$$

sağlanır. (3) de $t = t_0$ yazılırsa

$$\phi(t_0) = X_0$$

olur.

1.2. Lineer Denklem Sistemleri

$$X' = F(t, X)$$

sisteminde her bir $f_i \in F_i$ lineer ise, yani $f_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t)$ şeklinde ise sisteme Lineer Sistem denir. Bu durumda (1) sistemi

$$X' = A(t)X + b(t) \quad (4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $A(t)$ matrisi $n \times n$ tipinde bir matris ve $b(t)$ ise $n \times 1$ tipinde bir vektördür. $a_{ij}(t)$ katsayıları bağımsız değişkene bağlıdır.

Tanım 1.3: Eğer $b(t) = 0$ ise

$$X' = A(t)X \quad (5)$$

sistemine Homojen Sistem adı verilir.

Tanım 1.4: Belirli bir $I \subseteq R$ aralığında (5) sisteminin lineer bağımsız n tane çözümünden oluşan kümeye Temel Çözüm Kümesi denir.

Tanım 1.5: (5) sisteminin n tane çözümü aşağıdaki gibi mevcut olsun.

- i) Eğer $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ler sistemin lineer bağımsız çözümleri ise $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ temel çözüm matrisidir.
- ii) Ayrıca $\psi(t_0) = I$ ise ψ matrisine Esas Çözüm Matrisi denir.

Teorem 1.2: $X' = A(t)X$ sisteminin $I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde temel çözüm matrisi X ile gösterilirse, C singüler olmayan sabit bir matris olmak üzere $X.C$ de $X' = A(t)X$ sisteminin I aralığı üzerinde bir temel çözüm matrisidir (Eastham, 1970).

Teorem 1.3: A bir $n \times n$ tipinde matris, A nin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörler $V_1, V_2, \dots, V_n$ olsun. Bu durumda $X' = AX$ sisteminin lineer bağımsız çözümleri $\phi_1 = V_1 e^{\lambda_1 t}, \phi_2 = V_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \phi_n = V_n e^{\lambda_n t}$ ile verilir. Temel çözüm matrisi ise $\phi = (\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n)$ şeklindedir (Eastham, 1970).

Teorem 1.4:

$$X' = A(t)X \quad (5)$$

sisteminin bir temel çözüm matrisi $\phi(t)$, C ise sabit vektör olmak üzere, (5) sisteminin genel çözümü;

$$\begin{aligned} X(t) &= \phi(t)C = (\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \dots \dots \dots + c_n \phi_n \end{aligned}$$

şeklindedir (Eastham, 1970).

Teorem 1.5: $X' = A(t)X$ denklem sisteminin (a,b) üzerinde tanımlı iki çözümü ϕ ve ψ olmak üzere $c_1 \phi(t) + c_2 \psi(t)$ aynı denklemin aynı aralık üzerinde tanımlanan bir çözümüdür (Eastham, 1970).

Özellik 1.1: n . mertebeden bir diferansiyel denklem, $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$

1.mertebeden bir denklem sistemine dönüştürülebilir. (Burada $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$)

Bunun için,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = x^{(n)} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \quad (6)$$

veya $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ olarak tanımlanırsa (6) sistemi $X' = F(t, X)$ şeklinde birinci mertebe sistem olarak ifade edilir.

Genel olarak n. mertebeden

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0 \quad (7)$$

lineer bir denklem, birinci mertebeden sistem olarak ifade edilebilir:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} = x' \\ \vdots \\ x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x^{(n-1)} \end{array} \right\}$$

Buradan

$$\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n - \frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)}x_{n-1} \dots - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ olmak üzere (7) denklemi}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & & & -\frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X' = AX$$

sistemine dönüşür.

Örnek 1.2:

$$y'' + y = 0$$

denklemini sisteme dönüştürerek çözünüz ve temel çözüm matrisini belirleyiniz.

$$y_1 = y \quad y_1' = y_2$$

$$y_2 = y' \quad y_2' = -y_1$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Y' = AY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

sistemine dönüşür. Bu sistemi çözmek için özdeğer ve özvektörleri hesaplayalım.

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ olur.

$\lambda_1 = i$ için V_1 özvektörünü bulalım.

$$(A - iI)V_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)V_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -ia + b = 0$$

$$\Rightarrow b = ia$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$a=1$ için $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ olur.

Benzer şekilde ,

$\lambda_2 = -i$ için V_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{aligned}(A + iI)V_2 &= 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right) V_2 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow ic + d = 0 \\ &\Rightarrow d = -ic\end{aligned}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} c \\ -ic \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$c=1$ için $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ olur.

Bu durumda genel çözüm;

$$\begin{aligned}Y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \\ &= c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve $Y(t) = \phi(t)C$, $\phi(t) \rightarrow$ temel çözüm matrisi (Teorem 1.4)

olduğuna göre;

$$\phi(t) = (V_1 e^{\lambda_1 t} \quad V_2 e^{\lambda_2 t})$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}$$

temel çözüm matrisidir.

Örnek 1.3:

$$y'' - y = 0$$

denklemini sisteme dönüştürerek çözünüz ve esas çözüm matrisini bulunuz.

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

alınırsa;

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_1$$

elde edilir. Buradan

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Y' = AY$$

sisteminde

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1. \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ için V_1 özvektörünü bulalım.

$$\begin{aligned} (A - I)V_1 = 0 &\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \} b = a \\ V_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a = 1 \text{ ise } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\lambda_2 = -1$ için V_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{aligned} (A + I)V_2 = 0 &\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c + d = 0$$

$$d = -c$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = 1 \text{ ise } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Özetle:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 = \phi(t) C \\ &= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

genel çözümü elde edilir. Burada temel çözüm matrisi:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi $\psi(t)$ esas çözüm matrisini bulalım.

$\psi(t_0) = I$, $t_0 = 0$ alırsak $\psi(0) = I$ olması için:

$$\psi(t) = \phi(t) \phi^{-1}(0)$$

alınırsa,

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}, \quad \psi(0) = I$$

$\psi(t)$ esas çözüm matrisi bulunur.

Önerme 1.2 (Abel formülü):

$$X' = A(t)X$$

sisteminin temel çözüm matrisi $\phi(t)$ ile gösterilir ve $\phi(t)$ 'nin Wronskianı, $\det \phi(t)$ olarak tanımlanırsa,

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{iz}(A(s)) ds \quad (8)$$

dir. (Burada $W(t)$ Wronskian matrisidir.)

İspat: $\phi(t)$ çözüm matrisini t_0 noktasında Taylor serisine açalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(t_0) + (t - t_0)\phi'(t_0) + o((t - t_0)^2) \\ &= \phi(t_0) + (t - t_0)A(t_0)\phi(t_0) + o((t - t_0)^2) \\ &= [I + (t - t_0)A(t_0)]\phi(t_0) + o((t - t_0)^2) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\det(\phi(t)) = \det[I + (t - t_0)A(t_0)]\det(\phi(t_0))$$

yani

$$W(t) = \det[I + (t - t_0)A(t_0)]W(t_0) \quad (9)$$

Ayrıca

$$\det(I + \varepsilon C) = 1 + \varepsilon \cdot \text{iz}(C) + o(\varepsilon^2)$$

olduğundan (9) eşitliği

$$W(t) = W(t_0)[1 + (t - t_0)\text{iz}(A(t_0)) + o(t - t_0)^2] \quad (10)$$

$W(t)$ yi Taylor serisine acarsak,

$$W(t) = W(t_0) + (t - t_0)W'(t_0) + o((t - t_0)^2) \quad (11)$$

(10) ve (11) karşılaştırılırsa

$$W(t_0)(t - t_0)iz(A(t_0)) = (t - t_0)W'(t_0)$$

Yani;

$$W'(t_0) = W(t_0)izA(t_0) \quad (12)$$

bulunur. t_0 keyfi olduğundan

$$W'(t) = W(t)izA(t) \quad (13)$$

ve son eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{W'(t)}{W(t)} &= iz(A(t)) \Rightarrow \ln|W(t)| - \ln|W(t_0)| = \int_{t_0}^t iz A(s)ds \\ \Rightarrow \frac{W(t)}{W(t_0)} &= \exp\left(\int_{t_0}^t iz A(s)ds\right) \end{aligned}$$

Yani

$$W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t iz A(s)ds\right) W(t_0) \quad (14)$$

elde edilir.

Teorem 1.6: $X' = A(t)X + b(t)$ sisteminin bir özel çözümü ψ ise sistemin her bir çözümü

$$X(t) = \psi + \phi(t)C$$

şeklindedir. Burada $\phi(t)$ temel çözüm matrisini, C sabit bir vektörü göstermektedir (Eastham, 1970).

Birçok fiziksel problemde olduğu gibi, problemin kesin analitik çözümünü bulmak yerine bağımsız değişkenin (t) zamanı gösterdiği kabul edilirse çözümün artan zamanda (yani $t \rightarrow \infty$) nasıl davrandığı önem kazanmaktadır.

Genel olarak başlangıç koşulundaki “küçük değişimler” çözümde de benzer olarak “küçük değişimlere” yol açarsa bu tür problemler tercih edilen problemler olup, kararlılık analizi olarak bilinen teoride incelenmektedir.

Şimdi birinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili bazı kavramları tanımlayalım:

1.3. Kararlılık Teorisi

Tanım 1.6: Bir diferansiyel denklemin çözümünün grafiği yani $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, x = x(t), t \in I\}$, integral eğrisi olarak adlandırılır (Hochstadt, 1975).

Tanım 1.7: $X' = F(X)$ sistemindeki bir sistemde $F(X) = 0$ koşulunu sağlayan noktalara sabit çözümler (denge çözümleri) adı verilir. Denge çözümlerini X_d ile gösterelim (Hochstadt, 1975).

Tanım 1.8: $X' = F(X)$ sisteminin $X(t)$ çözümü $X(t + T) = X(t)$, $(\forall t \in I, I \subseteq \mathbb{R})$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $T > 0$ mevcutsa $X(t)$ çözümüne Periyodik Çözüm ve T 'ye Periyot adı verilir (Hochstadt, 1975).

Not: Periyodik çözümlerin özel bir durumu olarak sabit çözümler alınabilir.

Tanım 1.9: (Kararlılık):

$$X' = F(X), X \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

sisteminin bir denge çözümünü X_d ile gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcutsa, Öyle ki; (15) sisteminin her bir X çözümü için $\|X_d - X_{t_0}\| < \delta$ sağlandığı zaman $\forall t > t_0$ için $\|X_d - X_t\| < \varepsilon$ oluyorsa X_d 'ye Kararlı Çözüm adı verilir (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.4: $x' = 1 - x$ denkleminde $x_d = 1$ denge çözümü kararlıdır.

Tanım 1.10: (Asimptotik Kararlılık): $X' = F(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$ denkleminin X_d çözümü kararlı olsun.

Eğer $\delta_0 > 0$ mevcutsa öyle ki; $\|X_{t_0} - X_d\| < \delta_0$ sağlandığında $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_d$ oluyorsa X_d 'ye asimptotik Kararlı Çözüm adı verilir (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.5: $x' = -ax$, $a > 0$ denkleminde $x_d = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.

Gerçekten;

$x' = -ax$ denkleminin herhangi bir çözümü x olmak üzere $x' = -ax$ ve $x(0) = 1$ denkleminin çözümü $x = e^{-at}$ dir.

$$x' = -ax$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int a dt$$

$$\Rightarrow \ln x = -at + c_1$$

$$\Rightarrow x = e^{-at+c_1} \Rightarrow x = e^{-at} c$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^0 c$$

$$\Rightarrow c = 1 \text{ ve } x = e^{-at}$$

bulunur. Burada $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0 = x_d$ olduğundan asimptotik kararlı olduğu görülür.

Tanım 1.11: $X' = F(X), X \in \mathbb{R}^n$ sisteminin X_d denge çözümü kararlı değilse bu durumda X_d 'ye Kararsız Çözüm adı verilir (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.6: $x' = x^2, x(t_0) = x_0$ başlangıç değer probleminde $x_d = 0$ çözümü kararsızdır.

Gerçekten;

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$$

$$-x^{-1} = t + c$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{t+c} \text{ ve } x(t_0) = x_0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{t_0 + c} = x_0$$

$$\Rightarrow t_0 + c = -\frac{1}{x_0}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{x_0} - t_0$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1 - x_0 t_0}{x_0}$$

bulunur.

$$-x^{-1} = t + c$$

ifadesinde

$$c = \frac{-1 - x_0 t_0}{x_0}$$

yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{x} = t + \frac{-1 - t_0 x_0}{x_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{tx_0 - 1 - t_0 x_0}{x_0}$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_0}{1 + t_0 x_0 - tx_0} \Rightarrow x = \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)}$$

elde edilir. Özel olarak $t = x_0^{-1} + t_0$ seçilirse

$$t_0 - t = -x_0^{-1}$$

olur.

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(-x_0^{-1})} \rightarrow \infty$$

Yani $x_d = 0$ çözümü kararsızdır.

1.4. Otonom ve Non-Otonom Sistemler

$I \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n (\Omega \neq 0), F: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektör değerli fonksiyon olmak üzere;

$(t, X) \rightarrow F(t, X)$ olarak tanımlansın.

$$X' = F(t, X) \tag{16}$$

birinci mertebe denklem sistemini ele alalım.

($X' = \frac{dX}{dt}$, t genellikle zamanı gösterir.)

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektör, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektör değerli fonksiyon olsun. Bir vektör değerli fonksiyon t bağımsız değişkenine bağlı değilse karşılık gelen denklem sistemi Otonom Sistem olarak adlandırılır. Bu durumda $X' = F(X)$ ile gösterilir. $X \in \mathbb{R}^n$ vektör

değerli fonksiyon t bağımsız değişkenine bağlı ise bu durumda sistem Otonom Olmayan (non-otonom) Sistem olarak adlandırılır (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.7: $x' = -x + e^{-t}$

$$x(0) = 1$$

denklemini ele alalım. Burada,

$f(x, t) = -x + e^{-t}$ ve $(0, 1) \rightarrow x(0) = 1$ 'e karşılık gelir. Non-otonom sistem için bir örnektir.

Örnek 1.8: $X' = AX$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

problemi otonom sistemler için bir başlangıç değer problemidir.

Tanım 1.12: (Otonom Olmayan Sistemler İçin Kararlılık):

$x' = f(t, x)$ denkleminde,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ mevcutsa, öyle ki; (16) nın her $y = y(t, t_0, y_0)$ çözümü için $t > t_0$ durumunda $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ ($t > t_0$) sağlanıyorsa $x(t)$ çözümüne Kararlı Çözüm denir (Hochstadt, 1975).

Tanım 1.13: (Asimptotik Kararlılık):

$x(t)$, $x' = f(t, x)$ denkleminin bir çözümü olmak üzere $x(t)$ kararlı ve $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ mevcutsa, öyle ki;

$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta_0$ sağlandığında $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x(t)$ oluyorsa $x(t)$ çözümü Asimptotik Kararlıdır denir. Kararlı olmayan çözümlere Kararsız Çözümler adı verilir (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.9: $x' = -tx$, $x(t_0) = x_0$ problemi ele alınsın.

$$\frac{dx}{dt} = -tx$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int t dt$$

$$\ln x = -\frac{t^2}{2} + c_1$$

$$x = e^{-\frac{t^2}{2}c} \Rightarrow x_0 = e^{-\frac{t_0^2}{2}c}$$

$$\Rightarrow c = x_0 e^{\frac{t_0^2}{2}}$$

bulunur. c sabiti

$$x = e^{\frac{-t^2}{2}c}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$x = e^{\frac{-t^2}{2}} x_0 e^{\frac{t_0^2}{2}}$$

$$= e^{\frac{t_0^2 - t^2}{2}} x_0$$

elde edilir.

$$\|x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, y_0)\| = \|x_0 - y_0\| e^{\frac{t_0^2 - t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

olduğundan çözüm kararlı ve asimptotik kararlıdır. $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y(t)\right)$

Kararlılık tanımı daha genel olarak aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.14:

$$X' = F(X, z) \tag{17}$$

sistemini göz önüne alalım. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ mevcutsa öyle ki herhangi iki X_1, X_2 çözümleri ve z_0 için $\|X_1(z_0) - X_2(z_0)\| < \delta(\varepsilon)$ sağlandığında $\|X_1(z) - X_2(z)\| < \varepsilon \forall z_0 < z < \infty$ oluyorsa $X' = F(X, z)$ sisteminin çözümlerine Lyapunov Anlamında Kararlıdır denir (Hochstadt, 1975).

Tanım 1.15: $X' = F(X, z)$ sistemini göz önüne alalım. Eğer bir $\delta > 0$ mevcutsa, öyle ki; $\|X_1(z_0) - X_2(z_0)\| < \delta$ iken $\lim_{z \rightarrow \infty} \|X_1(z) - X_2(z)\| = 0 \forall z, z_0 < z < \infty$ sağlanıyorsa

$X' = F(X, z)$ sisteminin çözümlerine “Asimptotik Kararlıdır” denir.

Sonuç olarak (17) sisteminin bütün özdeğerlerinin reel kısımları negatifse $\lim_{z \rightarrow \infty} \|X_1(z) - X_2(z)\| = 0$ olacağından asimptotik kararlıdır (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.10: $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ sisteminde, çözümlerin kararlılığını inceleyelim.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1' = x_2, \quad x_1 = x_1(z)$$

$$x_2' = -x_1, \quad x_2 = x_2(z)$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

çözümler Lyapunov anlamında kararlıdır.

Kabul edelim ki;

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix};$$

ve λ_1, λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler V_1, V_2 olsun.

$$(A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ia + b = 0 \\ -a - ib = 0 \end{cases} \Rightarrow b = ia$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Böylece $X = \phi C$ genel çözüm ve

$$\phi(z) = (V_1 e^{\lambda_1 z} \quad V_2 e^{\lambda_2 z})$$

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} e^{iz} & e^{-iz} \\ ie^{iz} & -ie^{-iz} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$X = \begin{pmatrix} c_2 \sin z + c_1 \cos z \\ c_2 \cos z - c_1 \sin z \end{pmatrix}$$

$$\|X\| \leq 2|c_1| + 2|c_2|, \quad \|X(0)\| = |c_1| + |c_2|$$

$$\Rightarrow \|X\| < \varepsilon \quad \text{için } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \text{ yazılır.}$$

Sabit katsayılı lineer denklemler göz önüne alınırsa

$$|A - \lambda I| = 0$$

polinomunun köklerinin incelenmesi kararlılık analizi için gereklidir.

Teorem 1.7:

$$X' = AX + F(X, z)$$

$$X(0) = X_0$$

sisteminin çözümlerinin asimptotik kararlı olması A'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmının negatif ve $F(X, z)$ nin X ve z ye göre sürekli olmasına bağlıdır (Hochstadt, 1975).

Örnek 1.11:

$$x' = -x(1-x)(2-x)$$

denklemini göz önüne alalım. Açıkça görüleceği üzere $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ denklemin sabit çözümleridir.

Denklemin çözümü ise,

$$\frac{dx}{dt} = -x(1-x)(2-x) \Rightarrow \frac{dx}{x(1-x)(2-x)} = -dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{x(1-x)(2-x)} = - \int dt = -t + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1-x)(2-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{2-x}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1-x)(2-x) + Bx(2-x) + Cx(1-x)$$

- $x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 1 \Rightarrow B = 1$
- $x = 2 \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{x(1-x)(2-x)} = \int \frac{dx}{2x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{1}{2} \frac{dx}{x-2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x-2|$$

$$\Rightarrow 2I = \ln|x| - \ln(x-1)^2 + \ln|x-2|$$

$$\Rightarrow 2I = \ln|x| - \ln(x-1)^2 + \ln|x-2|$$

$$\Rightarrow 2I = \ln \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = -t + c$$

$$\Rightarrow \ln \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = -2t + 2c$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = c_1 e^{-2t}, \quad x(t) = ?$$

$$x(x-2) = (x-1)^2 c_1 e^{-2t}$$

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 c_1 e^{-2t}$$

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \text{ olduğu kullanılırsa}$$

$$\frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = c_1 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = c_1 e^{-2t}$$

veya

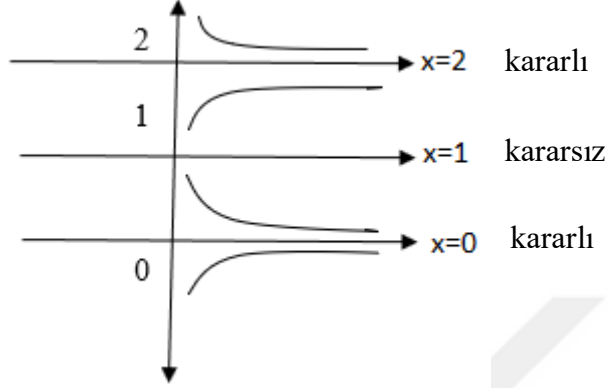
$$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{1 - c_1 e^{-2t}}$$

$-c_1 = c^2$ alırsak

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{1 + c^2 e^{-2t}}$$

elde edilir.

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ denge çözümlerinin (sabit çözüm) kararlılığı incelenebilir.



$x(t)$ başlangıç koşulu olarak $x_0 = 1$ seçilirse,

Başlangıç değeri 1 den büyük olan bir çözüm x_2 'ye

Başlangıç değeri 1 den küçük olan bir çözüm x_0 'a

Başlangıç değeri 1 olan bir çözüm x_1 'e yaklaşır.

1.5. İkinci Mertebe Periyodik Katsayılı Denklemler

1.5.1. Floquet Teori Ve Kuadratik Denklem

İkinci mertebeden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (18)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları parçalı sürekli genel olarak kompleks değerli ve aynı a periyoduna sahip fonksiyonlar olsun. Yani

$$a_r(x + a) = a_r(x), \quad (0 \leq r \leq 2).$$

$a \neq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ aynı zamanda $a_0(x) \neq 0$ olsun. $x \in (-\infty, \infty)$ kabul edelim.

Eğer $\psi(x)$ fonksiyonu (18) denkleminin bir çözümü ise $\psi(x + a)$ fonksiyonu da (18) denklemini sağlar (Eastham, 1973). Çünkü;

$$a_0(x+a)\psi''(x+a) + a_1(x+a)\psi'(x+a) + a_2(x+a)\psi(x+a) = a_0(x)\psi''(x+a) + a_1(x)\psi'(x+a) + a_2(x)\psi(x+a) = 0.$$

Genel olarak $\psi(x+a) \neq \psi(x)$ ve (18) denkleminin periyodu a olan sıfırdan farklı (trivial olmayan) çözümü her zaman mevcut değildir. Örneğin;

$y'' - y = 0$ denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ dir. Ancak hiçbir sıfırdan farklı çözüm a periyoduna sahip değildir.

Çünkü

$$\psi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

olarak alınırsa

$$\psi(x+a) = c_1 e^x e^a + c_2 e^{-x} e^{-a} \neq \psi(x)$$

olduğu görülür.

Buna rağmen (18) denkleminin sıfırdan farklı $\psi(x)$ çözümü için, a periyot olmak üzere

$$\psi(x+a) = \rho \psi(x)$$

koşulunu sağlayan bir $\rho > 0$ sabit sayısı mevcuttur. Bu özellik (18) denkleminin özel forma sahip iki lineer bağımsız çözümünün varlığını ortaya koyar. Bu tür çözümler aşağıdaki teoremden verilecektir. Bu sonuçlar genel olarak “Floquet Teorisi” olarak bilinmektedir ve 1883 yılında G. Floquet tarafından ele alınmıştır.

Teorem 1.7: ikinci mertebeden

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı $\psi(x)$ çözümü için

$$\psi(x+a) = \rho \psi(x) \tag{19}$$

koşulunu sağlayan $\rho > 0$ sabiti mevcuttur.

Teoremden anlaşılacağı üzere katsayıların periyodik olması halinde her zaman periyodik çözüm mevcut değildir. Ancak (19) sağlanacak şekilde $\rho \neq 0$ her zaman mevcuttur. (Eastham, 1973)

İspat: ϕ_1 ve ϕ_2 (18) denkleminin

$$\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1 \quad (20)$$

ile verilen başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsun.

$\Phi_1(x + a)$ ve $\Phi_2(x + a)$ da lineer bağımsız olduğundan

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x + a) &= A_{11}\Phi_1(x) + A_{12}\Phi_2(x) \\ \Phi_2(x + a) &= A_{21}\Phi_1(x) + A_{22}\Phi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

sağlanacak şekilde $A = (A_{ij})$ singuler olmayan matris mevcuttur.

(18) denkleminin her bir $\psi(x)$ çözümü

$$\psi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$$

formundadır. Burada c_1 ve c_2 sabit sayılardır.

(19) eşitliğinin sağlanması için (21) kullanılırsa ve ayrıca

$$\psi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$$

dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(x + a) &= c_1\Phi_1(x + a) + c_2\Phi_2(x + a) \\ &= c_1(A_{11}\Phi_1(x) + A_{12}\Phi_2(x)) + c_2(A_{21}\Phi_1(x) + A_{22}\Phi_2(x)) \\ &= \rho(c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)) \\ \Rightarrow (c_1A_{11} + c_2A_{21})\Phi_1(x) + (c_1A_{12} + c_2A_{22})\Phi_2(x) &= \rho(c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)) \\ \Rightarrow c_1A_{11} + c_2A_{21} &= \rho c_1 \\ c_1A_{12} + c_2A_{22} &= \rho c_2 \\ \Rightarrow c_1(A_{11} - \rho) + c_2A_{21} &= 0 \\ c_1A_{12} + c_2(A_{22} - \rho) &= 0 \end{aligned}$$

Sıfırdan farklı çözüm olması için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

Yani

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} - \rho & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} - \rho \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (A_{11} - \rho)(A_{22} - \rho) - A_{12}A_{21} &= 0 \\ A_{11}A_{22} - \rho A_{11} - \rho A_{22} + \rho^2 - A_{12}A_{21} &= 0 \\ \rho^2 - \rho(A_{11} + A_{22}) + \det A &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

kuadratik denklemi elde edilir.

$$\det A \neq 0$$

olduğundan sıfırdan farklı en az bir ρ sayısı mevcuttur.

(20) ve (21) eşitliğinden

$x = 0$ için $\Phi_1(a) = A_{11}\Phi_1(0) + A_{12}\Phi_2(0)$ ve $\Phi_2(0) = 0$ ((20) eşitliğinde) olduğundan

$$\Phi_1(a) = A_{11}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\Phi_1'(a) = A_{12}, \Phi_2(a) = A_{21}, \Phi_2'(a) = A_{22} \quad (23)$$

olur. Böylece

$$\det A = \begin{vmatrix} \Phi_1(a) & \Phi_2(a) \\ \Phi_1'(a) & \Phi_2'(a) \end{vmatrix} = W(\Phi_1, \Phi_2)_{(a)} = \exp\left(-\int_0^a \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right)$$

yazılır. Bu son eşitlik Liouville Formülü olarak bilinmektedir.

$a = 0$ için

$$W(\Phi_1, \Phi_2)_{(0)} = 1$$

olur. Bu durumda (22) denklemi

$$\rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a))\rho + \exp\left(-\int_0^a \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right) = 0 \quad (24)$$

denklemine dönüşür.

Teorem 1.8: İkinci mertebeden

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$$

denkleminin $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ şeklinde iki lineer bağımsız çözümü mevcuttur. Öyle ki

$$\text{i) } \psi_1(x) = e^{m_1 x} P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{m_2 x} P_2(x)$$

Burada $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonları a periyoduna sahip fonksiyonlardır. (m_1 ve m_2 nin her zaman birbirinden farklı olması gerekmez.)

$$\text{ii) } \psi_1(x) = e^{mx} P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{mx} (xP_1(x) + P_2(x))$$

Burada m bir sabit $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonları aynı a periyoduna sahip fonksiyonlardır (Eastham, 1973).

İspat: (24) da elde edilen kuadratik denklemin farklı kökleri ρ_1 ve ρ_2 olsun.

Teorem 1.7 den ,

$$\psi_k(x+a) = \rho_k \psi_k(x) \quad (k = 1, 2 \dots) \quad (25)$$

sağlanacak şekilde ρ_k mevcuttur. Burada $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ lineer bağımsızdır. ρ_1 ve ρ_2 sabitleri sıfırdan farklı olduğundan

$$e^{am_1} = \rho_1, \quad e^{am_2} = \rho_2 \quad (e^{am_k} = \rho_k) \quad (26)$$

olarak tanımlanır. Burada ρ_1 ve ρ_2 ye Karakteristik Çarpanlar; m_1 ve m_2 sabitlerine Karakteristik Üsteller adı verilir. Eğer

$$P_k(x) = e^{-m_k x} \psi_k(x) \quad (27)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} P_k(x+a) &= e^{-m_k(x+a)} \psi_k(x+a) \\ &= e^{-m_k(x+a)} \rho_k \psi_k(x), \quad \rho_k = e^{am_k} \end{aligned}$$

$$P_k(x+a) = e^{-m_k x} \psi_k(x) = P_k(x)$$

yazılır. Dolayısıyla buradan $P_k(x)$ periyodiktir ve a periyoduna sahiptir.

Kabul edelim ki (24) denkleminin katlı reel kökü ρ olsun. Yani $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ve $e^{am} = \rho$ olarak tanımlayalım. Teorem 1.7 e göre

$$\Psi_1(x+a) = \rho \Psi_1(x) \quad (28)$$

$\Psi_2(x)$ çözümü (18) denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü olsun. $\Psi_2(x+a)$ da (18) denklemini sağlayacaktır. Dolayısıyla

$$\Psi_2(x+a) = d_1 \Psi_1(x) + d_2 \Psi_2(x) \quad (29)$$

olacak şekilde d_1, d_2 sabitleri mevcuttur. (28) ve (29) den

$$\begin{aligned} W(\Psi_1, \Psi_2)_{(x+a)} &= \begin{vmatrix} \Psi_1(x+a) & \Psi_2(x+a) \\ \Psi_1'(x+a) & \Psi_2'(x+a) \end{vmatrix} \\ &= \Psi_1(x+a) \Psi_2'(x+a) - \Psi_2(x+a) \Psi_1'(x+a) \\ &= \rho \Psi_1(x) [d_1 \Psi_1'(x) + d_2 \Psi_2'(x)] - [d_1 \Psi_1(x) + d_2 \Psi_2(x)] \rho \Psi_1'(x) \\ &= \rho d_1 \Psi_1(x) \Psi_1'(x) + \rho d_2 \Psi_1(x) \Psi_2'(x) - \rho d_1 \Psi_1(x) \Psi_1'(x) \\ &\quad - \rho d_2 \Psi_1'(x) \Psi_2(x) \end{aligned}$$

$$= \rho d_2 (\Psi_1(x) \Psi_2'(x) - \Psi_1'(x) \Psi_2(x)).$$

Burada

$$\rho d_2 \begin{vmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) \\ \Psi_1'(x) & \Psi_2'(x) \end{vmatrix} = \rho d_2 (\Psi_1(x) \Psi_2'(x) - \Psi_2(x) \Psi_1'(x))$$

eşitliği sağlandığına göre

$$W(\Psi_1, \Psi_2)_{(x+a)} = \rho d_2 W(\Psi_1, \Psi_2)_{(x)}$$

olduğu görülür. Yine Liouville formülü kullanılırsa

$$\rho d_2 = \exp \left(- \int_x^{x+a} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right) = \exp \left(- \int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right).$$

Burada $f(x)$ fonksiyonunun periyodik olması halinde

$$\int_x^{x+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

özelligi kullanılmıştır. (24) eşitliğinden

$$\rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a))\rho + \exp \left(- \int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right) = 0$$

ve ρ , (24) denkleminin katlı kökü olarak alındığından

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \rho_1 \rho_2 = \exp \left(- \int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right) = \rho^2$$

$$\rho d_2 = \rho^2 \Rightarrow d_2 = \rho.$$

(29) eşitliğinden

$$\Psi_2(x+a) = d_1 \Psi_1(x) + \rho \Psi_2(x) \quad (30)$$

elde edilir. $d_1 = 0$ ise $\Psi_2(x+a) = \rho \Psi_2(x)$ ((30) eşitliğinden)

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

yazılır.

Eğer $d_1 \neq 0$ ise $P_1(x) = e^{-mx} \Psi_1(x)$ ve $P_2(x) = e^{-mx} \Psi_2(x) - \left(\frac{d_1}{a\rho} \right) x P_1(x)$

P_1 ve P_2 aynı a periyoduna sahiptir, Çünkü (27) ve (28) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
P_1(x+a) &= e^{-m(x+a)}\Psi_1(x+a) \\
&= e^{-m(x+a)}\rho\Psi_1(x) \\
&= e^{-mx}e^{-ma}\rho\Psi_1(x) \\
&= e^{-mx}\Psi_1(x) \\
&= P_1(x).
\end{aligned}$$

Benzer şekilde P_2 nin periyodik olduğu görülür.

1.5.2. Hill Denklemleri

$P(x), Q(x)$ fonksiyonları reel değerli ve a periyoduna sahip fonksiyonlar, $P(x)$ sürekli ve sıfırdan farklı; $P'(x)$ ve $Q(x)$ parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$[P(x)y'(x)]' + Q(x)y(x) = 0 \quad (31)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem Hill denklemi olarak adlandırılır.

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0 \quad (18)$$

denklemini bazı özel durumlarda (31) denklemine dönüştürülebilir. Öncelikle,

$$\int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt = 0 \quad (32)$$

olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında (18) denklemi

$$(a_0(x))^{-1} \exp A(x), \left(A(x) = \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right)$$

ile çarpılırsa

$$[a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y](a_0(x))^{-1} \exp A(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'' \exp A(x) + a_1(x)(a_0(x))^{-1} \exp A(x)y' + a_2(x)(a_0(x))^{-1} \exp A(x)y = 0 \quad (33)$$

eşitliği elde edilir.

$$P(x) := \exp A(x), \quad P'(x) := A'(x)e^{A(x)} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}e^{A(x)}, \quad \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \exp A(x) := Q(x)$$

olarak tanımlanırsa (33) denklemi

$$[P(x)y'(x)]' + Q(x)y(x) = 0$$

denklemine dönüşür ki bu denklem bir Hill denklemidir (Eastham, 1973).

Katsayıların periyodik olduğu kolayca gösterilebilir. Bunun için;

$$\begin{aligned}
e^{A(x)} &= e^{\int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = e^{\frac{\int_x^{x+a} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt + \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}{0}} \\
&= e^{\int_0^{x+a} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \\
e^{A(x)} &= e^{A(x+a)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $e^{A(x)} = P(x)$ ve $\int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt = 0$ varsayımı altında periyodiktir.

Benzer şekilde $Q(x)$ fonksiyonunun da periyodik olduğu gösterilebilir.

(32) varsayımı yerine aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım.

$$y(x) = z(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right).$$

Burada $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ parçalı sürekli türevelere sahiptir.

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(x) \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right)}_{\gamma(x)} = z(x)\gamma(x) \\
\Rightarrow y'(x) &= z'(x)\gamma(x) + z(x) \left(-\frac{1}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) \gamma(x) \\
&= \gamma(x) \left[z'(x) - \frac{z(x)}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right].
\end{aligned}$$

Benzer şekilde y'' hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \gamma' \left[z'(x) - \frac{z(x)}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right] + \gamma(x) \left[z''(x) - \frac{1}{2} z'(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} - \frac{z(x)}{2} \left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)'\right] \\
&= \left[-\frac{1}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \left(z'(x) - \frac{z(x)}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) + z''(x) - \frac{1}{2} z'(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} - \frac{1}{2} z(x) \left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)'\right] \gamma(x)
\end{aligned}$$

ve bu değerler kullanılarak

$$\begin{aligned}
a_0(x)y'' &= \left[-\frac{1}{2} a_1(x) \left(z'(x) - \frac{z(x)}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) \right. \\
&\quad \left. + a_0 \left(z''(x) - \frac{1}{2} z'(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} - \frac{1}{2} z(x) \left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)'\right)\right] \gamma(x); \\
a_1(x)y' &= a_1(x)z'(x)\gamma(x) + a_1(x)z(x) \left(-\frac{1}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) \gamma(x); \\
a_2(x)y &= a_2(x)z(x)\gamma(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (18) de yerine yazılır ve a_0' a bölünürse

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$$

denklemini aşağıdaki denkleme dönüştür:

$$\begin{aligned}
& y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y \\
&= \left[z'' - \frac{1}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \left(z'(x) - \frac{z(x) a_1(x)}{2 a_0(x)} \right) - \frac{1}{2} z'(x) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} z(x) \left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right)' \right] \gamma(x) + \left[\frac{a_1(x)}{a_0(x)} z'(x) + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} z(x) \left(-\frac{1}{2} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right) \right] \gamma(x) \\
&\quad + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} z(x) \gamma(x) = 0.
\end{aligned}$$

Denklem yüksek mertebe türeve göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
z'' + \left(-\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} \right) z' + \left(-\frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)' - \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{a_2}{a_0} \right) z &= 0 \\
z'' + \left(-\frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)' + \frac{a_2}{a_0} \right) z &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla z' ye göre elde edilen bu denklemin katsayıları periyodik olduğundan bu denklem (31) türündedir ($P(x) = 1$).

Gelecek bölümlerde

$$(Py')' + Qy = 0 \quad (31)$$

denklemini ele alınacaktır.

Önceki bölümde verilen teorem 1.8 , (31) denklemine uygulanacaktır:

(31) denklemini için kuadratik denklem;

$$\rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a))\rho + 1 = 0$$

şeklindedir. ($P(x)$ in periyodik olduğu kullanılmıştır.) ve karakteristik çarpanlar

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$$

eşitliğini sağlarlar.

$P(x)$ ve $Q(x)$ reel değerli olduğu için (31) denkleminin çözümleri $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ (ki bu çözümler $\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1$ koşullarını sağlarlar) reel değerlidir. $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ kullanılarak

$$D = \Phi_1(a) + \Phi_2'(a)$$

reel değeri tanımlanabilir. Bu değer diskriminant olarak adlandırılır. Diskriminant için aşağıdaki durumlar ayrı ayrı incelenir:

1.durum:

$D > 2$: bu durumda ρ_1 ve ρ_2 reel değeri ve birbirinden farklıdır. ρ_1 ve ρ_2 pozitif; $\rho_1 \neq 1$ ve $\rho_2 \neq 1$. Dolayısıyla sıfırdan farklı bir m sabiti mevcuttur, Öyle ki

$$e^{am} = \rho_1 \text{ ve } e^{-am} = \rho_2 \text{ dir.}$$

Böylece

$$\psi_1(x) = e^{mx} P_1(x) \text{ ve } \psi_2(x) = e^{-mx} P_2(x).$$

Burada P_1 ve P_2 , a periyotlu fonksiyonlardır.

2. durum:

$D < -2$: burada ρ_1 ve ρ_2 negatif; $\rho_1 \neq -1$ ve $\rho_2 \neq -1$ dir. 1. durumdaki m yerine $m + \frac{\pi}{a}i$ alınır.

3.durum:

$-2 < D < 2$: Burada ρ_1 ve ρ_2 farklı ancak reel olmayan sayılardır ve bunlar birbirinin eşleniğidir. Dolayısıyla $0 < \alpha a < \pi$ olacak şekilde bir α sayısı mevcuttur. Öyle ki;

$$e^{i\alpha a} = \rho_1 \text{ ve } e^{-i\alpha a} = \rho_2.$$

Böylece

$$\psi_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x) \text{ ve } \psi_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x).$$

4.durum:

$D = 2$: Burada $\rho_1 = \rho_2 = 1$ dir. Teorem 1.8 nin i ve ii hangi kısmının uygulanacağı $A - I$ nin rankına bağlıdır.

i) $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$ ise

Bu durumda $\psi_1(x) = P_1(x)$ ve $\psi_2(x) = P_2(x)$ dir.

ii) $\phi_2(a) \neq 0$ veya $\phi_1'(a) \neq 0$ ise

Bu durumda $\psi_1(x) = P_1(x)$ ve $\psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x)$.

5. durum:

$D = -2$: Bu durumda $\rho_1 = \rho_2 = -1$ dir.

i) $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$ ise

Bu durumda $\psi_1(x) = e^{\frac{\pi i x}{a}} P_1(x)$, $\psi_2(x) = e^{\frac{\pi i x}{a}} P_2(x)$.

ii) $\phi_2(a) \neq 0$ veya $\phi_1'(a) \neq 0$

Bu durumda $\psi_1(x) = P_1(x)$ ve $\psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x)$.

Verilen teorik sonuçla ilgili aşağıdaki problemleri gözönüne alalım:

Örnek 1.12:

$y'' - y = 0$ denklemini ele alalım.

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$ olup lineer bağımsız çözümler $y_1 = e^x$ ve $y_2 = e^{-x}$ olur.

Burada

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

olduğundan y_1 ve y_2 nin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu çözümler periyodik değildir.

Gerçekten

$$\begin{aligned} y_1(x+a) &= e^{x+a} \\ &= e^x \cdot e^a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_1(x+a) = y_1(x)e^a$$

$$\begin{aligned} y_2(x+a) &= e^{-(x+a)} \\ &= e^{-x} \cdot e^{-a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_2(x+a) = y_2(x)e^{-a}$$

Teorem 1.7 de (19) eşitliğinden

$$y_1(x+a) = y_1(x)\rho_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 = e^a$$

$$y_2(x+a) = y_2(x)\rho_2$$

$$\Rightarrow \rho_2 = e^{-a}$$

olduğu görülür. Bu değerlerin (karakteristik çarpanların) kuadratik denklemden de elde edilebileceğini ispatlayalım:

Gerçekten

Φ_1 ve Φ_2 , $\Phi_1(0) = 1$, $\Phi_1'(0) = 0$, $\Phi_2(0) = 0$, $\Phi_2'(0) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan

lineer bağımsız çözümler olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ \Phi_2(x) &= d_1 e^x + d_2 e^{-x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Phi_1'(x) &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} \\ \Phi_2'(x) &= d_1 e^x - d_2 e^{-x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_1(0) &= 1 = c_1 + c_2 \\ \Phi_1'(0) &= 0 = c_1 - c_2 \end{aligned} \right\} c_1 = c_2 = \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_2(0) &= 0 = d_1 + d_2 \\ \Phi_2'(0) &= 1 = d_1 - d_2 \end{aligned} \right\} d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \Phi_2(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \end{aligned}$$

Kuadratik denklem:

$$\begin{aligned} \rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a))\rho + \exp\left(-\int_0^a \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right) &= 0 \\ \Rightarrow \rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a))\rho + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \rho^2 - \left(\frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})\right)\rho + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \rho^2 - (e^a + e^{-a})\rho + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{aligned} \rho_1 \rho_2 &= 1 \\ \rho_1 + \rho_2 &= e^a + e^{-a} \end{aligned} \end{aligned}$$

ve beklendiği üzere

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= e^a \\ \rho_2 &= e^{-a} \end{aligned} \right\}$$

elde edilir.

Örnek 1.13:

$$y'' + 4y = 0$$

denkleminin karakteristik çarpanlarını ve Floquet üstellerini bulalım.

$$\begin{aligned} r^2 + 4 &= 0 \Rightarrow r = \pm 2i \\ \Rightarrow y_1 &= \cos 2t \text{ ve } y_2 = \sin 2t, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_1 &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, & \Phi_1(0) &= 1 \\ \Phi_1' &= -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t, & \Phi_1'(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_1(0) &= c_1 = 1 \\ \Phi_1'(0) &= 2c_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi_1(t) = \cos 2t;$$

$$\begin{cases} \Phi_2 = d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t, & \Phi_2(0) = 0 \\ \Phi_2' = -2d_1 \sin 2t + 2d_2 \cos 2t, & \Phi_2'(0) = 1 \end{cases}$$

,

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi_2(0) = d_1 = 0 \\ \Phi_2'(0) = 2d_2 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_2(t) = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Kuadratik denklem:

$$\rho^2 - (\Phi_1(a) + \Phi_2'(a)) + 1 = 0 \quad (\text{teorem 1.7 de (24) eşitliğinden})$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$$

olduğu görülür. Teorem 1.8 de (26) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_1 = e^{am_1} \\ \rho_2 = e^{am_2} \end{array} \right\} \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_1 = e^{2\pi m_1} \Rightarrow 1 = e^{2\pi m_1} \Rightarrow m_1 = 0 \\ \rho_2 = e^{2\pi m_2} \Rightarrow 1 = e^{2\pi m_2} \Rightarrow m_2 = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani floquet üstelleri $m_1 = m_2 = 0$ bulunur.

Örnek 1.14:

$$y'' - 3y' - 4 = 0$$

denkleminin karakteristik çarpanlarını, floquet üstellerini; $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ periyodik çözümlerini bulalım:

$$\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 lineer bağımsız çözümleri arayalım:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r - 4)(r + 1) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 4, r_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{4x}, y_2 = e^{-x}$$

bulunur. Buradan

$$\Phi_1(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

$$\Rightarrow \Phi_1'(x) = 4c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ \Phi_1'(0) = 0 \Rightarrow 4c_1 - c_2 = 0 \end{array} \right\} c_1 = \frac{1}{5} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \Phi_1(x) = \frac{1}{5}e^{4x} + \frac{4}{5}e^{-x}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\Phi_2(x) = d_1e^{4x} + d_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \Phi_2'(x) = 4d_1e^{4x} - d_2e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_2(0) = 0 \Rightarrow d_1 + d_2 = 0 \\ \Phi_2'(0) = 1 \Rightarrow 4d_1 - d_2 = 1 \end{array} \right\} d_1 = \frac{1}{5} \text{ ve } d_2 = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \Phi_2(x) = \frac{1}{5}e^{4x} - \frac{1}{5}e^{-x}$$

elde edilir. Bu durumda oluşacak kuadratik denklemi yazalım:

$$a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -4 \text{ ve periyot} = 2\pi$$

olduğuna göre

$$\Phi_1(2\pi) = \frac{1}{5}e^{8\pi} + \frac{4}{5}e^{-2\pi};$$

$$\Phi_2'(2\pi) = \frac{4}{5}e^{8\pi} + \frac{1}{5}e^{-2\pi}.$$

Böylece kuadratik denklem teorem 1.7 (24) eşitliğinden

$$\rho^2 - (\Phi_1(2\pi) + \Phi_2'(2\pi))\rho + \exp\left(-\int_0^{2\pi} -3 dx\right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - \left(\frac{1}{5}e^{8\pi} + \frac{4}{5}e^{-2\pi} + \frac{4}{5}e^{8\pi} + \frac{1}{5}e^{-2\pi}\right)\rho + e^{6\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - (e^{8\pi} + e^{-2\pi}) + e^{6\pi} = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 = e^{8\pi} + e^{-2\pi} \\ \rho_1\rho_2 = e^{6\pi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_1 = e^{8\pi} \Rightarrow m_1 = 4 \\ \rho_2 = e^{-2\pi} \Rightarrow m_2 = -1 \end{array}$$

olduğu görülür. Teorem 1.8 i) den

$$\psi_1(x) = e^{m_1x} \cdot P_1(x) \Rightarrow e^{4x} = e^{4x}P_1(x)$$

$$\Rightarrow P_1(x) = 1.$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= e^{m_2 x} \cdot P_2(x) \Rightarrow e^{-x} = e^{-x} P_2(x) \\ &\Rightarrow P_2(x) = 1\end{aligned}$$

periyodik $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ çözümleri elde edilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= e^{4x} \text{ ve } a = 2\pi \Rightarrow \psi_1(x+a) = e^{4(x+2\pi)} \\ &= e^{4x} e^{8\pi} \\ &= \psi_1(x) \rho_1; \\ \psi_2(x) &= e^{-x} \text{ ve } a = 2\pi \Rightarrow \psi_2(x+a) = e^{-(x+2\pi)} \\ &= e^{-x} e^{-2\pi} \\ &= \psi_2(x) \rho_2.\end{aligned}$$

1.5.3. Çözümlerin Periyodikliği ve Sınırlılık

Teorem 1.9:

$$[P(x)y'(x)]' + Q(x)y(x) = 0 \quad (31)$$

denkleminin göz önüne alalım.

- i) Eğer $|D| = |\phi_1(a) + \phi_2'(a)| < 2$ ise (31) in tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlıdır.
- ii) Eğer $D > 2$ ise bu durumda Hill denkleminin ilgili teorideki 1. durum gerçekleşir ve $\psi_1(x) = e^{mx} P_1(x)$ ve $\psi_2(x) = e^{-mx} P_2(x)$.
 ψ_1 ve ψ_2 çözümlerinin lineer kombinasyonları sınırsızdır.
- iii) $D < -2$ için benzer durum söz konusudur.
- iv) Eğer $|D| < 2$ ise Hill denkleminin ilgili teorideki 3. durum gerçekleşir.
 $\psi_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x)$ ve $\psi_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x) \Rightarrow |\psi_k(x)| = |P_k(x)|$.
 P_k lar periyodik dolayısıyla sınırlı olduğundan $\psi_1, \psi_2 (-\infty, \infty)$ da sınırlıdır. Ayrıca kombinasyonları da sınırlı olacaktır.
- v) $D = \phi_1(a) + \phi_2'(a) = 2$ ise (31) denkleminin trivial olmayan a periyoduna sahip bir çözümü mevcuttur.
- vi) $D = -2$ ise bu taktirde (31) denkleminin yarı periyodu a olan bir çözümü mevcuttur.
Buna ek olarak (31) denkleminin tüm çözümleri periyodu a olan veya yarı periyodu a olan çözümlere sahiptir. Ancak ve ancak $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$ dir.

vii) Bu teoremin sonucu olarak (31) denkleminin $D \leq 2$ olması halinde tüm çözümleri sınırlıdır (Eastham, 1973).

Tanım 1.16: (31) denkleminin sıfırdan farklı tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırsız ise denkleme Kararsızdır denir. Eğer (31) denkleminin sıfırdan farklı tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlı ise (yani $D \leq 2$) denkleme Kararlıdır denir.

1.6. Periyodik Katsayılı Lineer Sistemler

Önceki bölümde verilen ikinci mertebeden periyodik katsayılı

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (18)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliği üzerine elde edilen sonuçlar sistemler için de benzerlik göstermektedir. Aşağıdaki bölümde bu tür sonuçlar ele alınmıştır. Verilen bu sonuçlar, birçok lineer olmayan periyodik katsayılı denklemlerin lineer sistemlerle çözümünde kullanılmaktadır. Bu tür problemler yörünge hareketi ve uydularla ilgili çalışmalarda yer almaktadır.

Hatırlatma:

$$X' = A(t)X \quad (5)$$

denklem sisteminde, $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ sisteminin lineer bağımsız çözümleri iseler

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]_{n \times n}$$

matrisi, (5) sisteminin bir Temel Çözüm Matrisi olarak adlandırılır. Eğer $X(0) = I$ özelliği sağlanırsa, $X(t)$ matrisine Esas Çözüm Matrisi adı verilir. Burada I ilgili boyuttaki birim matrisi göstermektedir (Ward, 2025).

Önerme 1.3: $X(t)$ matrisi (5) sisteminin bir temel çözüm matrisi ve B singüler olmayan bir matris ise

$$Y(t) = X(t)B$$

de (5) sisteminin bir temel çözüm matrisidir.

İspat: $Y^{-1}(t) = B^{-1}X^{-1}(t)$ singüler olmayan bir matristir. Dolayısıyla $Y(t)$ singüler değildir. Aynı zamanda

$$Y' = X'(t)B = A(t)XB = AY(t)$$

sağlandığından, $Y(t)$ bir temel çözüm matrisidir.

Teorem 1.10: $X' = A(t)X$ denklem sisteminde $A(t)$, periyodu T olan bir matris olsun. Eğer $X(t)$ sistemin bir temel çözüm matrisi ise $X(t+T)$ de aynı sistemin bir temel çözüm matrisidir ve bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayacak bir sığüler olmayan B matrisi mevcuttur:

i) $X(t+T) = X(t)B \quad (\forall t)$

ii) $\det(B) = \exp\left(\int_0^T \text{iz}(A(s))ds\right)$ (Ward, 2025).

İspat: Öncelikle $X(t+T)$ bir temel matris çözümüdür. Bunu göstermek için $Y(t) := X(t+T)$ tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y'(t) &= X'(t+T) \\ &= A(t+T)X(t+T) \\ &= A(t)X(t+T) \\ &= A(t)Y(t). \end{aligned}$$

Böylece $X(t+T)$ bir temel matris çözümüdür.

i) $B(t) := X^{-1}(t)Y(t)$ olsun. Bu durumda $Y(t) = X(t)X^{-1}(t)Y(t) = X(t)B(t)$ olur. Ayrıca $B_0 = B(t_0)$ olsun. Önerme 1.3 den $Y_0(t) = X(t)B(t_0)$ bir temel çözüm matrisidir ve tanımdan $Y_0(t) = Y(t_0)$. Her ikisi de $X' = AX$ sisteminin çözümleri olduğundan varlık teklik teoremi gereği $Y_0(t) = Y(t_0) \quad (\forall t)$, sonuç olarak $B_0 = B(t)$ ve böylece B matrisi zamandan bağımsızdır.

ii) (8) ile verilen Abel formülünden

$$\begin{aligned} W(t) &= W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{iz}(A(s))ds\right) \\ \Rightarrow W(t+T) &= W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{iz}(A(s))ds + \int_t^{t+T} \text{iz}(A(s))ds\right) \\ \Rightarrow W(t+T) &= W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{iz}(A(s))ds\right) \exp\left(\int_t^{t+T} \text{iz}(A(s))ds\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= W(t) \exp \left(\int_t^{t+T} iz(A(s)) ds \right) = W(t) \exp \left(\int_0^T iz(A(s)) ds \right) \\
&\Rightarrow W(t+T) = W(t) \exp \left(\int_0^T iz(A(s)) ds \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
&X(t+T) = X(t)B \\
&\Rightarrow \det(X(t+T)) = \det(X(t))\det(B), \\
&\Rightarrow W(t+T) = W(t)\det(B)
\end{aligned} \tag{35}$$

olduğu kullanılırsa (34) ve (35) den

$$\det(B) = \exp \left(\int_0^T iz(A(s)) ds \right)$$

olduğu görülür.

Not 1.1: Yukarıda B nin zamandan bağımsız olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $t = 0$ için, $X(0) = I$ olduğu kullanılarak hesaplamalar yapılırsa

$$B = X^{-1}(0)X(T) = X(T)$$

Buradan da $B = X(T)$ olduğu görülür.

Tanım 1.17: (Karakteristik Çarpanlar ve Üsteller):

B matrisinin $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ özdeğerlerine $X'(t) = A(t)X(t)$ sisteminin Karakteristik Çarpanları denir. Karakteristik (Floquet) üsteller $m_1, m_2, \dots, m_n$ değerleri

$$\rho_1 = e^{m_1 T}, \rho_2 = e^{m_2 T}, \dots, \rho_n = e^{m_n T}$$

ile tanımlanır (Burada bazı j değerleri için m_j kompleks değerli olabilir (Ward, 2025).

Karakteristik üsteller için aşağıdaki özellikleri sıralayabiliriz:

- i) Karakteristik çarpanlar $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, $B = X(T)$ matrisinin özdeğerleridir. Burada $X(0) = I$ dir ve Teorem 1.10 ii) den
$$\det(B) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = \exp \left(\int_0^T iz(A(s)) ds \right)$$
- ii) $iz(B) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$, yani bir matrisin izi özdeğerleri toplamıdır.
- iii) Karakteristik üsteller tek türlü belirli değildir. Çünkü $\rho_j = e^{(m_j)T}$ de karakteristik üstel ise $\rho_j = e^{(m_j + 2\pi i/T)T}$ de bir karakteristik üsteldir.
- iv) Karakteristik çarpanlar ρ_j , temel matris çözümünden bağımsızdır.

İspat: Kabul edelim ki $X_1(t)$ başka bir temel matris çözümü olsun. $X_1(t+T) = X_1(t)B_1$.
Önceki teoremin ispatından biliyoruz ki eğer $X(t)$ ve $X_1(t)$ aynı sistemin temel matris
çözümleri iseler, bir singüler olmayan C matrisi vardır, öyle ki
 $X_1(t) = X(t)C$ Buradan da ,

$$\begin{aligned} X_1(t+T) &= X(t+T)C \\ \Rightarrow (X_1(t)B) &= (X(t)B)C \\ \Rightarrow X(t)CB_1 &= X(t)BC \\ \Rightarrow CB_1 &= BC \\ \Rightarrow CB_1C^{-1} &= B. \end{aligned}$$

Dolayısıyla B ve B_1 in özdeğerleri eşittir.

Teorem 1.11: $x'(t) = A(t)x(t)$ sisteminin bir karakteristik çarpanını ρ ile, karakteristik
üstelini de m ile gösterelim. Öyle ki $\rho = e^{mT}$. Bu durumda $x'(t) = A(t)x(t)$ sisteminin bir
 $x(t)$ çözümü mevcuttur öyle ki

- i) $x(t+T) = \rho x(t)$
- ii) $x(t) = e^{mt}p(t)$ olacak şekilde T periyoduna sahip bir $p(t)$ periyodik çözümü
mevcuttur. (Ward, 2025)

İspat: Bir matrisin ρ özdeğerine karşılık gelen özvektörü b ile gösterelim. $x(t) = X(t)b$
olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$x'(t) = X'(t)b = AX(t)b = Ax(t)$$

ve

$$x(t+T) = X(t+T)b = X(t)Bb = \rho X(t)b = \rho x(t),$$

böylece

$$x(t+T) = \rho x(t)$$

sağlanır.

- ii) $p(t+T) = x(t)e^{-mt}$ olarak tanımlansın. $p(t+T) = p(t)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} p(t+T) &= x(t+T)e^{-m(t+T)} = \rho x(t)e^{-m(t+T)} = \frac{\rho}{e^{mT}} x(t)e^{-mT} \\ &= x(t)e^{-mt} \end{aligned}$$

$$= p(t).$$

Böylece periyodik bir $p(t)$ çözümü mevcuttur ve

$$x(t) = e^{mt}p(t).$$

Sonuç 1.2: Eğer m yerine $m + \frac{2\pi i}{T}$ yazılırsa $x(t) = e^{mt}p(t)e^{\frac{2\pi it}{T}}$ ve $p(t)e^{\frac{2\pi it}{T}}$ nin de periyodu T dir.

$$\begin{aligned} 2. x_j(t+T) &= \rho_j x_j(t), \\ x_j(t+NT) &= \rho_j^N x_j(t) \end{aligned}$$

ve her bir karakteristik çarpan için aşağıdakilerden biri gerçekleşir.

- a) Eğer $|\rho| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(m) < 0$ ve bu durumda $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).
- b) Eğer $|\rho| = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(m) = 0$ ve bu durumda yarı periyodik çözüm mevcuttur. Eğer $\rho = \mp 1$ ise bu durumda çözüm periyodiktir ve T periyoduna sahiptir.
- c) Eğer $|\rho| > 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(m) > 0$ ve bu durumda $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Ayrıca eğer bütün ρ_j karakteristik çarpanları $|\rho_j| \leq 1$ ise çözümler kararlıdır.

iii) B matrisinin farklı $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ özdeğerlerine karşılık gelen n tane lineer bağımsız özvektörler; $b_1, b_2, \dots, b_n$ ise $x' = Ax$ sisteminin n tane lineer bağımsız çözümü mevcuttur ve bu çözümler $x(t) = e^{m_j t} p_j(t)$ ile verilir. $p_j(t+T) = p_j(t)$ dir. Böylece

$$X_0(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad P_0(t) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$D_0(t) = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad Y_0(t) = \begin{pmatrix} e^{m_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{m_n t} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$X_0 = P_0 Y_0, \quad Y_0' = D_0 Y_0.$$

iv) Eğer $\rho < 0$ ve reel ise $\rho = e^{(\gamma + \frac{\pi i}{T})T}$, $\rho = -e^{\gamma T}$. Bu durumda

$$x(t) = e^{mt}p(t) = e^{\gamma t} e^{\frac{i\pi t}{T}} p(t) = e^{\gamma t} q(t)$$

ve $p(t)$ nin periyodu T olduğundan $q(t)$ nin de T dir. $x(t)$ çözümünü reel seçebileceğimiz için, $q(t)$ yi de genelliği bozmadan reel seçebiliriz. Genel çözüm için, eğer $\rho_j < 0$ ise ρ_j yerine q_j ; m_j yerine γ_j alarak

$$P_0 = (p_1 \dots q_j \dots p_n), \quad Y_0 = \begin{pmatrix} e^{m_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{m_n t} \end{pmatrix}$$

ve

$$X_0(t) = P_0(t)Y_0(t)$$

yazabiliriz

v) Eğer ρ kompleks ise $\bar{\rho}$ de bir özdeğerdir. m ve $\bar{m}$ de karşılık gelen üstellerdir.

$$m := \gamma + i\sigma, p(t) := q(t) + ir(t)$$

olarak tanımlayalım. $q(t)$ ve $r(t)$, T periyotlu fonksiyonlardır.

$x(t) = e^{mt}p(t)$ çözümü $x' = A(t)x$ sistemini sağladığından eşlenik alınırsa

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{m}t}\bar{p}(t) \text{ ve}$$

$$x(t) = e^{(\gamma+i\sigma)t}(q(t) + ir(t))$$

$$= e^{\gamma t}[(q \cos(\sigma t) - r \sin(\sigma t)) + i(r \cos(\sigma t) + q \sin(\sigma t))]$$

ise

$$\bar{x}(t) = e^{(\gamma-i\sigma)t}(q(t) - ir(t))$$

$$= e^{\gamma t}[(q \cos(\sigma t) - r \sin(\sigma t)) - i(r \cos(\sigma t) + q \sin(\sigma t))].$$

Bu durumda lineer bağımsız reel çözümler

$$x_R = \text{Re}(e^{mt}p(t)) = e^{\gamma t}(\cos(\sigma t)q(t) - \sin(\sigma t)r(t))$$

$$x_I = \text{Im}(e^{mt}p(t)) = e^{\gamma t}(\sin(\sigma t)q(t) + \cos(\sigma t)r(t))$$

ve

$$X_0 = [x_1, \dots, x_R \ x_I \dots x_N], P_0 = [p_1 \dots q \ r \dots p_n]$$

olup

$$Y_0 = \begin{pmatrix} e^{m_1 t} & & & 0 \\ \vdots & e^{\gamma t} \cos(\sigma t) & e^{\gamma t} \sin(\sigma t) & \\ & -e^{\gamma t} \sin(\sigma t) & e^{\gamma t} \cos(\sigma t) & \\ 0 & & & e^{m_n t} \end{pmatrix}$$

olup

$$X_0(t) = P_0(t)Y_0(t)$$

İle verilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde teorik olarak verilen sonuçların bazı değişken katsayılı denklemlere uygulanışını inceleyeceğiz.

2.1. Bazı Değişken Katsayılı Denklemlere Floquet Teorisinin Uygulanması

Problem 2.1 :

$$x'' - x'(\sin t) - x \cos t = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$\psi_1(t) = P_1(t), \quad P_1(t + 2\pi) = P_1(t);$$

$$\psi_2(t) = (tP_1(t) + P_2(t)), \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

olacak şekilde

$$P_1(t) = e^{-\cos t},$$

$$P_2(t) = -te^{-\cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau \right) e^{-\cos t} + c_1 e^{-\cos t}, \quad c_1 \text{ sabit}$$

ile verilir. Burada

$$\gamma = \int_0^{2\pi} e^{\cos \tau} d\tau$$

biçimindedir.

Çözüm:

Diferansiyel denklemi incelersek

$$x'' - x' \sin t - x \cos t = 0 \quad (36)$$

denklemi ikinci mertebeden değişken katsayılı bir denklemdir. Denklemin çözümü için

$$x'' - x' \sin t - x \cos t = (x' - x \sin t)'$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$(x' - x \sin t)' = 0$$

buradan da

$$x' - x \sin t = c_1, \quad c_1 \text{ sabit}$$

lineer denklemi elde edilir. İntegral çarpanı $u(t) = e^{-\int \sin t dt} = e^{\cos t}$

olduğuna göre her iki tarafı integral çarpanı ile çarparsak

$$e^{\cos t} x' - e^{\cos t} x \sin t = e^{\cos t} c_1$$

$$\Rightarrow e^{\cos t} (x' - x \sin t) = e^{\cos t} c_1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (x e^{\cos t}) = c_1 e^{\cos t}$$

$$\Rightarrow x(t) e^{\cos t} = c_1 \int e^{\cos t} dt + c_2$$

ve

$$x(t) = c_1 e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + c_2 e^{-\cos t} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

olduğu görülür. Buradan lineer bağımsız x_1 ve x_2 çözümleri kullanılarak

$\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1$ koşullarını sağlayan $\Phi_1(t)$ ve $\Phi_2(t)$

lineer bağımsız çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\Phi_1(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$\Phi_1'(t) = c_1 x_1'(t) + c_2 x_2'(t)$$

olmak üzere

$$\Phi_1(t) = c_1 e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + c_2 e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow \Phi_1'(t) = c_1 \sin t e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + c_1 + c_2 \sin t e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_1(0) = 1 &\Rightarrow c_2 e^{-1} = 1 \Rightarrow c_2 = e \\ \Phi_1'(0) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi_1(t) = e e^{-\cos t} = e^{1-\cos t}$$

yazılır. Benzer şekilde;

$$\Phi_2(t) = d_1 e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + d_2 e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow \Phi_2'(t) = d_1 \sin t e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + d_1 + d_2 \sin t e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Phi_2(0) &= 0 \Rightarrow d_2 e^{-1} = 0 \Rightarrow d_2 = 0 \\ \Phi_2'(0) &= 1 \Rightarrow d_1 = 1 \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi_2'(t) = \sin t e^{-\cos t} \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + 1$$

yazılır. $\Phi_1(t)$ ve $\Phi_2(t)$ kullanılarak Floquet üstellerini hesaplamak için kuadratik denklem oluşturulursa

$$\rho^2 - (\Phi_1(2\pi) + \Phi_2'(2\pi))\rho + \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - 2\rho + \exp \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - 2\rho + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$$

elde edilir. Teorem 1.8 de (26) eşitliğinden

$$\left. \begin{aligned} e^{am_1} &= 1 \Rightarrow m_1 = 0 \\ e^{am_2} &= 1 \Rightarrow m_2 = 0 \end{aligned} \right\} m_1 = m_2 = 0$$

yazılır. Teorem 1.8 ii) gereği (36) denkleminin

$$\psi_1(t) = e^{mt} P_1(t), \quad P_1(t + 2\pi) = P_1(t)$$

ve

$$\psi_2(t) = e^{mt} \cdot (tP_1(t) + P_2(t)), \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

olacak şekilde lineer bağımsız çözümleri mevcuttur. Burada $m_1 = m_2 = 0 = m$ olduğundan

$$\psi_1(t) = e^{-\cos t} = P_1(t)e^{0t}, P_1(t + 2\pi) = P_1(t) = e^{-\cos t}$$

periyodik çözümü elde edilir.

Benzer şekilde ,

$$\psi_2(t) = e^{mt}[tP_1(t) + P_2(t)], P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

lineer bağımsız çözümü mevcuttur. $\psi_2(t)$ çözüm olduğundan denklemi sağlar. $P_2(t)$ yi bulmak için $\psi_2(t)$ yi (36) denkleminde yerine yazalım.

$\psi_2(t) = te^{-\cos t} + P_2(t)$ olduğuna göre

$$\psi_2'' - \psi_2'(\sin t) - \psi_2 \cos t = 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow \psi_2' = (tP_1(t) + P_2(t))' = (te^{-\cos t} + P_2(t))'$$

$$\Rightarrow \psi_2' = e^{-\cos t} + t \sin t e^{-\cos t} + P_2'(t)$$

$$\Rightarrow \psi_2'' = \sin t e^{-\cos t} + (\sin t + t \cos t)e^{-\cos t} + t \sin^2 t e^{-\cos t} + P_2''$$

elde edilir. (37) eşitliğinde $\psi_2'', \psi_2', \psi_2$ yerine yazılırsa

$$\sin t e^{-\cos t} + (\sin t + t \cos t)e^{-\cos t} + t \sin^2 t e^{-\cos t} + P_2''(t) - [e^{-\cos t} \sin t + t \sin^2 t e^{-\cos t} + P_2'(t) \sin t] - [t \cos t e^{-\cos t} + P_2(t) \cos t] = 0$$

$$\Rightarrow \sin t e^{-\cos t} + P_2'(t) \sin t + P_2''(t) - P_2(t) \cos t = 0$$

$$\Rightarrow P_2''(t) - P_2'(t) \sin t - P_2(t) \cos t = -\sin t e^{-\cos t}$$

$$\Rightarrow (P_2' - P_2 \sin t)' = -(e^{-\cos t})'$$

$$\Rightarrow P_2' - P_2 \sin t = -e^{-\cos t} + c$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\int \sin t dt} = e^{\cos t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(P_2 e^{\cos t}) = -e^{-\cos t} e^{\cos t} + c e^{\cos t}$$

$$\Rightarrow P_2 e^{\cos t} = -t + c \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + c_1$$

$$P_2(t) = \left(-t + c \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + c_1\right) e^{-\cos t}, c, c_1 \text{ keyfi sabitler}$$

P_2 periyodik olacak şekilde c değerini belirleyelim:

$$P_2(t + 2\pi) = \left[-(t + 2\pi) + c \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + \int_t^{t+2\pi} e^{\cos \tau} d\tau\right) + c_1\right] e^{-\cos t}.$$

ifadesinde

$$\int_t^{t+2\pi} e^{\cos \tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{\cos \tau} d\tau = \gamma$$

eşitliği kullanılırsa;

$$P_2(t + 2\pi) = \left[-t + c \int_0^t e^{\cos \tau} d\tau + \gamma c - 2\pi + c_1\right] e^{-\cos t}$$

$\gamma c = 2\pi$ olacak şekilde c değerini seçelim; $c = \frac{2\pi}{\gamma}$ alınırsa:

$$P_2(t) = -te^{-\cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau\right) e^{-\cos t} + c_1 e^{-\cos t}$$

periyodiktir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} P_2(t + 2\pi) &= -te^{-\cos t} - 2\pi e^{-\cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau\right) e^{-\cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \gamma e^{-\cos t} + c_1 e^{-\cos t} \\ &= P_2(t). \end{aligned}$$

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= te^{-\cos t} + \left(-te^{-\cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau\right) e^{-\cos t}\right) + c_1 e^{-\cos t} \\ \Rightarrow \psi_2(t) &= \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{\cos \tau} d\tau\right) e^{-\cos t} + c_1 e^{-\cos t} \end{aligned}$$

şeklinde bir çözümdür.

Problem 2.2:

$$x'' - x' \cos t + x \sin t = 0, x \in [0, 2\pi]$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı denkleminin Floquet üstelleri ve karakteristik çarpanları

$$m_1 = 0, m_2 = 0 \text{ ve } \rho_1 = \rho_2 = 1$$

ve lineer bağımsız çözümleri;

$$X_1(t) = P_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix}, P_1(t + 2\pi) = P_1(t)$$

$$X_2(t) = tP_1(t) + P_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\gamma} e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 e^{\sin t} \\ \frac{2\pi}{\gamma} \cos t e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \cos t e^{\sin t} + \frac{2\pi}{\gamma} \end{pmatrix},$$

$$P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

ile verilir. Burada $\int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau = \gamma$ biçimindedir.

Çözüm:

$$x'' - x' \cos t + x \sin t = 0 \quad (38)$$

denklemini değişken katsayılı olduğu için bir önceki problemde olduğu gibi denklemin karakteristik polinomu yardımıyla çözümü mümkün değildir. Ancak denklemini aşağıdaki gibi çözebiliriz:

$$x'' - x' \cos t + x \sin t = 0$$

denklemini

$$x'' - x' \cos t + x \sin t = (x' - x \cos t)'$$

şeklinde yeniden yazılırsa, (38) denkleminin sağlanması için

$$(x' - x \cos t)' = 0$$

olmalıdır. Buradan $x' - x \cos t = c_1$ ve bu denklem lineerdir. Dolayısıyla integral çarpanı:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\int \cos t dt} \\ &= e^{-\sin t} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} e^{-\sin t} x'' - e^{-\sin t} x' \cos t &= e^{-\sin t} c_1 \\ \Rightarrow (e^{-\sin t} x)' &= e^{-\sin t} c_1 \\ \Rightarrow e^{-\sin t} x &= c_1 \int e^{-\sin t} dt + c_2 \\ \Rightarrow x &= e^{\sin t} c_1 \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + e^{\sin t} c_2 \end{aligned} \quad (39)$$

elde edilir. Öte yandan ikinci mertebe bir denklem sistemlerle ifade edilebileceğinden

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x'$$

olarak tanımlanırsa, (39) denklemi $X' = AX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

matrisi ile ifade edilir. Burada (39) çözümü dikkate alındığında temel çözüm matrisi $\Phi(t)$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau & e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + 1 & \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau & 1 \\ \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$B = \Phi^{-1}(0)\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau & 1 \\ \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \det B = 1 = \rho_1 \rho_2 \\ iz(B) = 2 = \rho_1 + \rho_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1 \text{ (Karakteristik çarpanlar)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_1 = e^{2\pi m_1} = 1 \Rightarrow m_1 = 0 \\ \rho_2 = e^{2\pi m_2} = 1 \Rightarrow m_2 = 0 \end{array} \right\} \text{Floquet üstelleri}$$

olarak elde edilir. Teorem 1.8 ii) gereği (39) denkleminin

$$X_1(t) = P_1(t), \quad P_1(t + 2\pi) = P_1(t)$$

$$X_2(t) = e^{mt}[tP_1(t) + P_2(t)], \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

olacak şekilde lineer bağımsız çözümleri mevcuttur. Burada $m_1 = m_2 = 0 = m$ olduğundan

$$X_1(t) = e^{mt}P_1(t) \text{ ve } X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix},$$

$$P_1(t + 2\pi) = P_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

periyodik çözümü elde edilir. Benzer şekilde,

$$X_2(t) = e^{mt} \cdot (tP_1(t) + P_2(t)), \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

lineer bağımsız çözümü mevcuttur. Burada

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa;

$$X_2(t) = t \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$$

elde edilir. $P_2(t)$ yi bulmak için $X_2(t)$ yi $X' = AX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ sisteminde yerine yazalım. $X_2(t)$ çözüm olduğundan sistemi sağlayacaktır. O halde:

$$\begin{aligned} \left[t \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} \right]' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[t \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} \right] \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} te^{\sin t} + a_1(t) \\ t \cos t e^{\sin t} + a_2(t) \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{\sin t} + a_1(t) \\ t \cos t e^{\sin t} + a_2(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{\sin t} + t \cos t e^{\sin t} + a_1'(t) \\ (\cos t - t \sin t)e^{\sin t} + t \cos^2(t)e^{\sin t} + a_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \cos t e^{\sin t} + a_2(t) \\ -t \sin t e^{\sin t} - \sin t a_1(t) + t \cos^2(t)e^{\sin t} + \cos t a_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Buradan

$$e^{\sin t} + t \cos t e^{\sin t} + a_1'(t) = t \cos t e^{\sin t} + a_2(t) \quad (40)$$

ve

$$\begin{aligned} (\cos t - t \sin t)e^{\sin t} + t \cos^2(t)e^{\sin t} + a_2'(t) &= -t \sin t e^{\sin t} - \sin t a_1(t) + \\ &+ t \cos^2(t)e^{\sin t} + \cos t a_2(t) \end{aligned} \quad (41)$$

yazılır.

(40) eşitliğinden $a_2(t) = e^{\sin t} + a_1'(t)$ ifadesi (41) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\cos t e^{\sin t} + \cos t e^{\sin t} + a_1''(t) = -a_1(t) \sin t + \cos t e^{\sin t} + \cos t a_1'(t)$$

$$\Rightarrow a_1'' - a_1' \cos t + a_1 \sin t = -\cos t e^{\sin t}$$

$$\Rightarrow (a_1' - a_1 \cos t)' = (-e^{\sin t})'$$

$$\Rightarrow a_1' - a_1 \cos t = -e^{\sin t} + c_1$$

İntegral çarpanı:

$$u(t) = e^{-\int \cos t dt} = e^{-\sin t}$$

$$\Rightarrow e^{-\sin t} a_1' - e^{-\sin t} a_1 \cos t = -1 + e^{-\sin t} c_1$$

$$\Rightarrow (e^{-\sin t} a_1)' = -1 + e^{-\sin t} c_1$$

$$\Rightarrow e^{-\sin t} a_1 = -t + c_1 \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2$$

$$\Rightarrow a_1 = e^{\sin t} \left(-t + c_1 \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right).$$

$a_1(t)$ periyodik olması için c_1 sabitini belirleyelim:

$$\Rightarrow a_1(t + 2\pi) = e^{\sin(t+2\pi)} \left(-(t + 2\pi) + c_1 \int_0^{t+2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right)$$

$$\Rightarrow a_1(t + 2\pi) = e^{\sin(t+2\pi)} \left(-(t + 2\pi) + c_1 \left(\int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + \int_t^{t+2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau \right) + c_2 \right)$$

Burada $\int_t^{t+2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{-\sin \tau} d\tau = \gamma$ alınırsa

$$a_1(t + 2\pi) = e^{\sin t} \left(-t + c_1 \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + \gamma c_1 + c_2 - 2\pi \right)$$

$$\Rightarrow \gamma c_1 - 2\pi = 0$$

$$\Rightarrow \gamma c_1 = 2\pi$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{2\pi}{\gamma}$$

seçelim. Böylece

$$a_1(t) = e^{\sin t} \left(-t + \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right).$$

Ayrıca $a_2(t) = e^{\sin t} + a_1'(t)$ idi. Böylece

$$a_2(t) = e^{\sin t} + \cos t e^{\sin t} \left(-t + \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right) + \left(-1 + \frac{2\pi}{\gamma} e^{-\sin t} \right) e^{\sin t}$$

$$\Rightarrow a_2(t) = \cos t e^{\sin t} \left(-t + \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right) + \frac{2\pi}{\gamma}$$

elde edilir. Buradan

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \left(-t + \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right) \\ \cos t e^{\sin t} \left(-t + \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \right) + \frac{2\pi}{\gamma} \end{pmatrix}, P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

ve

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -t e^{\sin t} + \frac{2\pi}{\gamma} e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 e^{\sin t} + t e^{\sin t} \\ -t \cos t e^{\sin t} + \frac{2\pi}{\gamma} \cos t e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \cos t e^{\sin t} + \frac{2\pi}{\gamma} + t \cos t e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

olur. Sonuç olarak;

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\gamma} e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 e^{\sin t} \\ \frac{2\pi}{\gamma} \cos t e^{\sin t} \int_0^t e^{-\sin \tau} d\tau + c_2 \cos t e^{\sin t} + \frac{2\pi}{\gamma} \end{pmatrix}$$

yazılır.

Problem 2.3: İki bilinmeyenli ikinci mertebeden

$$x_1' = \left(1 - \frac{\sin t}{2 + \cos t} \right) x_1 \quad (42)$$

$$x_2' = x_1 - x_2 \quad (43)$$

denklem sisteminin Floquet üstelleri, karakteristik çarpanları:

$$m_1 = 1, m_2 = -1; \rho_1 = e^{2\pi}, \rho_2 = e^{-2\pi}$$

ve periyodik çözümleri:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos t \\ 1 + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \end{pmatrix}, P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Çözüm:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sin t}{2 + \cos t} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere verilen denklem sistemi, $x' = Ax$ şeklindedir. (42) denklemini çözülürse,

$$\begin{aligned} x_1' &= \left(1 - \frac{\sin t}{2 + \cos t}\right) x_1 \\ \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} &= \int \left(1 - \frac{\sin t}{2 + \cos t}\right) dt \\ \Rightarrow \ln|x_1| &= \int dt - \int \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt \\ \Rightarrow \ln|x_1(t)| &= t + \ln|2 + \cos t| + c_1 \\ \Rightarrow x_1(t) &= e^t(2 + \cos t)e^{c_1} \\ \Rightarrow x_1(t) &= e^t(2 + \cos t)c_2. \end{aligned}$$

(43) denklemini $x_1(t)$ kullanılarak çözülürse

$$\begin{aligned} x_2' &= x_1 - x_2 \Rightarrow x_2' + x_2 = x_1 \\ \Rightarrow x_2' + x_2 &= e^t(2 + \cos t)c_2 \\ (\text{integral carpanı} = u = e^{\int dt} = e^t) \\ \Rightarrow e^t x_2' + e^t x_2 &= e^{2t}(2 + \cos t)c_2 \\ \Rightarrow (e^t x_2)' &= e^{2t}c_2(2 + \cos t) \\ \Rightarrow e^t x_2 &= c_2 \int e^{2t}(2 + \cos t) dt + c_3 \\ \Rightarrow e^t x_2 &= 2c_2 \int e^{2t} dt + c_2 \underbrace{\int e^{2t} \cos t dt}_I + c_3. \end{aligned} \tag{44}$$

Burada $I = \int e^{2t} \cos t dt$ integralini hesaplayalım.

$$\int e^{2t} \cos t dt = \frac{1}{2} \cos t e^{2t} + \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{2t} \sin t dt}_J. \tag{45}$$

J değerini bulalım:

$$J = \int e^{2t} \sin t dt = \frac{1}{2} \sin t e^{2t} - \frac{1}{2} \int e^{2t} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} \sin t e^{2t} - \frac{1}{2} I.$$

J değerini (45) eşitliğinde yerine koyarsak:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cos t e^{2t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin t e^{2t} - \frac{1}{2} I \right) \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4} \right) I &= \frac{1}{2} \cos t e^{2t} + \frac{1}{4} \sin t e^{2t} \\ \Rightarrow I &= \frac{2}{5} \cos t e^{2t} + \frac{1}{5} \sin t e^{2t}. \end{aligned}$$

O halde I değerini (44) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} e^t x_2 &= \frac{1}{2} 2c_2 e^{2t} + c_2 \left(\frac{2}{5} \cos t e^{2t} + \frac{1}{5} \sin t e^{2t} \right) + c_3 \\ \Rightarrow x_2 &= c_2 e^t \left(1 + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right) + c_3 e^{-t} \\ \Rightarrow x(t) &= \begin{pmatrix} e^t (2 + \cos t) c_2 \\ c_2 e^t \left(1 + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right) + c_3 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= c_2 e^t \begin{pmatrix} 2 + \cos t \\ 1 + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X(t)C \end{aligned}$$

olduğundan

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t (2 + \cos t) & 0 \\ e^t \left(1 + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

bulunur.

$$\text{O halde } X(0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7}{5} & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorem 1.10 dan

$$B = X^{-1}(0)X(2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{2\pi} & 0 \\ \frac{7}{5}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ -\frac{14}{5}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\left. \begin{aligned} \det(B) &= e^{2\pi} e^{-2\pi} = 1 = \rho_1 \rho_2 \\ \text{iz}(B) &= \rho_1 + \rho_2 = e^{2\pi} + e^{-2\pi} \end{aligned} \right\} \rho_1 = e^{2\pi}, \rho_2 = e^{-2\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \rho_1 &= e^{2\pi m_1} = e^{2\pi} \Rightarrow m_1 = 1 \\ \rho_2 &= e^{2\pi m_2} = e^{-2\pi} \Rightarrow m_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} X_1(t) &= e^t P_1(t) \\ X_2(t) &= e^{-t} P_2(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde $P_1(t)$ ve $P_2(t)$ periyodik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos t \\ 1 + \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}, P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2.4: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\sin(2t) & \cos(2t) - 1 \\ \cos(2t) + 1 & \sin(2t) \end{pmatrix}$ olmak üzere:

$X' = AX$ sistemi için

- Floquet üstelleri: $m_1 = 1$ ve $m_2 = -1$
- Karakteristik çarpanları: $\rho_1 = e^{2\pi}$, $\rho_2 = e^{-2\pi}$
- $P_1(t)$, $P_2(t)$ periyodik fonksiyonları:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, P_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x' &= -\sin(2t)x + (\cos(2t) - 1)y \\ y' &= (\cos(2t) + 1)x + \sin(2t)y \end{aligned}$$

değişken katsayılı denklem sistemidir. Bazı trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa:

$$\begin{aligned} x' &= -2 \sin t \cos t x - 2 \sin^2 t y \\ y' &= 2 \cos^2 t x + 2 \sin t \cos t y \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} \cos(2t) - 1 = 1 - 2 \sin^2 t - 1 \\ = -2 \sin^2 t \\ \cos(2t) + 1 = 2 \cos^2(t) - 1 + 1 \\ = 2 \cos^2(t) \\ \sin 2t = 2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan:

$$\begin{aligned}x' &= -2 \sin t (\cos t x + \sin t y) \\y' &= 2 \cos t (\cos t x + \sin t y)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$z := \cos t x + \sin t y$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}z' &= -\sin t x + x' \cos t + \cos t y + y' \sin t \\&= -\sin t x + \cos t y - 2 \sin t z \cos t + 2 \cos t z \sin t\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}z'' &= -\cos t x - \sin t x' - \sin t y + \cos t y' \\&= \underbrace{-\cos t x - \sin t y}_{-z} + \underbrace{2 \sin^2 t z + 2 \cos^2 t z}_{2z} \\&= -z + 2z \\&\Rightarrow z'' = z\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$z'' = z \Rightarrow z'' - z = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r = \mp 1 \Rightarrow z = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \sin t z(t) = -2 \sin t (c_1 e^t + c_2 e^{-t}) \\ y' = 2 \cos t z(t) = 2 \cos t (c_1 e^t + c_2 e^{-t}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -2c_1 \int e^t \sin t - 2c_2 \int e^{-t} \sin t + d_1 \\ y(t) = 2c_1 \int e^t \cos t + 2c_2 \int e^{-t} \cos t + d_2. \end{cases}$$

İntegralleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$I_1 := \int e^t \sin t dt, I_2 := \int e^{-t} \sin t dt, I_3 := \int e^t \cos t dt, I_4 := \int e^{-t} \cos t dt$$

olarak tanımlayalım.

$$I_1 = \int e^t \sin t \, dt = \sin t \, e^t - \underbrace{\int e^t \cos t \, dt}_{J_1}. \quad (46)$$

Öncelikle J_1 değerini bulalım:

$$J_1 = \int e^t \cos t \, dt = \cos t \, e^t + \underbrace{\int e^t \sin t \, dt}_{I_1}$$

J_1 , (46) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sin t \, e^t - (\cos t \, e^t + I_1) \\ \Rightarrow 2I_1 &= \sin t \, e^t - \cos t \, e^t \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 = \int e^{-t} \sin t \, dt = -\sin t \, e^{-t} + \underbrace{\int e^{-t} \cos t \, dt}_{J_2}. \quad (47)$$

J_2 değerini bulalım:

$$J_2 = \int e^{-t} \cos t \, dt = -\cos t \, e^{-t} - \underbrace{\int e^{-t} \sin t \, dt}_{I_2}$$

J_2 , (47) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= -\sin t \, e^{-t} + (-\cos t \, e^{-t} - I_2) \\ \Rightarrow 2I_2 &= -\sin t \, e^{-t} - \cos t \, e^{-t} \\ \Rightarrow I_2 &= -\frac{e^{-t}}{2} (\sin t + \cos t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$I_3 = \int e^t \cos t \, dt = \cos t \, e^t + \underbrace{\int e^t \sin t \, dt}_{J_3}. \quad (48)$$

J_3 değerini bulalım.

$$J_3 = \int e^t \sin t \, dt = \sin t \, e^t - \underbrace{\int e^t \cos t \, dt}_{I_3}$$

J_3 , (48) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$I_3 = \cos t \, e^t + \sin t \, e^t + I_3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2I_3 &= \cos t e^t + \sin t e^t \\ \Rightarrow I_3 &= \frac{e^t}{2} (\cos t + \sin t)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$I_4 = \int e^{-t} \cos t dt = -\cos t e^{-t} - \underbrace{\int e^{-t} \sin t dt}_{I_4}. \quad (49)$$

I_4 değerini bulalım:

$$I_4 = \int e^{-t} \sin t dt = -\sin t e^{-t} + \underbrace{\int e^{-t} \cos t dt}_{I_4}.$$

I_4 , (49) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}I_4 &= -\cos t e^{-t} + \sin t e^{-t} - I_4 \\ \Rightarrow 2I_4 &= -\cos t e^{-t} + \sin t e^{-t} \\ \Rightarrow I_4 &= \frac{e^{-t}}{2} (\sin t - \cos t)\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde:

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 e^t (\sin t - \cos t) + c_2 e^{-t} (\cos t + \sin t) + d_1 \\ y(t) = c_1 e^t (\cos t + \sin t) + c_2 e^{-t} (\sin t - \cos t) + d_2. \end{cases}$$

$d_1 = d_2 = 0$ alınırsa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t (\cos t - \sin t) + c_2 e^{-t} (\cos t + \sin t) \\ c_1 e^t (\cos t + \sin t) + c_2 e^{-t} (\sin t - \cos t) \end{pmatrix} = X(t)C$$

olmak üzere temel çözüm matrisi

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t (\cos t - \sin t) & e^{-t} (\cos t + \sin t) \\ e^t (\cos t + \sin t) & e^{-t} (\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

elde edilir. $B = X^{-1}(0)X(2\pi)$ olduğundan,

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1}(0) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ve

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{-2\pi} \\ e^{2\pi} & -e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

Böylece

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{-2\pi} \\ e^{2\pi} & -e^{-2\pi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ 0 & 2e^{-2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \det(B) &= \rho_1 \rho_2 = 1 \\ \text{iz}(B) &= \rho_1 + \rho_2 = e^{2\pi} + e^{-2\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_1 = e^{2\pi}, \rho_2 = e^{-2\pi}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1 &= e^{2\pi m_1} = e^{2\pi} \Rightarrow m_1 = 1 \\ \rho_2 &= e^{2\pi m_2} = e^{-2\pi} \Rightarrow m_2 = -1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} X_1(t) &= e^t P_1(t) \Rightarrow e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} = e^t P_1(t) \\ X_2(t) &= e^{-t} P_2(t) \Rightarrow e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} = e^{-t} P_2(t) \end{aligned} \right\}$$

olacak şekilde $P_1(t)$ ve $P_2(t)$ periyodik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, P_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

Teorem 2.1: b sabit olmak üzere

$$x'' - bx' \sin t - bx \cos t = 0, x \in [0, 2\pi], (b \neq 0)$$

denkleminin Floquet üstelleri ve karakteristik çarpanları:

$$m_1 = 0, m_2 = 0 \text{ ve } \rho_1 = \rho_2 = 1$$

ve periyodik çözümleri:

$$P_1(t) = e^{-b \cos t}, P_1(t + 2\pi) = P_1(t)$$

$$P_2(t) = -te^{-b \cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \right) e^{-b \cos t} + c_1 e^{-b \cos t}, P_2(t + 2\pi) = P_2(t);$$

Öyle ki

$$\gamma = \int_0^{2\pi} e^{b \cos \tau} d\tau$$

ile verilir.

İspat:

$$x'' - bx' \sin t - bx \cos t = 0 \quad (50)$$

denkleminin bir çözümü

$$x_1 = e^{-b \cos t}$$

şeklindedir. Gerçekten

$$x_1' = b \sin t e^{-b \cos t}$$

$$\Rightarrow x_1'' = b \cos t e^{-b \cos t} + (b \sin t)^2 e^{-b \cos t}$$

yerine yazılırsa

$$b \cos t e^{-b \cos t} + (b \sin t)^2 e^{-b \cos t} - (b \sin t)^2 e^{-b \cos t} - b \cos t e^{-b \cos t} = 0$$

olur. Mertebenin düşürülmesi metodu ile diğer çözümü elde edelim:

$$x = x_1 u$$

dönüşümü uygulanırsa

$$x = e^{-b \cos t} u$$

$$\Rightarrow x' = b \sin t e^{-b \cos t} u + e^{-b \cos t} u'$$

$$= e^{-b \cos t} (b \sin t u + u')$$

$$\Rightarrow x'' = b \sin t e^{-b \cos t} (b \sin t u + u') + (b \cos t u + b \sin t u' + u'') e^{-b \cos t}$$

$$= e^{-b \cos t} ((b \sin t)^2 u + 2b \sin t u' + b \cos t u + u'').$$

x' ve x'' değerleri verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$e^{-b \cos t} ((b \sin t)^2 u + 2b \sin t u' + b \cos t u + u'')$$

$$- e^{-b \cos t} ((b \sin t)^2 u + b \sin t u' - e^{-b \cos t} b \cos t u) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-b \cos t} (b \sin t u' + u'') = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $e^{-b \cos t}$ ile bölersek;

$$b \sin t u' + u'' = 0$$

elde edilir. Bu denklemde mertebe düşürülmesi için $u' = v$ alınır.

$$b \sin t v + v' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -b \sin t v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -b \sin t dt$$

$$\Rightarrow \ln v = - \int b \sin t dt + c_1$$

$$\Rightarrow v = e^{b \cos t} e^{c_1}.$$

$v = u'$ olduğundan

$$u' = e^{b \cos t} e^{c_1}$$

$$\Rightarrow u = \int e^{b \cos t} e^{c_1} dt + c_2$$

$$= c_3 \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + c_2.$$

$x = e^{-b \cos t} u$ olduğundan

$$x = e^{-b \cos t} \left(c_3 \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + c_2 \right)$$

$$\Rightarrow x = c_2 e^{-b \cos t} + c_3 e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau = c_2 x_1 + c_3 x_2.$$

Buradan lineer bağımsız x_1 ve x_2 çözümleri kullanılarak

$\Phi_1(0) = 1, \Phi_1'(0) = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2'(0) = 1$ koşullarını sağlayan $\Phi_1(t)$ ve $\Phi_2(t)$

lineer bağımsız çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t) &= c_2 x_1(t) + c_3 x_2(t) \\ \Phi_1'(t) &= c_2 x_1'(t) + c_3 x_2'(t) \end{aligned} \right\}$$

olmak üzere

$$\Phi_1(t) = c_2 e^{-b \cos t} + c_3 e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau$$

$$\Rightarrow \Phi_1'(t) = c_2 b \sin t e^{-b \cos t} + c_3 b \sin t e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + c_3.$$

Böylece

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(0) = 1 &\Rightarrow c_2 e^{-b} = 1 \Rightarrow c_2 = e^b \\ \Phi_1'(0) = 0 &\Rightarrow c_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi_1(t) = e^b \cdot e^{-b \cos t} = e^{b-b \cos t}.$$

Benzer şekilde:

$$\Phi_2(t) = d_1 e^{-b \cos t} + d_2 e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau$$

olduğundan

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(0) = 0 &\Rightarrow d_1 e^{-b} = 0 \\ \Phi_2'(0) = 1 &\Rightarrow d_2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d_1 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \\ \Rightarrow \Phi_2'(t) &= b \sin t e^{-b \cos t} \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + 1 \end{aligned}$$

yazılır. $\Phi_1(t)$ ve $\Phi_2(t)$ kullanılarak Floquet üstellerini hesaplamak için kuadratik denklem oluşturulursa

$$\rho^2 - (\Phi_1(2\pi) + \Phi_2'(2\pi))\rho + \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - 2\rho + \exp \int_0^{2\pi} b \sin t dt = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - 2\rho + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$$

elde edilir. O halde:

$$\left. \begin{aligned} e^{am_1} &= 1 \Rightarrow m_1 = 0 \\ e^{am_2} &= 1 \Rightarrow m_2 = 0 \end{aligned} \right\} m_1 = m_2 = 0 = m$$

yazılır. Bu durumda Teorem 1.8. ii) den:

$$\psi_1(t) = e^{mt} P_1(t), \quad P_1(t + 2\pi) = P_1(t)$$

ve

$$\psi_2(t) = e^{mt} \cdot (tP_1(t) + P_2(t)), \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

olacak şekilde lineer bağımsız çözümleri mevcuttur.

Burada $m = 0$ olduğundan

$$\psi_1(t) = e^{-b \cos t} = P_1(t)e^{0t}; P_1(t + 2\pi) = P_1(t) = e^{-b \cos t}$$

periyodik çözümü elde edilir. Benzer şekilde

$$\psi_2(t) = e^{mt} [tP_1(t) + P_2(t)], \quad P_2(t + 2\pi) = P_2(t)$$

lineer bağımsız çözümü mevcuttur. $\psi_2(t)$ çözüm olduğundan denklemi sağlar. $P_2(t)$ yi bulmak için $\psi_2(t)$ yi (50) denkleminde yerine yazalım. $\psi_2(t) = te^{-b \cos t} + P_2(t)$ olmak üzere

$$\psi_2'' - b\psi_2'(\sin t) - b\psi_2 \cos t = 0 \quad (51)$$

$$\Rightarrow \psi_2' = (tP_1(t) + P_2(t))' = (te^{-b \cos t} + P_2(t))'$$

$$\Rightarrow \psi_2' = e^{-b \cos t} + bt \sin t e^{-b \cos t} + P_2'(t)$$

$$\Rightarrow \psi_2'' = b \sin t e^{-b \cos t} + (b \sin t + bt \cos t)e^{-b \cos t} + b^2 t \sin^2 t e^{-b \cos t} + P_2''$$

elde edilir. (51) eşitliğinde ψ_2'' , ψ_2' , ψ_2 yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & b \sin t e^{-b \cos t} + (b \sin t + bt \cos t)e^{-b \cos t} + b^2 t \sin^2 t e^{-b \cos t} + P_2'' \\ & - b \sin t (e^{-b \cos t} + bt \sin t e^{-b \cos t} + P_2'(t)) - b \cos t (te^{-b \cos t} + P_2(t)) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Buradan

$$b \sin t e^{-b \cos t} - P_2'(t)b \sin t + P_2''(t) - P_2(t)b \cos t = 0$$

$$\Rightarrow P_2''(t) - P_2'(t)b \sin t - P_2(t)b \cos t = -b \sin t e^{-b \cos t}$$

$$\Rightarrow (P_2' - b \sin t P_2)' = -(e^{-b \cos t})'$$

$$\Rightarrow P_2' - b \sin t P_2 = -e^{-b \cos t} + c.$$

İntegral çarpanı:

$$u(t) = e^{-\int b \sin t dt} = e^{b \cos t}$$

olur. böylece

$$e^{b \cos t} P_2' - b \sin t e^{b \cos t} P_2 = -1 + c e^{b \cos t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (P_2 e^{b \cos t}) = -1 + c e^{b \cos t}$$

$$\Rightarrow P_2 e^{b \cos t} = -t + c \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + c_1$$

$$\Rightarrow P_2(t) = \left(-t + c \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + c_1 \right) e^{-b \cos t}, \quad c \text{ keyfi sabit}$$

elde edilir. P_2 periyodik olacak şekilde c değerini belirleyelim:

$$P_2(t + 2\pi) = \left[-(t + 2\pi) + c \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + \int_t^{t+2\pi} e^{b \cos \tau} d\tau \right) + c_1 \right] e^{-b \cos t}$$

ifadesinde

$$\int_t^{t+2\pi} e^{b \cos \tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{b \cos \tau} d\tau = \gamma$$

eşitliği kullanılırsa:

$$P_2(t + 2\pi) = \left[-t + c \int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau + \gamma c - 2\pi + c_1 \right] e^{-b \cos t}.$$

$\gamma c = 2\pi$ olacak şekilde c değerini seçelim. $c = \frac{2\pi}{\gamma}$ alınırsa;

$$P_2(t) = -t e^{-b \cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \right) e^{-b \cos t} + c_1 e^{-b \cos t}$$

periyodiktir. Gerçekten

$$\begin{aligned} P_2(t + 2\pi) &= -t e^{-b \cos t} - 2\pi e^{-b \cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \right) e^{-b \cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \gamma e^{-b \cos t} \\ &\quad + c_1 e^{-b \cos t} = P_2(t). \end{aligned}$$

periyodiktir.

Sonuç olarak;

$$\psi_2(t) = te^{-b \cos t} - te^{-b \cos t} + \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \right) e^{-b \cos t} + c_1 e^{-b \cos t}$$

$$\Rightarrow \psi_2(t) = \frac{2\pi}{\gamma} \left(\int_0^t e^{b \cos \tau} d\tau \right) e^{-b \cos t} + c_1 e^{-b \cos t}$$

şeklinde bir çözümdür.

2.2. Sarkaç Problemi ve Kararlılık

Verilen kararlılık teorisinin uygulaması olarak sarkaç problemi incelenecektir. Bunun için;

ε =genlik, w =etki eden kuvvetin frekansı, δ =magnitude olmak üzere,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta + \varepsilon \sin wt)x = 0 \quad (52)$$

ve parçalı salınımını

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta + \varepsilon)x = 0, 0 < t < \frac{T}{2} \quad (53)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta - \varepsilon)x = 0, \frac{T}{2} < t < T \quad (54)$$

ele alalım. (52) denkleminde $\sin wt$ sürekli değişim gösterdiğinden D (diskriminant) fonksiyonunun incelenebilmesi için uygulanan $\sin wt$ kuvveti () yerine (53) ve (54) ile verilen

() parçalı salınımları kullanılacaktır.

$x = 0$ konumunda sarkaç aşağı pozisyonunda dengededir. (kararlıdır)

$x = \pi$ konumu ise sarkacın tam yukarıda olduğu pozisyonu göstermektedir.

Aşağıdaki teoremden $x = \pi$ pozisyonunda (sarkaç tam yukarıdayken) çözümün kararlı olabilmesi (sarkacın sürekli yukarıda kalabilmesi) için D (diskriminant) incelenecektir:

Teorem 2.2: İkinci mertebeden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta + \varepsilon \sin wt)x = 0$$

denkleminin $x = \pi$ konumunda kararlı çözüme sahip olması için $D \leq 2$, $w \rightarrow \infty$ sağlanmalıdır. Burada:

$$\sqrt{\delta + \varepsilon} = a_1 \text{ ve } \sqrt{\delta - \varepsilon} = a_2$$

şeklindedir.

İspat: X_1 ve X_2 fonksiyonları (52) denkleminin

$$X_1(0) = 1, X_2(0) = 0$$

$$X_1'(0) = 0, X_2'(0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsun.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta + \varepsilon)x = 0, 0 < t < \frac{T}{2} \quad \text{probleminin çözümünü } \bar{X}_1(t) \text{ ile gösterelim.}$$

$$\bar{X}_1(t) = c_1 \cosh \sqrt{\delta + \varepsilon} t + c_2 \sinh \sqrt{\delta + \varepsilon} t.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta - \varepsilon)x = 0, \frac{T}{2} < t < T \quad \text{probleminin çözümünü } \bar{X}_2(t) \text{ ile gösterelim.}$$

$$\bar{X}_2(t) = c_3 \cosh \sqrt{\delta - \varepsilon} t + c_4 \sinh \sqrt{\delta - \varepsilon} t$$

(53) denkleminin $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0, \phi_2(0) = 0, \phi_2'(0) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan Φ_1 ve Φ_2 lineer bağımsız çözümlerini belirleyelim.

$$\phi_1(t) = d_1 \cosh \sqrt{\delta + \varepsilon} t + d_2 \sinh \sqrt{\delta + \varepsilon} t$$

$$\Rightarrow \phi_1'(t) = d_1 \sqrt{\delta + \varepsilon} \sinh \sqrt{\delta + \varepsilon} t + d_2 \sqrt{\delta + \varepsilon} \cosh \sqrt{\delta + \varepsilon} t$$

$$\sqrt{\delta + \varepsilon} = a_1 \text{ ve } \sqrt{\delta - \varepsilon} = a_2 \text{ alınırsa}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(0) &= d_1 = 1 \\ \phi_1'(0) &= a_1 d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \phi_1(t) = \cosh a_1 t \text{ ve } \phi_1'(t) = a_1 \sinh a_1 t.$$

Benzer şekilde

$$\phi_2(t) = d_3 \cosh a_1 t + d_4 \sinh a_1 t$$

$$\Rightarrow \phi_2'(t) = d_3 a_1 \sinh a_1 t + d_4 a_1 \cosh a_1 t$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \phi_2(0) &= d_3 = 0 \\ \phi_2'(0) &= a_1 d_4 = 1 \Rightarrow d_4 = \frac{1}{a_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \phi_2(t) = \frac{1}{a_1} \sinh a_1 t \text{ ve } \phi_2'(t) = \cosh a_1 t.$$

$$X_1: \begin{aligned} \phi_1\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2\left(\frac{T}{2}\right) \\ \phi_1'\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2'\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

$$X_2: \begin{aligned} \phi_2\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2\left(\frac{T}{2}\right) \\ \phi_2'\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2'\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, çözümün ve türevinin $\frac{T}{2}$ de sürekliliğinden:

$$\begin{aligned} \phi_1\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2\left(\frac{T}{2}\right) \\ \Rightarrow \phi_1'\left(\frac{T}{2}\right) &= \overline{X}_2'\left(\frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

Buradan $\overline{X}_2'(t) = c_3 a_2 \sinh a_2 t + c_4 a_2 \cosh a_2 t$ olduğuna göre

$$\cosh a_1 \frac{T}{2} = c_3 \cosh a_2 \frac{T}{2} + c_4 \sinh a_2 \frac{T}{2} \quad (55)$$

$$a_1 \sinh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \sinh a_2 \frac{T}{2} + a_2 c_4 \cosh a_2 \frac{T}{2} \quad (56)$$

yazılır. (55) eşitliği $a_2 \sinh a_2 \frac{T}{2}$ ile (56) eşitliği $-\cosh a_2 \frac{T}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa

toplanırsa

$$a_2 \sinh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2} - a_1 \cosh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_4 \underbrace{\left(\sinh^2 a_2 \frac{T}{2} - \cosh^2 a_2 \frac{T}{2} \right)}_{-1}$$

elde edilir. Buradan

$$c_4 = \frac{a_1}{a_2} \cosh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2} - \sinh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2}$$

bulunur. c_3 degerini bulalım:

$$\cosh a_1 \frac{T}{2} = c_3 \cosh a_2 \frac{T}{2} + c_4 \sinh a_2 \frac{T}{2} \quad (57)$$

$$a_1 \sinh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \sinh a_2 \frac{T}{2} + a_2 c_4 \cosh a_2 \frac{T}{2}. \quad (58)$$

(57) eşitliği $a_2 \cosh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2}$ ile (58) eşitliği $-\sinh a_2 \frac{T}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa:

$$a_2 \cosh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2} - a_1 \sinh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \underbrace{\left(\cosh^2 a_2 \frac{T}{2} - \sinh^2 a_2 \frac{T}{2} \right)}_1$$

elde edilir. Buradan

$$c_3 = \cosh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2} - \frac{a_1}{a_2} \sinh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2}.$$

bulunur.

O halde (52) nin $X_1(0) = 1$, $X_1'(0) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_3 \cosh a_2 t + c_4 \sinh a_2 t \\ &= \left(\cosh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2} - \frac{a_1}{a_2} \sinh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2} \right) \cosh a_2 t \\ &\quad + \left(\frac{a_1}{a_2} \cosh a_2 \frac{T}{2} \sinh a_1 \frac{T}{2} - \sinh a_2 \frac{T}{2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \right) \sinh a_2 t \\ \Rightarrow X_1(t) &= \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{a_1}{a_2} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \left(t - \frac{T}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\phi_2 \left(\frac{T}{2} \right) = \bar{X}_2 \left(\frac{T}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \phi_2' \left(\frac{T}{2} \right) = \bar{X}_2' \left(\frac{T}{2} \right)$$

$$\frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} = c_3 \cosh a_2 \frac{T}{2} + c_4 \sinh a_2 \frac{T}{2} \quad (59)$$

$$\cosh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \sinh a_2 \frac{T}{2} + a_2 c_4 \cosh a_2 \frac{T}{2}. \quad (60)$$

(59) eşitliği $-a_2 \sinh a_2 \frac{T}{2}$ ile (60) eşitliği $\cosh a_2 \frac{T}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa;

$$\cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \frac{a_2}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2} = a_2 c_4 \underbrace{\left(\cosh^2 a_2 \frac{T}{2} - \sinh^2 a_2 \frac{T}{2} \right)}_1$$

elde edilir. Buradan

$$c_4 = \frac{1}{a_2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2}.$$

O halde

$$\frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} = c_3 \cosh a_2 \frac{T}{2} + c_4 \sinh a_2 \frac{T}{2} \quad (61)$$

$$\cosh a_1 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \sinh a_2 \frac{T}{2} + a_2 c_4 \cosh a_2 \frac{T}{2}. \quad (62)$$

(61) eşitliği $a_2 \cosh a_2 \frac{T}{2}$ ile (62) eşitliği $-\sinh a_2 \frac{T}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{a_2}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \cosh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2} = a_2 c_3 \underbrace{\left(\cosh^2 a_2 \frac{T}{2} - \sinh^2 a_2 \frac{T}{2} \right)}_1$$

elde edilir. Buradan

$$c_3 = \frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{a_2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2}$$

bulunur. O halde (52) nin $X_2(0) = 0$, $X_2'(0) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayan diğer lineer bağımsız yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} X_2(t) &= c_3 \cosh a_2 t + c_4 \sinh a_2 t \\ &= \left(\frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{a_2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2} \right) \cosh a_2 t \\ &\quad + \left(\frac{1}{a_2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2} \right) \sinh a_2 t \\ \Rightarrow X_2(t) &= \frac{1}{a_2} \cosh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{1}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \left(t - \frac{T}{2} \right). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$X_1(t) = \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{a_1}{a_2} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$X_2'(t) = \frac{a_2}{a_1} \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{a_2}{a_1} \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \left(t - \frac{T}{2}\right)$$

olmak üzere Floquet diskriminantının $D = X_1(T) + X_2'(T)$ olduğunu bildiğimizden

$$D = 2 \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2}$$

bulunur. Aşağıdaki trigonometrik eşitlikler kullanılırsa

$$\left. \begin{aligned} \cosh x &= \cos ix \\ \sinh x &= -i \sin ix \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \cosh a_1 \frac{T}{2} = \cos ia_1 \frac{T}{2}, \quad \sinh a_1 \frac{T}{2} = -i \sin ia_1 \frac{T}{2}$$

$$\cosh a_2 \frac{T}{2} = \cos ia_2 \frac{T}{2}, \quad \sinh a_2 \frac{T}{2} = -i \sin ia_2 \frac{T}{2}.$$

Bu durumda

$$\left. \begin{aligned} 2 \cosh a_1 \frac{T}{2} \cosh a_2 \frac{T}{2} &= 2 \cos ia_1 \frac{T}{2} \cos ia_2 \frac{T}{2} \\ \sinh a_1 \frac{T}{2} \sinh a_2 \frac{T}{2} &= -\sin ia_1 \frac{T}{2} \sin ia_2 \frac{T}{2} \end{aligned} \right\}$$

ve böylece

$$D = 2 \cos ia_1 \frac{T}{2} \cos ia_2 \frac{T}{2} - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) \sin ia_1 \frac{T}{2} \sin ia_2 \frac{T}{2}$$

$$= 2 \cos ia_1 \frac{T}{2} \cos ia_2 \frac{T}{2} - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2}\right) \sin ia_1 \frac{T}{2} \sin ia_2 \frac{T}{2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} &= \frac{(\sqrt{\delta + \varepsilon})^2 + (\sqrt{\delta - \varepsilon})^2}{\sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}} = \frac{\delta + \varepsilon + \delta - \varepsilon}{\sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{2\delta}{\sqrt{\delta^2 \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2\right)}}, \quad \varepsilon < \delta. \end{aligned}$$

O halde

$\epsilon < \delta$ durumunda, $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} = 2$ olur ve

$$\begin{aligned}
 D &= 2 \left(\cos ia_1 \frac{T}{2} \cosh ia_2 \frac{T}{2} - \sin ia_1 \frac{T}{2} \sin ia_2 \frac{T}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \left(ia_1 \frac{T}{2} + ia_2 \frac{T}{2} \right) \\
 &= 2 \cos i \frac{T}{2} (a_1 + a_2), \quad T = \frac{2\pi}{w} \text{ olmak üzere;} \\
 &= 2 \cos \frac{\pi}{w} (i(a_1 + a_2)) \leq 2 \quad (w \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Floquet teoremi gereği $w \rightarrow \infty$ için $D \leq 2$ sağlanır. Yani sarkaç yukarıdayken sürekli aynı pozisyonda kalacaktır.

2.3. Floquet Teorinin Uygulaması

İkinci mertebeden aşağıdaki Hill denklemini ele alalım.

$$y'' + a(t)y(t) = 0, \quad a(t+T) = a(t). \quad (63)$$

Bu denklemin kararlılığını inceleyelim. Öncelikle denklemi sistem olarak ifade edelim. Bunun için,

$$y_1 = y, y_2 = y'$$

olarak tanımlanırsa verilen denklem

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} Y; \quad Y' = A(t)Y(t) \quad (64)$$

sistemine dönüşür. $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$, $A(t+T) = A(t)$ olmak üzere, (64) sisteminin esas çözüm matrisi $\psi(t)$ olsun. (esas çözüm matrisi, $\psi(0) = I$ koşulunu sağlayan temel çözüm matrisi). $\psi(t)$ nin elemanları

$$\begin{cases} \psi_1(0) = 1, \psi_1'(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0, \psi_2'(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç koşul şartlarını sağlasın.

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) & \psi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \det \psi(0) = 1$$

ve Teorem 1.10 i) den

$$\psi(t+T) = \psi(t)B;$$

$$\psi(T) = \psi(0)B = IB = B;$$

$$B = \begin{pmatrix} \psi_1(T) & \psi_2(T) \\ \psi_1'(T) & \psi_2'(T) \end{pmatrix}.$$

B nin özdeğerleri ρ_i (karakteristik çarpanlar) olmak üzere Teorem 1.10 ii) den

$$\det(B) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = \exp \left(\int_0^T izA(s)ds \right) \quad ()$$

$$iz(B) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 \rho_2 = \exp \left(\int_0^T izA(s)ds \right) = 1$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \psi_1(T) + \psi_2'(T)$$

$$\rho_1 \rho_2 = 1 \text{ ve } \rho_1 + \rho_2 = \psi_1(T) + \psi_2'(T) = iz(B)$$

Bu durumda

$$\rho^2 - iz(B)\rho + 1 = 0 \quad (65)$$

kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin köklerini inceleyelim. Kökleri

$$\rho_{1,2} = \frac{iz(B) \mp \sqrt{(iz(B))^2 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{iz(B) + \sqrt{(iz(B))^2 - 4}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{iz(B) - \sqrt{(iz(B))^2 - 4}}{2}$$

$$\rho_i = e^{m_i T}, \quad m_i \rightarrow \text{karakteristik usteller}$$

olmak üzere

1. Durum:

$(iz(B))^2 > 4$ ya da $\left(\frac{iz(B)}{2}\right)^2 > 1$ olsun. $\rho_1 \neq \rho_2$ reel iki kök $\rho_1 \rho_2 = 1$, $\rho_1, \rho_2 > 0$ olsun.

Bu durumda

$$0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$$

seklindedir. $\rho_1 = e^{m_1 T}$, $\rho_2 = e^{m_2 T}$, $\rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$ olduğuna göre;

$$\rho_1 = e^{m_1 T}, \rho_2 = e^{-m_1 T}$$

ve Teorem 3.11 ii) den

$$x(t) = e^{m_1 t} p_1(t) \text{ ya da } x(t) = e^{-m_1 t} p_1(t)$$

Buradan en az bir $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) olacağından çözüm kararsızdır.

2. Durum:

$\left(\frac{iz(B)}{2}\right) < 1$ olsun.

Bu durumda $(izB)^2 - 4 < 0$ dur. Kompleks kökler mevcuttur.

$$\rho_{1,2} = \frac{iz(B) \mp i\sqrt{4 - (iz(B))^2}}{2}$$

$$\rho_1 = \frac{iz(B)}{2} + i\sqrt{1 - \frac{(iz(B))^2}{4}}$$

$$\rho_2 = \frac{iz(B)}{2} - i\sqrt{1 - \frac{(iz(B))^2}{4}}$$

$$\rho_1 \rho_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$= \frac{(iz(B))^2}{4} + 1 - \frac{(iz(B))^2}{4}$$

$$= 1$$

$Im(\rho_1) \neq 0$, $Im(\rho_2) \neq 0$ ρ_1 veya ρ_2 den biri üst yarı düzlemedir. Diyelim ki ρ_1 üst yarı düzlemde olsun. $\rho_1 = e^{i\gamma t}$ olacak şekilde $0 < \gamma t < \pi$ ve çözümler;

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i\gamma t}(q(t) + ir(t)) \\ \Rightarrow x(t) &= (\cos \gamma t + i \sin \gamma t)(q(t) + ir(t)) \\ &= (\cos \gamma t q(t) - \sin \gamma t r(t)) + i[\cos \gamma t r(t) + \sin \gamma t q(t)] \end{aligned}$$

şeklindedir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları sınırlı ayrıca $q(t)$ ve $r(t)$ sınırlı olduğundan (çünkü $(q(t) + ir(t))$ periyodik) sonuç itibariyle çözümler sınırlı olacağından kararlıdır.

3. Durum:

$$\frac{iz(B)}{2} = 1 \text{ olsun.}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{iz(B)}{2}, \rho_1 = \rho_2 = e^{mT}$$

ve

$x(t) = e^{mt}p(t)$ olacak şekilde $p(t)$, T periyotlu çözümü mevcuttur.

ρ_1, ρ_2 nin durumuna göre karar verilir.

Eğer $\rho_1 = \rho_2 = e^{mT}p(t)$ değerinde $m < 0$ ise çözümler kararlı $m > 0$ ise çözümler kararsızdır.

Örnek 2.1: $y'' + 4y = 0$, özdeğerleri hesaplayalım.

$$\det[A - \lambda I] = 0, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, Y' = AY$$

$$\det[A - \lambda I] = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i$$

$\lambda_1 = 2i$ için V_1 özvektörünü bulalım.

$$(A - 2iI)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2ia + b = 0 \Rightarrow b = 2ia \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2ia \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \lambda_2 = -2i \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

bulunur. Temel matris çözümü,

$$\phi(t) = (V_1 e^{\lambda_1 t} \quad V_2 e^{\lambda_2 t}) = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{pmatrix}$$

yazılır.

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{pmatrix}, \phi^{-1}(0) = \frac{1}{-4i} \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4i} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \psi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} & \frac{e^{2it}}{4i} - \frac{e^{-2it}}{4i} \\ i(e^{2it} - e^{-2it}) & \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur.

$$\left. \begin{aligned} e^{2it} + e^{-2it} &= \cos 2t + i \sin 2t + \cos 2t - i \sin 2t = 2 \cos 2t \\ e^{2it} - e^{-2it} &= \cos 2t + i \sin 2t - (\cos 2t - i \sin 2t) = 2i \sin 2t \end{aligned} \right\}$$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2} \sin 2t \\ -2 \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \psi(t+T) = \psi(t)B \Rightarrow T = 0 \text{ için } \psi(T) = \psi(0)B$$

$$\Rightarrow \psi(T) = B.$$

2. duruma göre $\frac{iz(B)}{2} = \cos 2t \leq 1 \Rightarrow iz(B)^2 - 4 < 0$ ve çözüm kararlıdır. Gerçekten sistemin çözümü,

$$Y(t) = \phi(t)C = \begin{pmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ 2ic_1 e^{2it} - 2ic_2 e^{-2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1 = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$$

$$y_2 = 2ic_1 e^{2it} - 2ic_2 e^{-2it}.$$

Böylece çözüm sinüs ve kosinüs fonksiyonları içerdiğinden sınırlıdır ve kararlıdır.

3. SONUÇLAR

1. Floquet teoremi öncelikle bazı sabit katsayılı bazı denklemlere uygulanarak denklemin katsayılarının periyodik olmasına rağmen çözümlerinin periyodik olmadığı örneklerle gözlemlenmiştir (Teorem 1.7, Örnek 1.12, Örnek 1.13, Örnek 1.14).
2. Değişken katsayılı denklemler için Floquet üstelleri ve karakteristik çarpanlar hesaplanmıştır. Değişken katsayılı denklemlerde karakteristik polinom kullanılmadığından çözümler için farklı ve orijinal yaklaşımlar kullanılmıştır (Problem 2.1, Problem 2.2).
3. Benzer sonuçlar sistemler için elde edilmiştir (Problem 2.3, Problem 2.4).
4. Genel olarak $x'' - bx' \sin t - bx \cos t = 0, x \in [0, 2\pi], b \neq 0$ denkleminin Floquet üstelleri, karakteristik çarpanları, periyodik ve sınırlı P_1, P_2 çözümleri bulunmuştur.
5. $\frac{d^2x}{dt^2} - (\delta + \epsilon \sin wt)x = 0$ ile verilen sarkaç probleminin diskriminant fonksiyonu hesaplanmış ve kararlılığı incelenmiştir.
6. Floquet teorisinin yine bir uygulaması olarak $y'' + a(t)y(t) = 0$ denkleminin kararlılık analizi yapılmış ve sonuç özel bir örnekle pekiştirilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Floquet teori ile ilgili sonuçların kısmi türevli denklemler için de uygulanabilirliği incelenebilir.
2. Daha genel değişken katsayılı denklemler için kararlılık analizi geliştirilebilir.
3. Periyodik katsayılı olmayan denklemler için de yaklaşık periyodik katsayılı denklemler kullanılarak Floquet teorisinin yardımıyla çözümlerin kararlılığı araştırılabilir.



5. KAYNAKLAR

Eastham, M.S.P. (1970)., Theory of Ordinary Differential Equations, Van Nostand Reinhold Company, London.

Eastham, M.S.P. (1973)., The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, London.

Hochstadt, H. (1975)., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publication, New York

Ward, M., (2025, Nisan 26).

https://personal.math.ubc.ca/~ward/teaching/m605/every2_floquet1.pdf,

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. Liseyi bitirdikten sonra 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi anabilim dalında Tezsiz yüksek lisans yaptı.

2011 yılında ilk görev yeri olan Yüksekova, İsmet Alkan Anadolu Lisesinde öğretmenlik hayatına başladı. Burada 3 yıl görev yaptıktan sonra Trabzon Köprübaşı Çok Programlı Anadolu Lisesine tayin oldu ve 5 yılın sonunda bir sonraki görev yeri olan Hamit Özdağ Kız Anadolu lisesine tayin edildi. Halen son görev yeri olan Zübeyde Hanım Kız Anadolu Lisesinde çalışmaktadır.